

Anwendungen der Löwner-Theorie

Bachelorarbeit

dem
Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
vorgelegt von

Maximilian Schmidt
aus Knüllwald

Marburg, im Dezember 2014

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	3
2. Jordanscher Kurvensatz	5
3. Löwner-Theorie	19
4. Anwendung: Sternförmige und konvexe Funktionen	51
5. Ausblick	71
Literaturverzeichnis	73
A. Danksagung	75
B. Erklärung	76

1. Einleitung

In dieser Arbeit werden wir uns mit der Familie

$$S = \{ f \in \mathcal{O}(\mathbb{E}) \mid f(0) = 0, f'(0) = 1 \text{ und } f \text{ ist schlicht} \}$$

und mit zwei Teilfamilien S^* und S_k beschäftigen. Dabei bezeichne S^* die Menge aller *sternförmigen Funktionen* aus S , das heißt Funktionen, die ein sternförmiges Bild mit Zentrum 0 besitzen, und S_k sei entsprechend die Menge der *konvexen Funktionen* aus S . Unser Ziel ist die Beantwortung der Frage, ob es einen größten Radius $r^*(S)$ oder $r_k(S)$ gibt, sodass das Bild aller Funktionen aus S eingeschränkt auf diesen Radius sternförmig mit Zentrum 0 oder konvex ist. Wir werden sehen, dass diese Radien existieren und wir werden sie explizit berechnen. Dabei wird $r_k(S) = 2 - \sqrt{3}$ bereits aus grundlegenden Eigenschaften der Familie S folgen. Das Ergebnis $r^*(S) = \tanh(\frac{\pi}{4})$ liegt wesentlich tiefer und benötigt die Anwendung der Löwner-Theorie.

Für die Herleitung der Löwner-Theorie werden wir den Jordanschen Kurvensatz benötigen, daher werden wir uns im zweiten Kapitel mit dem Beweis dieses Satzes beschäftigen. Dieser besagt, dass die Menge $\mathbb{C} \setminus |\gamma|$ für eine stetige, geschlossene und injektive Kurve γ exakt zwei offene, disjunkte und zusammenhängende Komponenten besitzt, wobei eine beschränkt und die andere unbeschränkt ist. Die Darstellung des zweiten Kapitels stützt sich dabei im Wesentlichen auf [Lor] und [Pom].

Im dritten Kapitel werden wir grundlegende Eigenschaften der Familie S herleiten. Außerdem werden wir uns mit der Löwner-Theorie für eine dichte Teilfamilie von sogenannten *Schlitzabbildungen* aus S beschäftigen. Dazu werden wir aus einer Schlitzabbildung f eine von dem Parameter t abhängige Funktion $f(z, t)$ für $t \in [0, \infty)$ und $z \in \mathbb{E}$ konstruieren, welche für festes t holomorph auf $\mathbb{E}$ ist. Für diese Funktionen werden wir die Gültigkeit der Differentialgleichung

$$\frac{\partial f(z, t)}{\partial t} = -f(z, t) \frac{1 + \kappa(t)f(z, t)}{1 - \kappa(t)f(z, t)} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{E}$$

zeigen, wobei $\kappa: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetig Funktion mit $|\kappa(t)| = 1$ für alle $t \in [0, \infty)$ ist. Unter Verwendung dieser Differentialgleichung zeigen wir, dass für alle $f \in S$ die folgende Abschätzung gilt

$$\left| \arg \frac{zf'(z)}{f(z)} \right| \leq \log \left[\frac{1 + |z|}{1 - |z|} \right] \quad \text{für alle } z \in \mathbb{E}.$$

Diese Abschätzung werden wir benötigen, um den Radius $r^*(S)$ zu berechnen. Die Ausführung der Eigenschaft der Klasse S und der Löwner-Theorie basiert dabei auf dem Vorgehen in [RS2] und [Dur].

Schließlich im vierten Kapitel werden wir analytische Charakterisierungen für sternförmige und konvexe Funktionen herleiten, mit denen wir weitere Eigenschaften und Abschätzungen der Familien S^* und S_k herleiten. Wir werden zeigen, dass eine Funktion $f \in S$ genau dann sternförmig ist, falls gilt

$$\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} > 0 \quad \text{für alle } z \in \mathbb{E}.$$

Entsprechend ist eine Funktion $f \in S$ genau dann konvex, falls gilt

$$\operatorname{Re} \left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right] > 0 \quad \text{für alle } z \in \mathbb{E}.$$

Mit diesen Charakterisierungen wird es uns möglich sein, die Radien explizit zu bestimmen. Die Thematisierung dieses Kapitels beruht dabei auf [Dur] und [GK].

