Universität Marburg
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Böhmer

SS 2000

Übungen zur Vorlesung: Numerik I

Blatt 9

Abgabe: Donnerstag den 6.7.2000, 09:15 Uhr.

Programmieraufgabe eine Woche später.

36. Ein Hauptproblem beim praktischen Einsatz des Newtonverfahrens ist die Wahl eines geeigneten Startwertes x_0. Für die Bestimmung der reellen Nullstellen eines Polynoms $\boxed{4S}$

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j = a_n(x - \xi_1)\dots(x - \xi_n),\ a_n \neq 0, \tag{1}$$

können dazu folgende Aussagen gemacht werden. Zeigen Sie:

a) Es gilt die Schranke

$$|\xi_j| \leq 1 + \frac{1}{|a_n|} \max\{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_{n-1}|\},\ j = 1, \dots, n. \tag{2}$$

b) Die Iterationsfunktion g_N des Newtonverfahrens hat die Form

$$g_N(x) = x - \frac{p(x)}{p'(x)} = x - \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x - \xi_j}\right)^{-1},\ (x \neq x_j). \tag{3}$$

c) Wenn die Nullstellen von p reell sind, $\xi_1 \leq \dots \leq \xi_n$, konvergiert das Newtonverfahren $x_{k+1} := g_N(x_k)$ mit jedem Startwert $x_0 > \xi_n$ gegen ξ_n.

37. Die Gleichung $\boxed{4S}$

$$sin(x) - (x/2)^2$$

hat eine Nullstelle im Intervall $[1, 2]$.

a.) Berechnen Sie die ersten fünf Schritte der Sekanten-methode und der Regula falsi mit den Startwerten $x_0 = 1, x_1 = 2$.

b.) Als Kompromiß zwischen diesen beiden Methoden kann der Illinois- Algorithmus verwendet werden: sobald ein Wertepaar der Sekantenmethode die Nullstelle nicht einschließt, wird stattdessen eine modifizierte Regula falsi angewendet: statt die Nullstelle der Sekante durch (x_n, f_n) und (x_{n-1}, f_{n-1}) zu verwenden wird die Nullstelle der Sekante durch (x_n, f_n) und $(x_{n-1}, f_{n-1}/2)$ als nächster Approximationspunkt benutzt. Berechnen Sie die ersten fünf Schritte dieser Methode.

38. Zur Bestimmung von $z = \sqrt{a}$, $a > 0$ sollen zwei Iterationsverfahren $\boxed{3S}$

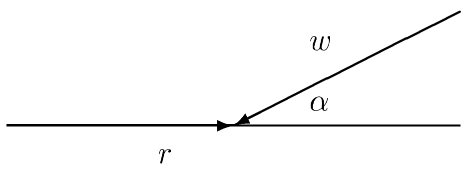
$$x_0 > 0, \quad x_{k+1} := g(x_k),\ k = 0, 1, \dots$$

betrachtet werden.

(a) Es sei $g(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x})$. Zeigen Sie, dass die Iteration für jeden Startwert $0 < x_0 \neq z$ ab $k = 1$ monoton fallend konvergiert, mit $|x_{k+1} - z| \leq \frac{1}{2}|x_k - z| \forall k > 0$.

(b) Es sei $g(x) = \frac{1}{2}x(3 - x^2/a)$. Zeigen Sie, dass die Iteration hier für $0 < x_0 < \sqrt{3a}$ ab $k = 1$ monoton wachsend gegen z konvergiert und bestimmen Sie die Ordnung dieses Verfahrens.

