Universität Marburg
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Böhmer

Übungen zur Vorlesung: Numerik I

Blatt 5

Abgabe: Montag den 15.5.2000, 09:15 Uhr,
Programmieraufgaben eine Woche später

16. (a) Zeigen Sie für $x, y \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$: $\boxed{4M}$

$$|x^T y| \leq \|x\|_2 \|y\|_2, \quad |x^T y| \leq \|x\|_1 \|y\|_\infty, \quad \|A^T\|_\infty = \|A\|_1, \quad \|A\|_2 \leq \sqrt{\|A\|_\infty \|A\|_1}.$$

(b) Die Matrixnormen $\|A\|_1, \|A\|_2, \|A\|_\infty$ sind die von den jeweiligen Vektornormen induzierten Matrixnormen. Geben Sie jeweils einen Vektor an, für den gilt: $\|Ax\| = \|A\| \|x\|$.

17. Gegeben seien $n+1$ paarweise verschiedene Stützstellen $x_0, ..., x_n$. Mit $L_i(x)$ werden die zugehörigen Lagrange-Polynome bezeichnet. Damit werde definiert $\boxed{4M}$

$$\begin{aligned} H_i(x) &:= [1 - 2(x - x_i) L_i'(x_i)] L_i^2(x) \quad (1) \\ G_i(x) &:= (x - x_i) L_i^2(x) \quad (2) \end{aligned}$$

Zeigen Sie, daß durch

$$p(x) := \sum_{i=0}^{n} y_i H_i(x) \; + \; \sum_{i=0}^{n} y_i' G_i(x) \quad (3)$$

ein Polynom vom Grad höchstens $2n+1$ definiert wird, das die Interpolationsbedingungen

$$p(x_i) = y_i, \quad p'(x_i) = y_i', \quad i = 0, \ldots, n, \quad (4)$$

erfüllt.

18. Es sei A eine symmetrische Matrix mit der Zerlegung in ein unteres, ein oberes Dreieck mit Nullen auf der Hauptdiagonale und in eine Einheitsmatrix $A = L + I + L^T$. Das Einzelschrittverfahren zur Lösung von $Ax = b$ hat den Nachteil, dass die Iterationsmatrix $B = (I + L)^{-1} L^T$ nicht mehr symmetrisch ist und daher i.a. nicht-reelle Eigenwerte besitzt. Folgende symmetrisierte Variante kann aber betrachtet werden, $k := 0, 1, \ldots,$ $\boxed{5M}$

$$\begin{aligned} (I + L) y^{(k)} &:= b - L^T x^{(k)} \quad (5) \\ (I + L^T) x^{(k+1)} &:= b - L y^{(k)}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie,

a) Für die Fehler in aufeinanderfolgenden Schritten gilt

$$x^{(k+1)} - x = B(x^{(k)} - x)$$

mit der Iterationsmatrix

$$B = (I + L^T)^{-1} L (I + L)^{-1} L^T = (I + L^T)^{-1} (I + L)^{-1} L L^T.$$

b) B ist ähnlich zu einer symmetrischen Matrix und besitzt daher nur reelle Eigenwerte.

c) Mit '*kleinen*' Modifikationen kann man das symmetrisierte Verfahren (5) auch zum Lösen von allgemeineren Problemen verwenden. Formulieren Sie den Lösungsalgorithmus für den Fall, dass die Diagonalelemente von A alle positiv sind.

19. Wendet man Jacobi und SOR-Verfahren (siehe Vorlesung) mit den Iterationsmatrizen B_G und $B_S(\omega)$ mit $\omega \neq 0$ auf ein lineares System $Ax = b$ an, wobei $\boxed{4S}$

$$A := \begin{pmatrix} D_1 & R_1 & & \\ L_1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & R_{n-1} \\ & & L_{n-1} & D_n \end{pmatrix}$$

und die Matrizen $D_1, \ldots, D_n$ alle diagonal sind, so besitzen die Eigenwerte der Iterationsmatrizen B_G und $B_S(\omega)$ folgende Eigenschaften:

(a) Ist μ ein Eigenwert von B_G, ist auch $-\mu$ ein Eigenwert von B_G.

(b) Wenn μ ein Eigenwert von B_G ist und die Gleichung

$$(\lambda + \omega - 1)^2 = \lambda \omega^2 \mu^2 \tag{6}$$

erfüllt ist, dann ist λ ein Eigenwert von $B_S(\omega)$.

(c) Ist $\lambda \neq 0$ ein Eigenwert von $B_S(\omega)$ dann ist μ aus der Gleichung (6) ein Eigenwert von B_G.

Beweisen Sie diese Eigenschaften.