Universität Marburg
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Böhmer

SS 2000

Übungen zur Vorlesung: Numerik I

Blatt 6

Abgabe: Montag den 21.5.2000, 09:15 Uhr,
Programmieraufgaben eine Woche später

20. a) Gegeben seien $n+1$ paarweise verschiedene Stützstellen $x_0, ..., x_n$. Sei $f(x) = g(x) \cdot h(x)$. Beweisen Sie die 'Leibnizregel für dividierte Differenzen' $\boxed{\text{4M}}$

$$f[x_0, ..., x_n] = \sum_{j=0}^{n} g[x_0, ..., x_j] \cdot h[x_j, ..., x_n]$$

.

b) Zeigen Sie für $f(x) = \frac{1}{x}$:

$$f[x_0, \ldots, x_n] = \frac{(-1)^n}{x_0 x_1 \cdots x_n} \tag{1}$$

21. Die auf $I = [-1, 1]$ zweimal stetig differenzierbare Funktion f werde durch ein lineares Polynom an den Stellen $(x_i, f(x_i)), i = 0, 1$, mit $x_0, x_1 \in I$ interpoliert. Dann ist $\boxed{\text{4M}}$

$$\alpha := \frac{1}{2} \max_{\xi \in I} |f''(\xi)| \max_{x \in I} |(x - x_0)(x - x_1)|$$

eine obere Schranke für den maximalen absoluten Interpolationsfehler auf I. Wie hat man x_0, x_1 zu wählen, damit $\|\omega(x)\|_\infty$ mit $\omega(x) := (x - x_0)(x - x_1)$ minimal wird ?

22. Sei $w \in C[a, b]$, $w(x) > 0$ für alle $x \in [a, b]$, und für $f, g \in C[a, b]$ sei das Innenprodukt definiert als: $\boxed{\text{5S}}$

$$(f, g)_w = \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx \quad .$$

Zeigen Sie :

a) Es existiert eine Folge von Polynomen

$$p_n(x) = x^n + c_{n,n-1}x^{n-1} + \ldots + c_{n,0}, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{2}$$

mit $(p_n, p_m)_w = 0$ für $n \neq m$.

b) Die p_n genügen einer Drei-Term-Rekursion der Form

$$p_0(x) = 1, \quad p_1(x) = x - \alpha_1, \quad p_n(x) = (x - \alpha_n)p_{n-1}(x) + \beta_n p_{n-2}(x), \quad n = 2, 3, \ldots \tag{3}$$

Stellen Sie dazu p_n in der Form $p_n(x) = xp_{n-1}(x) + \sum_{j=0}^{n-1} c_{nj}p_j(x)$ dar (wieso geht das?) und beachten Sie, daß $(p_n, p_m)_w = 0$ für $m = 0, \ldots, n-1$ gilt.

c) Den Funktionswert eines Polynoms p,

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j p_j(x), \tag{4}$$

erhält man nach Durchlaufen folgender Rekursion :

$$\begin{aligned} y_{n+1} &:= 0 && (5)\\ y_n &= c_n, && (6)\\ y_j &= (x-\alpha_{j+1})y_{j+1} + \beta_{j+2}y_{j+2} + c_j, \quad j = n-1, n-3, \ldots, 0, && (7)\\ \Longrightarrow p(x) &= y_0. && (8) \end{aligned}$$

23. Schreiben Sie ein Unterprogramm, das die dividierten Differenzen zu vorgegebenen Wertepaaren (x_i, y_i), $i = 0, \ldots, n$ in einem linearen Feld A[0,..,N] berechnet. Durch einen zusätzlichen Steuerparameter INDUKT soll dieses in der Lage sein, im Übergang von den dividierten Differenzen zu n Stellen, diejenigen zu $n+1$ Stellen zu berechnen. Dazu wird am besten das Newtonpolynom in der Form (Umnumerierung) 5P

$$p_n(x) = y[x_n] + (x - x_n)y[x_{n-1}, x_n] + \ldots + (x - x_1)\ldots(x - x_n)y[x_0, \ldots, x_n]$$

geschrieben, zur Bestimmung der erweiterten Differenzen werden dann nur die hier vertretenen Werte benötigt. Zur Auswertung ist ein weiteres Unterprogramm erforderlich, das den Funktionswert des Newton-Interpolationspolynoms an einer Stelle x bestimmt.

a) Mit diesen Unterprogrammen soll eine einfache adaptive Approximation der Funktion $f(x) := exp(-x^2)$ im Intervall $[0, 3]$ erzeugt werden. Zunächst werde die Funktion mit $n := 8$ in äquidistanten Punkten $x_i = 3\frac{i}{n}$, $i = 0, \ldots, n$ interpoliert und in den Zwischenpunkten $z_i := (x_{i-1} + x_i)/2$, $i = 1, \ldots, n$ der Interpolationsfehler bestimmt. Die vier Stellen z_i, an denen die größten Fehler gefunden wurden, werden anschließend als zusätzliche Interpolationsstellen dazugenommen. Die neuen 13 Punkte werden wiederum als $x_i, i = 0, \ldots, 12 = n$ bezeichnet. Berechnen Sie auf diese Weise noch weitere (evtl. genauere) Interpolationspolynome mit dann $n = 12 + 6 = 18, 18 + 9 = 27, 27 + 13 = 40, 40 + 20 = 60$ Stützstellen. Zeichnen Sie (mit einer geeigneten Grafiksoftware) oder drucken Sie die Fehler dieser Interpolationspolynome mit einem hinreichend feinen Raster.

(a) Ersetzen Sie in Teil a) die Exponentialfunktion durch die Runge-Funktion

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2} \qquad \text{für } x \in [-1, 1] \tag{9}$$