Universität Marburg
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Böhmer

SS 2000

Übungen zur Vorlesung: Numerik I

Blatt 4

Abgabe: Montag den 8.5.2000, 09:15 Uhr,
Programmieraufgaben eine Woche später

12. Matrix- und Vektorungleichungen sind in dieser Aufgabe komponentenweise zu verstehen. Zur Lösung des linearen Gleichungssystems $x = Bx + y,\ B \geq 0,\ y \geq 0$ wird das Iterationsverfahren $\boxed{4S}$

$$x^{(k+1)} := Bx^{(k)} + y, \quad k = 0, 1, \dots$$

betrachtet. Es sei vorausgesetzt

$$\|B\|_\infty = \max_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} < 1.$$

Zeigen Sie:

(a) Die Iteration konvergiert für beliebige Startvektoren $x^{(0)}$ gegen die Lösung x.

(b) Ist $x^{(0)}$ ein Startvektor mit $x^{(0)} \leq x^{(1)}$ (bzw. $x^{(0)} \geq x^{(1)}$), so ist die Iterationsfolge $\{x^{(k)}\}$ monoton wachsend (fallend), d.h. $x^{(0)} \leq x^{(1)} \leq \dots$ (bzw. $x^{(0)} \geq x^{(1)} \geq \dots$).

(c) Im Fall $x^{(0)} = 0$ gilt mit $e := (1, \dots, 1)^T$ die Schranke

$$x^{(k)} \leq x \leq x^{(k)} + \frac{\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_\infty}{1 - \|B\|_\infty} e, \quad k = 0, 1, \dots.$$

(4)

13. Gegeben sei eine reguläre $n \times n$-Matrix A. Zeigen Sie : $\boxed{4M}$

(a) Jede "gestörte" Matrix $B := A + S$ ist wieder regulär für $\|S\| < 1/\|A^{-1}\|$.

(b) Mit $u, v \in \mathbb{R}^n$ und $v^T A^{-1} u + 1 \neq 0$ ist $B = A + uv^T$ regulär und es existieren $w, z \in \mathbb{R}^n$ mit

$$(A + uv^T)^{-1} = A^{-1} + wz^T.$$

(4)

14. Es soll das folgende Iterationsverfahren zur Bestimmung der Inverse einer Matrix betrachtet werden. Gegeben sei eine Näherung C_0 für die Inverse A^{-1} einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, sowie die Fehlermatrix $R_0 := I - AC_0$. Man definiert : $\boxed{4M}$

$$\begin{aligned} C_k &:= C_{k-1}(I + R_{k-1} + R_{k-1}^2), \\ R_k &:= I - AC_k, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass $R_k = R_{k-1}^3$ gilt.

(b) Berechnen Sie $A^{-1} - C_k$ in der (*a-priori*) Abhängigkeit von R_0.

(c) Falls $\|C_0\| < 1$ ist, konvergiert C_k kubisch gegen die Inverse A^{-1}. Beweisen Sie das (d.h. formulieren Sie eine aposteriori Abschätzung der Norm des Fehlers $A^{-1} - C_k$.)

15. Programmieren Sie das SOR-Verfahren zur Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$. Verwenden Sie als Startwert $x^{(0)} = 0$. Zur Prüfung der Konvergenzgeschwindigkeit soll nach jeweils $k = 32$ Schritten der Quotient $\rho(\omega) := (\|d^{(32)}\|_1/\|d^{(28)}\|_1)^{1/4}$, $d^{(k)} := Ax^{(k)} - b$, als Schätzung des Spektralradius berechnet werden. Zur Feststellung des optimalen Relaxationsparameters ω ist diese Schätzung ρ für 20 äquidistant verteilte Werte in $[1, 2)$ zu berechnen und evtl. graphisch darzustellen. Testen Sie das Programm mit $\boxed{5\text{P}}$

$$A := \begin{pmatrix} C & I_4 & 0 & 0 \\ I_4 & C & I_4 & 0 \\ 0 & I_4 & C & I_4 \\ 0 & 0 & I_4 & C \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix},$$

$b = (2, 1, 1, 2, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 2, 1, 1, 2)^T$. (5)