Universität Marburg
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Böhmer

SS 2000

Übungen zur Vorlesung: Numerik I

Blatt 9

Abgabe: Donnerstag den 15.6.2000, 09:15 Uhr.

32. Es sei $f(x) := \sqrt{x}$. Zeigen Sie **4M**

(a) für den Fehler der einfachen Trapezregel auf $[\alpha, \beta]$, $\alpha \geq 0$ gilt

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx - \frac{\beta - \alpha}{2}(f(\alpha) + f(\beta)) = \frac{1}{6}(\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha})^3$$

(b) für den Fehler der iterierten Trapezregel T_n mit n äquidistanten Stützstellen in $[0,1]$ gilt

$$\left| \int_0^1 f(x)dx - T_n \right| \leq \frac{1}{4n\sqrt{n}};$$

(c) mit den Gitterpunkten $x_i := \sqrt{1 + 3j^2/n^2} - 1, j = 0, \ldots, n$ erhält man sogar

$$\left| \int_0^1 f(x)dx - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x_{j+1} - x_j}{2}(f(x_{j+1}) + f(x_j)) \right| \leq \frac{C}{n^2}.$$

33. Die Gauß-Quadratur für das Intervall $[-1, 1]$ hat den Nachteil, daß die Funktionswerte in den Randpunkten nicht verwendet werden, so daß bei iterierter Anwendung jeder Funktionswert nur einmal ausgenutzt wird. Daher kann man versuchen, die Stützstellen $x_0 = -1$, $x_n = 1$ vorzuschreiben und die restlichen Stützstellen so zu bestimmen, daß Polynome möglichst hohen Grades exakt integriert werden. Dies leistet folgende Variante : Sei P_n das Legendre-Polynom n-ten Grades auf $[-1, 1]$ und **4S**

$$Q_{n+1} := (1 - x^2)P_n'(x).$$

(a) Zeigen Sie, daß Q_{n+1} genau $n+1$ Nullstellen $-1 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$ bestitzt.

(b) Zeigen Sie, daß die interpolatorische Quadraturformel zu den Stützstellen $x_0, \ldots, x_n$ (Gauß-Radau-Knoten) Polynome vom Grad $2n - 1$ exakt integriert.

(c) Welche Quadraturformeln ergeben sich in den Fällen $n = 1$ und $n = 3$.

34. (a) Zeigen sie, daß der symmetrische Differenzenquotient zweiter Ordnung für$f''(a)$ bei geeignetem f eine h^2-Entwicklung besitzt in der Form **4S**

$$\frac{1}{h^2}(f(a-h) - 2f(a) + f(a+h)) = f''(a) + \sum_{j=1}^{p} h^{2j} c_{2j} f^{(2j+2)}(a) + O(h^{2p+1}).$$

(b) Bestimmen Sie den rechtsseitigen Differenzenquotienten zweiter Ordnung

$$f''(a) = \frac{1}{h^2} \sum_{j=0}^{3} w_j f(a + jh) + O(h^2),$$

und zeigen Sie, daß dieser nur eine h-Entwicklung

$$\sum_{j=2}^{p} h^j d_j f^{(j+2)}(a) + O(h^{p+1})$$

besitzt.

35. Geben Sie explizit die ersten beiden Extrapolationsschritte der Trapezregel mit der Romberg-Folge $h, h/2, h/4$ an. $\boxed{\text{4M}}$