Wir werden in dieser Arbeit den Inhalt einer gewöhnlichen Vorlesung der Funktionentheorie voraussetzen. Das entspricht dem Inhalt [RS1] und Kapitel 7 und 8 in [RS2]. Ausgehen von diesen Grundlagen werden wir nahezu alle der benötigten Aussagen herleiten und beweisen.

2. Jordanscher Kurvensatz

In diesem Kapitel werden wir den Jordanschen Kurvensatz mit Mitteln der Funktionentheorie beweisen. Dieser Satz besagt, dass eine stetige, injektive und geschlossene Kurve, welche wir später als *geschlossene Jordankurven* einführen werden, die euklidische Ebene in exakt zwei disjunkte Gebiete zerlegt, wobei genau ein Gebiet unbeschränkt ist. Dieser Satz wurde 1887 von seinem Namensgeber C. Jordan in [Jor] bewiesen.

Bevor wir uns dem Beweis des Jordanschen Kurvensatzes zuwenden, benötigen wir zunächst eine weitere Charakterisierung von Elementargebieten, welche wir auch in den folgenden Kapiteln benötigen werden. Wir werden zeigen, dass ein Gebiet G einfach zusammenhängend ist, falls $\overline{\mathbb{C}} \setminus G$ zusammenhängend ist.

Definition 2.1. Ein geschlossener Weg $\gamma: [0, 1] \rightarrow U$ heißt *nullhomolog* in einem Gebiet U , falls

$$n_\gamma(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{(\omega - z)} d\omega = 0$$

für alle $z \notin U$ gilt.

Lemma 2.2. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, sodass $\overline{\mathbb{C}} \setminus U$ zusammenhängend ist. Dann ist jeder geschlossene Weg γ in U nullhomolog.

Beweis. Sei $\gamma: [0, 1] \rightarrow U$ ein geschlossener Weg. Wir wissen, dass die Funktion $n_\gamma: \mathbb{C} \setminus |\gamma| \rightarrow \mathbb{Z}$ holomorph und lokal konstant ist. Da das Bild der Kurve $|\gamma| \subset \mathbb{C}$ kompakt ist, existiert ein $r > 0$ mit $|\gamma| \subset B_r(0)$. Sei $z_0 \in \mathbb{C} \setminus B_r(0)$ beliebig. Wir definieren

$$g: B_r(0) \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{1}{z - z_0}.$$

Die Funktion g ist holomorph auf $B_r(0)$, da z_0 nicht in $B_r(0)$ enthalten ist. Weiterhin ist γ ein geschlossener Weg und $B_r(0)$ ein Elementargebiet. Damit folgt

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma g(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{\omega - z_0} d\omega = n_\gamma(z_0).$$

Wir haben gezeigt, dass $n_\gamma(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus B_r(0)$ gilt. Folglich können wir n_γ in ∞ durch 0 stetig fortsetzen. Es sei $\tilde{n}_\gamma: \overline{\mathbb{C}} \setminus |\gamma| \rightarrow \mathbb{Z}$ die stetige Fortsetzung mit $\tilde{n}_\gamma(\infty) = 0$. Da $\overline{\mathbb{C}} \setminus |\gamma|$ die Menge $\overline{\mathbb{C}} \setminus U$ enthält, ist die Einschränkung der Funktion $\tilde{n}_\gamma|_{\overline{\mathbb{C}} \setminus U}$ wohldefiniert, stetig und lokal konstant. Nach Voraussetzung ist die Menge $\overline{\mathbb{C}} \setminus U$ zusammenhängend, daher erhalten wir $\tilde{n}_\gamma|_{\overline{\mathbb{C}} \setminus U} \equiv 0$. Damit haben wir $n_\gamma(z) = 0$ für alle $z \notin U$ gezeigt. $\square$

Lemma 2.3. Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f \in \mathcal{O}(U)$ und γ ein geschlossener Weg in U . Dann ist

$$h: U \setminus |\gamma| \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega$$

holomorph in $U \setminus |\gamma|$.

