Universität Marburg
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Böhmer

SS 2000

Übungen zur Vorlesung: Numerik I

Blatt 8

Abgabe: Montag den 5.6.2000, 09:15 Uhr,
Programmieraufgaben eine Woche später.

28. Es sei für ein Gitter $\Delta\ :\ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ definiert: $s_i := s|_{(x_i,x_{i+1})}$ und $s_i(x_\nu) = y_\nu = s(x_\nu),\ \nu = i, i+1$ und $i = 0,\ldots,n-1$. Weiter sei $s_i'(x_\nu) = m_\nu = s'(x_\nu)$ gefordert. $\boxed{\text{3S}}$

    a) Zeigen Sie, daß sich der natürliche kubische Interpolationsspline s eindeutig darstellen läßt in der Form:

$$\begin{aligned} s_i(x) \quad = \quad & y_i + m_i(x-x_i) + \\ & \left[3\tfrac{y_{i+1}-y_i}{h_i^2} - \tfrac{m_{i+1}+2m_i}{h_i}\right](x-x_i)^2 + \\ & \left[-2\tfrac{y_{i+1}-y_i}{h_i^3} + \tfrac{m_{i+1}+m_i}{h_i^2}\right](x-x_i)^3, \quad i = 0,\ldots,n-1 \end{aligned} \tag{1}$$

    b) Zeigen Sie, daß $D^2 s_{i-1}(x_i) = D^2 s_i(x_i)$ genau dann erfüllt ist, wenn gilt:

$$h_i m_{i-1} + 2(h_{i-1}+h_i)m_i + h_{i-1}m_{i+1} = 3\left(h_{i-1}\tfrac{y_{i+1}-y_i}{h_i} + h_i\tfrac{y_i-y_{i-1}}{h_{i-1}}\right), \quad i = 1,\ldots,n-1 \tag{2}$$

    c) Stellen Sie das lineare Gleichungssystem für die Koeffizienten des nat. Interpolationssplines aus (1) auf und begründen Sie die Lösbarkeit des LGSs.

29. Weisen Sie mit der Darstellung aus (1) nach, daß der natürliche kubische Interpolationsspline Lipschitz-stetig von den "Daten" abhängt. Zeigen Sie dazu für beliebige Gitter $\Delta\ :\ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ und Funktionen $f, g \in C([a,b])$, daß $\boxed{\text{4M}}$

$$\|S_f - S_g\|_\infty \le L\|f-g\|_\infty \quad \text{mit} \quad L = 1 + 3\frac{h_{\max}}{h_{\min}},$$

wobei $h_{\min} = \min\{x_j - x_{j-1} : j = 1,\ldots,n\}$, $h_{\max} = \max\{x_j - x_{j-1} : j = 1,\ldots,n\}$.

30. Bei Messungen werden meist nicht Funktionswerte $f(x_i)$ einer Funktion f ermittelt, sondern lokale Mittelwerte der Form $\boxed{\text{3M}}$

$$\mu_i(f) = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)w_i(x)\,dx, \quad w_i(x) \ge 0.$$

Die mit solchen Funktionalen gebildete lokale Spline-Approximation

$$Qf = \sum_{i=-1}^{n+1} \mu_i(f)B_i$$

mit den B-Splines B_i vom Grad 3 soll untersucht werden.

a) Wie lautet die Bedingung an die Gewichtsfunktionen w_i dafür, daß im Intervall $[x_0, x_n]$ konstante Funktionen reproduziert werden?

b) Zeigen Sie, daß unter dieser Bedingung für Funktionen $f \in C^1(\mathbb{R})$ gilt

$$|f(x) - Qf(x)| \leq cH\|f'\|_\infty, \quad x \in [x_0, x_n].$$

31. Schreiben Sie ein Unterprogramm, das zu einer gegebenen Wertetabelle den natürlichen kubischen Spline berechnet und ein Unterprogramm, das eine gegebene Splinefunktion auf einem Gitter auswertet und abspeichert. $\boxed{5P}$

a) Approximieren Sie die Runge-Funktion

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2} \tag{3}$$

auf dem Intervall $[-1; 1]$ mit $n = 6, 10, 16$ Punkten und plotten Sie das Ergebnis, z.B. mit gnuplot.

b) Errechnen Sie die Newtonpolynome der Runge-Funktion vom Grad $n = 6, 10, 16, 20$ auf dem Intervall $[-1; 1]$, wobei jeweils äquidistante und Tschebysheff-Punkte als Stützstellen zu wählen sind.

c) Werten Sie auf einem genügend feinen Gitter die Fehler aus a) und b) aus und drucken Sie diese. Ändert sich das Ergebnis, wenn man die Funktionen $f(x) = \frac{1}{1+n^2x^2}$, $n = 6, 7, \ldots$ betrachtet ?