39. Bestätigen Sie die alte Radfahrerweisheit 'MEISTENS HAT MAN GEGENWIND'! Der Grund dafür ist die Tatsache, daß der Luftwiderstand L quadratisch von der Geschwindigkeit abhängt, $\|L\| = c_w F \|v\|^2$. $\boxed{4P}$



Wenn ein Objekt sich mit der Geschwindigkeit r bewegt und der Wind mit Geschwindigkeit w und einem Winkel α weht, so ergibt sich für den Gesamtwiderstand in Fahrtrichtung die Beziehung (oBdA $r = 1$)

$$\ell(w, \alpha) = (1 + w\cos\alpha)\sqrt{1 + 2w\cos\alpha + w^2}.$$

Selbst wenn der Wind von der Seite kommt, $\cos\alpha = 0$, erhöht er den Fahrtwiderstand gegenüber Windstille. Sogar ein leichter Rückenwind, $\cos\alpha < 0$, kann diesen Effekt noch hervorrufen (für $\alpha \le \alpha_1 \cong 1.824..$).

Wir betrachten die Funktion $f(w) := \ell(w, \alpha) - 1$ mit α als zusätzlichem Parameter. Ein Funktionswert $f(w) > 0 = f(0)$ bedeutet einen gegenüber Windstille erhöhten Widerstand. Für $\alpha > \frac{\pi}{2}$ gilt $f'(0) < 0$, außerdem ist $f(w) < -1$ für $w > w_2 := -1/\cos\alpha$. Für $\alpha < \alpha_1$ gibt es ein Intervall $0 < (w_0, w_1) < w_2$ von 'ungünstigen' Geschwindigkeiten mit $f(w) > 0,\ w \in (w_0, w_1)$. Diese Intervalle sollen Sie numerisch berechnen für $\alpha = 1.58, 1.59, \ldots, 1.82$ (und ausdrucken!).

Zur Bestimmung der Nullstelle w_1 ist das Newtonverfahren mit dem Startwert w_2 zu programmieren, als Abbruchkriterium dabei die Bedingung $|f(w)| \le 10^{-6}$ zu verwenden. Die Nullstelle w_0 liegt zwischen den beiden lokalen Extrema von f, die Angabe eines zuverlässigen Startwerts ist schwierig. Daher soll w_0 durch das folgende Bisektionsverfahren berechnet werden: $a := 0,\ b := w_1$,

$$m := \frac{a+b}{2}, \quad \text{falls } f(m) < 0 \text{ setze } a := m \text{ sonst } b := m,$$

bis $b - a < 10^{-6}$.

Die folgenden Aufgaben sind freiwillig, können aber zum zusätzlichen Punkteerwerb genutzt werden.

40. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ habe die Nullstelle ξ, sei zweimal stetig differenzierbar und es sei $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in I := \{x;\ |x - \xi| \le r\}$. Das Verfahren $\boxed{4S}$

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)^2}{f(x_n) - f(x_n + f(x_n))} \qquad n = 0, 1, \ldots$$

ist ein Quasi-Newton-Verfahren. Zu zeigen ist:

a) Man hat es mit einem Verfahren der Art

$$x_{n+1} := x_n - q(x_n) f(x_n)$$

zu tun. Man gebe $q(x_n)$ an un zeige: Es gibt eine Konstante c, so daß

$$|q(x) - f'(x)^{-1}| \leq c|f(x)|.$$

b) Man konstruiere in hinreichender Nähe von ξ eine $|x_n - \xi|$ majorisierende Folge y_n, d.h.

$$|x_n - \xi| \leq y_n, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

und gebe Bedingungen dafür an, daß y_n, $n \geq 0$, eine Nullfolge bildet. Man bestimme mit Hilfe von y_n die lokale Konvergenzordnung.

41. Sei $(B; \|.\|)$ eine kompakte Teilmenge eines Banach-Raums und $f : B \to B$ eine schwach kontrahierende Abbildung, d.h. es gelte für alle $x \neq y$: $\boxed{\text{3S}}$

$$\|f(x) - f(y)\| < \|x - y\| \tag{4}$$

a) Zeigen Sie: f hat genau einen Fixpunkt $z \in B$.

b) Zeigen Sie, daß die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x + \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$ zwar schwach kontrahierend ist, aber keinen Fixpunkt besitzt.

c) Zeigen Sie, daß die Funktion $f(x) = \arctan(2x)$ genau einen positiven Fixpunkt besitzt.