Beweis. Sei $z_0 \in U \setminus |\gamma|$ beliebig aber fest. Wir wählen $r > 0$ so klein, dass $B_r(z_0) \subseteq U \setminus |\gamma|$ gilt. Wir erhalten die Abschätzung $\frac{|z-z_0|}{|w-z_0|} < 1$ für alle $\omega \in |\gamma|$ und $z \in B_r(z_0)$. Für ein festes $z \in B_r(z_0)$ und alle $\omega \in |\gamma|$ gilt somit

$$\frac{f(\omega)}{\omega - z} = \frac{f(\omega)}{(\omega - z_0) - (z - z_0)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\omega)}{\omega - z_0} \left(\frac{z - z_0}{\omega - z_0} \right)^n.$$

Diese Potenzreihe ist in $z \in B_r(z_0)$ gleichmäßig konvergent, da $\frac{f(\omega)}{\omega - z_0}$ auf der kompakten Menge $|\gamma|$ beschränkt ist. Damit lässt sich h in $B_r(z_0)$ als konvergente Potenzreihe darstellen

$$2\pi i h(z) = \int_{\gamma} \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega = \int_{\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\omega)}{\omega - z_0} \left(\frac{z - z_0}{\omega - z_0} \right)^n d\omega = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{\gamma} \frac{f(\omega)}{(\omega - z_0)^{n+1}} d\omega \right) (z - z_0)^n.$$

Damit haben wir gezeigt, dass h lokal als Potenzreihe darstellbar ist. Damit ist h holomorph. $\square$

Lemma 2.4. Sei $r > 0$ und $z_0 \in \mathbb{C}$. Dann ist die Menge $\overline{\mathbb{C}} \setminus B_r(z_0)$ zusammenhängend.

Beweis. Sei $a, b \in \mathbb{C}$ beliebig und verschieden. Wir wissen, dass eine Menge $G \subseteq \mathbb{C}$ genau dann zusammenhängend ist, wenn G wegzusammenhängend ist. Wir müssen eine stetige Kurve konstruieren, welche die Punkte verbindet. Dazu betrachten wir die Geraden $[z_0, a]$ und $[z_0, b]$. Diese schneiden den Rand des Kreises $\partial B_r(z_0)$ und daraus konstruieren wir nun eine stetige Kurve, welche entlang der Geraden und dem Rand des Kreises verläuft und daher a und b verbindet. Nach Konstruktion liegt die Kurve vollständig in $\overline{\mathbb{C}} \setminus B_r(z_0)$. $\square$

Satz 2.5 (Homologieversion des CIS). Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und γ ein geschlossener und nullhomologer Weg in U . Dann gilt

$$(i) \quad n_{\gamma}(z)f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega \quad \text{für alle } z \in U \setminus |\gamma| \text{ und } f \in \mathcal{O}(U).$$

$$(ii) \quad \int_{\gamma} f(z) dz = 0 \quad \text{für alle } f \in \mathcal{O}(U).$$

Beweis. (i) Wir definieren

$$h: U \setminus |\gamma| \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega - n_{\gamma}(z)f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\omega) - f(z)}{\omega - z} d\omega.$$

Wir wissen nach Lemma 2.3, dass h holomorph in $U \setminus |\gamma|$ ist. Wir wollen zeigen, dass h nach ganz $\mathbb{C}$ holomorph fortsetzbar und wegen des Satzes von Liouville konstant 0 ist.

1. Schritt: Wir zeigen die Stetigkeit der Funktion

$$g: U \times U \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \begin{cases} \frac{f(\omega) - f(z)}{\omega - z} & , z \neq \omega \\ f'(\omega) & , z = \omega \end{cases}.$$

Sei $(\omega_0, z_0) \in U \times U$ beliebig aber fest. Wir werden nun zwischen 2 Fällen unterscheiden:

a) Es gilt $\omega_0 \neq z_0$. Da die Menge $\{(z, z) \mid z \in U\}$ abgeschlossen ist, existiert eine offene Menge $W \subset U \times U \setminus \{(z, z) \mid z \in U\}$ um (ω_0, z_0) . Damit ist $g(\omega, z)$ stetig in $(\omega_0, z_0) \in W$, denn es gilt

$$g(\omega, z) = \frac{f(\omega) - f(z)}{\omega - z} \quad \text{für alle } (\omega, z) \in W.$$

b) Es gilt $\omega_0 = z_0$. Wir wählen $\varepsilon > 0$ mit $D := B_\varepsilon(z_0) \subseteq U$. Aus der Konvexität von D folgt, dass die offene Menge $D \times D$ ebenfalls konvex ist und wir können damit folgern

$$f(\omega) - f(z) = \int_0^1 f'(z + t(\omega - z)) (\omega - z) dt \quad \text{für alle } (\omega, z) \in D \times D.$$

