Universität Marburg
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Böhmer SS 2000

Übungen zur Vorlesung: Numerik I
Blatt 7
Abgabe: Montag den 29.5.2000, 09:15 Uhr.

24. Die Funktion $\ln(x)$ sei mit einer Schrittweite $h = \frac{1}{100}$ tabelliert in den Abszissenwerten $x_j = jh$. Zur Bestimmung von $\ln(\xi)$, $\xi \in [x_m, x_{m+1}]$, wird das Interpolationspolynom $p_{2k+1}(x)$ in den Punkten $x_{m-k}, x_{m-k+1}, \ldots, x_{m+k+1}$ verwendet. Geben Sie eine gute Schranke für den Interpolationsfehler $|p_{2k+1}(\xi) - \ln(\xi)|$ im Intervall $[x_m, x_{m+1}] \subset [1, 2]$ an, und leiten Sie daraus ab, für welches k jeweils ein Fehler unter $10^{-4}, 10^{-8}, 10^{-12}$ garantiert werden kann. $\boxed{\text{4M}}$

25. Sei R normierter Vektorraum über $\mathbb{R}$, V eine nichtleere Teilmenge von R. Ein Element $v \in V$ mit $\|f - v\| \leq \|f - w\| \; \forall w \in V$ heißt Bestapproximation von $f \in R$. Unabhängig von der Existenz einer Bestapproximation läßt sich der Abstand von f zu V definieren als $\boxed{\text{4S}}$
$$\rho_V(f) := \inf_{w \in V} \|f - w\| \, .$$
   (a) Zeigen Sie, daß für die Abstandsfunktion gilt :
$$|\rho_V(f) - \rho_V(g)| \leq \|f - g\|, \quad f, g \in R.$$
   (b) Zeigen Sie, daß die Menge der Bestapproximationen eines Elementes $f \in R$ konvex ist.

26. Für die Funktion $f(x) := \sqrt{1 + x}$ sollen im Intervall $[0, 1]$ lineare Approximationen, eine Interpolierende und die Bestapproximation, verglichen werden. $\boxed{\text{4M}}$

   a) Man berechne die lineare Interpolierende für f zu den Tschebyscheff-Knoten $x_0 = \frac{1}{4}(2 - \sqrt{2}), x_1 = \frac{1}{4}(2 + \sqrt{2})$, und deren maximalen Fehler im Intervall $[0, 1]$.

   b) Man bestimme die in der Supremumsnorm bestapproximierende lineare Funktion und den dazugehörigen Fehler ϵ, also diejenigen Koeffizienten $\hat{a}, \hat{b} \in \mathbb{R}$ mit
$$\epsilon := \max_{x \in [0,1]} |\hat{a} + \hat{b}x - f(x)| \leq \max_{x \in [0,1]} |a + bx - f(x)| \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$
   Hinweis: Verwenden Sie, dass die Funktion $g(x) := \hat{a} + \hat{b}x$ hier charakterisiert ist durch die Bedingungen $\epsilon = g(0) - f(0) = f(\xi) - g(\xi) = g(1) - f(1), \; \xi \in (0, 1)$.

27. Zu einer Funktion $f \in C^1[a, b]$ und einem Gitter $\Delta \subset [a, b]$ sei s die stückweise linear Interpolierende (Polygonzug) mit $s(x_i) = f(x_i), \; i = 0, \ldots, n$. Also ist $s \in S^0_{\Delta,1}$. $\boxed{\text{3S}}$

   a) Zeigen Sie die Minimaleigenschaft
$$\|s'\|_2 \leq \|g'\|_2 \quad \forall g \in C^1[a, b] \text{ mit } g(x_i) = f(x_i), \; i = 0, \ldots, n.$$

b) Folgern Sie daraus die Ungleichung

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{h_i}\Big(g(x_{i+1}) - g(x_i)\Big)^2 \leq \|g'\|_2^2.$$