Das heißt, dass wir für alle $(\omega, z) \in D \times D$ mit $\omega \neq z$ die Darstellung

$$\int_0^1 f'(z + t(\omega - z)) dt = \frac{f(\omega) - f(z)}{\omega - z} = g(\omega, z)$$

erhalten. Für $\omega = z$ ergibt sich die Gleichung

$$\int_0^1 f'(z + t(\omega - z)) dt = f'(z) = g(\omega, z).$$

Damit haben wir einen geschlossenen Ausdruck für g gefunden, denn für alle $(\omega, z) \in D \times D$ gilt

$$g(\omega, z) = \begin{cases} \frac{f(\omega) - f(z)}{\omega - z} & , z \neq \omega \\ f'(\omega) & , z = \omega \end{cases} = \int_0^1 f'(z + t(\omega - z)) dt.$$

Mit Hilfe der Darstellung

$$g(\omega, z) - g(\omega_0, z_0) = \int_0^1 f'(z + t(\omega - z)) - f'(z_0) dt$$

und der Stetigkeit von f' folgt die Stetigkeit von g in (ω_0, z_0) . Somit ist g stetig auf $U \times U$.

2. Schritt: Die Funktion

$$h: U \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma g(\omega, z) d\omega$$

ist holomorph auf U . Dazu zeigen wir zunächst die Stetigkeit von h_1 . Aus der Analysis II [For] wissen wir, dass die Funktion $\psi: V \rightarrow \mathbb{R}$ mit $y \mapsto \int_a^b f(x, y) dx$ stetig ist, falls die Funktion

$f: [a, b] \times V \rightarrow \mathbb{R}$ für $V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $[a, b] \subset \mathbb{R}$ kompakt stetig ist. Diese Eigenschaft lässt sich auf komplexe Integrale übertragen. Wir folgern mit dieser Überlegung die Stetigkeit von h_1 , denn es gilt

$$h_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} g(\omega, z) d\omega = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \underbrace{g(\gamma(t), z) \gamma'(t)}_{=: G(t, z)} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 G(t, z) dt.$$

Da $\gamma'(t)$ stückweise stetig ist, erhalten wir nach Aufteilung des Integrals die Stetigkeit von G und daher folgt die Stetigkeit von h_1 . Wir zeigen nun die Holomorphie von h_1 . Nach dem Satz von Morera genügt es zu zeigen, dass für alle kompakten Dreiecke $\Delta \subset U$ das Integral $\int_{\partial\Delta} h_1(\zeta) d\zeta$ verschwindet. Sei dazu $\Delta \subset U$ kompakt, dann gilt

$$\int_{\partial\Delta} h_1(\zeta) d\zeta = \int_{\partial\Delta} \int_{\gamma} g(\omega, \zeta) d\omega d\zeta \stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{\gamma} \int_{\partial\Delta} g(\omega, \zeta) d\zeta d\omega.$$

Für festes $\omega \in U$ ist Funktion

$$g(\omega, \cdot): U \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \begin{cases} \frac{f(\omega) - f(z)}{\omega - z}, & z \neq \omega \\ f'(\omega), & z = \omega \end{cases}$$

holomorph in U . Damit gilt

$$\int_{\partial\Delta} g(\omega, \zeta) d\zeta = 0 \quad \text{für alle } \omega \in U$$

und es folgt die Holomorphie von h_1 in U wegen

$$\int_{\partial\Delta} h_1(\zeta) d\zeta = \int_{\gamma} \int_{\partial\Delta} g(\omega, \zeta) d\zeta d\omega = \int_{\gamma} 0 d\omega = 0.$$

3. Schritt: Die Funktion h_1 ist die holomorphe Fortsetzung von h . Sei $z_0 \in U \setminus |\gamma|$ beliebig aber fest. Durch einsetzen erhalten wir

$$h_1(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} g(\omega, z_0) d\omega \stackrel{\omega \neq z_0}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\omega) - f(z_0)}{\omega - z_0} d\omega = h(z_0).$$

Also ist h_1 die holomorphe Fortsetzung von h auf U .

4. Schritt: Die Funktion h_1 lässt sich auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph fortsetzen. Wir definieren die Menge $V := \{z \in \mathbb{C} \setminus |\gamma| \mid n_{\gamma}(z) = 0\}$. Die Menge V ist offen, da die Funktion n_{γ} lokal konstant ist. Weiterhin enthält V das Komplement von U , da γ nach Voraussetzung nullhomolog in U ist. Es folgt $\mathbb{C} = U \cup V$. Wir definieren die Funktion

$$h_2: V \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega.$$

Wegen $V \cap |\gamma| = \emptyset$ folgt aus Lemma 2.3 die Holomorphie von h_2 in V . Es stimmen h_1 und h_2 auf $U \cap V$ überein, denn für $z_0 \in U \cap V$ erhalten wir

$$h_1(z_0) \stackrel{z_0 \notin |\gamma|}{=} h(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\omega)}{\omega - z_0} d\omega - n_{\gamma}(z_0)f(z_0) \stackrel{z_0 \in V}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\omega)}{\omega - z_0} d\omega - 0 = h_2(z_0).$$

Wir definieren die Funktion

$$H: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \begin{cases} h_1(z) & , z \in U \\ h_2(z) & , z \in V \setminus U \end{cases},$$

welche nach unseren vorherigen Betrachtungen wohldefiniert und die holomorphe Fortsetzung von h auf $\mathbb{C}$ ist.

5. Schritt: Die Funktion H ist konstant 0. Wir wählen $M > 0$, sodass der Weg γ vollständig in der Scheibe $B_M(0)$ liegt. Da die Menge $\overline{\mathbb{C}} \setminus B_M(0)$ zusammenhängend ist, ist γ nach Lemma 2.2 nullhomolog in $B_M(0)$. Daher gilt $n_{\gamma}(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{B_M(0)}$. Damit erhalten wir für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{B_M(0)}$

$$|H(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega \right| \leq \max_{\omega \in |\gamma|} |f(\omega)| \frac{L(\gamma)}{2\pi} \frac{1}{|z| - M}.$$

Es ist $C := \max_{\omega \in |\gamma|} |f(\omega)| \frac{L(\gamma)}{2\pi}$ konstant. Sei nun $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = \infty$. Für diese Folge erhalten wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |H(z_n)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} C \frac{1}{|z_n| - M} = 0.$$

Also ist H beschränkt und nach Liouville konstant. Weiterhin ist H konstant 0, denn es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} |H(z_n)| = 0$. Wir haben insbesondere $H|_U = h \equiv 0$ und daher die Behauptung bewiesen.

(ii) Seien $f \in \mathcal{O}(U)$ und $z_0 \in \mathbb{C} \setminus U$ beliebig. Wir definieren die Funktion $g: U \rightarrow \mathbb{C}$ durch $z \mapsto f(z)(z - z_0)$. Es ist g holomorph auf U und $n_{\gamma}(z_0) = 0$, da γ nullhomolog in U ist. Mit (i) dieses Satzes folgt die Behauptung

$$0 = n_{\gamma}(z_0)g(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(\omega)}{\omega - z_0} d\omega = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\omega) d\omega.$$

□

Proposition 2.6. *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $\overline{\mathbb{C}} \setminus G$ zusammenhängend. Dann ist G einfach zusammenhängend.*

Beweis. Mit Lemma 2.2 erhalten wir, dass jeder geschlossene Weg γ in G nullhomolog ist. Aus Satz 2.5 folgt, dass für alle geschlossenen Wege σ in G und alle $f \in \mathcal{O}(G)$ das Integral $\int_{\sigma} f(z) dz$ verschwindet. Das heißt, dass für alle $f \in \mathcal{O}(G)$ eine Stammfunktion in G existiert. Somit ist G ein Elementargebiet und insbesondere einfach zusammenhängend. □

Bemerkung 2.7. Wir haben zuvor gezeigt, dass G einfach zusammenhängend ist, falls $\overline{\mathbb{C}} \setminus G$ zusammenhängend ist. Es gilt hier sogar die Äquivalenz [FB1]. Wir werden die Umkehrung allerdings nicht im Allgemeinen benötigen, denn uns genügt der bereits erwähnte Fall in Lemma 2.4 für Kreisscheiben.

Wir wollen dieses Ergebnis nun nutzen, um zu zeigen, dass sämtliche Komponenten von $\mathbb{C} \setminus |\gamma|$ einfach zusammenhängend sind, wobei γ eine stetige Kurve mit 0 als Anfangspunkt und ∞ als Endpunkt ist. Diese Aussage werden wir benötigen, um den Satz von Janiszewski zu beweisen, welcher eine wichtige Rolle im Beweis des Jordanschen Kurvensatzes spielen wird.

Lemma 2.8. *Sei $\emptyset \neq A \subsetneq \mathbb{C}$ abgeschlossen und $p \in \mathbb{C} \setminus A$. Dann gibt es eine stetige Kurve $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ mit folgenden Eigenschaften:*

- (i) *Die Kurve besitzt den Anfangspunkt $\gamma(0) = p$ und einen Endpunkt $\gamma(1)$ in A .*
- (ii) *Die Kurve verläuft bis auf ihren Endpunkt vollständig im Komplement von A , das heißt $\gamma([0, 1)) \subseteq \mathbb{C} \setminus A$.*

Beweis. Sei $\tau: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ eine beliebige stetige Kurve mit $\tau(0) = p$ und $\tau(1) \in A$. Wir definieren

$$\alpha := \inf \{ \tau(z)^{-1} \mid z \in |\tau| \cap A \} \in [0, 1].$$

Da die Menge $\tau(A)^{-1}$ kompakt ist, wird das Infimum angenommen und es ist $\alpha > 0$, da der Punkt p nicht in A liegt. Damit ist $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) = \tau(\alpha t)$ eine gesuchte Kurve. $\square$

Lemma 2.9. *Sei $\gamma: [0, 1] \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ stetig mit $\gamma(0) = 0$ und $\gamma(1) = \infty$. Weiter sei $\overline{\mathbb{C}} \setminus |\gamma| = \dot{\bigcup}_{j \in J} A_j$ die Zerlegung von $\overline{\mathbb{C}} \setminus |\gamma|$ in offene und zusammenhängende Komponenten. Dann gilt*

- (i) *für alle $j \in J$ und $p \in A_j$ existiert eine stetige Kurve $\tau_j: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\tau_j(0) = p$, $\tau_j(1) \in |\gamma|$ und $\tau_j([0, 1)) \subset A_j$. Das heißt $\tau|_{[0, 1)}$ liegt in A_j und verbindet p mit der Kurve γ ,*
- (ii) *für alle $j \in J$ ist A_j einfach zusammenhängend.*

Beweis. (i) Seien $j \in J$ und $p \in A_j$ beliebig aber fest. Es ist $|\gamma| \setminus \{\infty\}$ abgeschlossen in $\mathbb{C}$, da $|\gamma| \subset \overline{\mathbb{C}}$ abgeschlossen ist. Wir wenden nun Lemma 2.8 auf die abgeschlossene Menge $|\gamma| \setminus \{\infty\}$ und den Punkt $p \in A_j \subset \mathbb{C} \setminus |\gamma|$ an. Das heißt es existiert eine stetige Kurve $\tau_j: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ mit Anfangspunkt $\tau_j(0) = p$, Endpunkt $\tau_j(1) \in |\gamma|$ und $\tau_j([0, 1)) \subset \mathbb{C} \setminus |\gamma|$. Wir nehmen an, es gilt $\tau_j([0, 1)) \not\subset A_j$. Dann existiert ein $q \in \tau_j([0, 1))$ mit $q \in \mathbb{C} \setminus (|\gamma| \cup A_j)$. Also liegt q in einer der anderen Komponenten. Das heißt, es gilt $q \in A_i$ für ein $i \neq j$. Da A_j und A_i wegzusammenhängende Komponenten sind, folgt $A_i = A_j$, denn τ_j ist eine stetige Kurve, welche $p \in A_j$ und $q \in A_i$ verbindet. Damit folgt der Widerspruch zu $i \neq j$ und die Annahme ist falsch und wir erhalten $\tau_j([0, 1)) \subset A_j$. Damit ist τ_j eine gesuchte Kurve.

(ii) Wir zeigen zunächst, dass für alle $k \in J$ die Menge $\overline{\mathbb{C}} \setminus A_k$ zusammenhängend ist und folgern anschließend, dass die A_k einfach zusammenhängend ist. Seien $p, q \in \overline{\mathbb{C}} \setminus A_k$ beliebig. Unser Ziel ist es eine stetige Kurve zu konstruieren, die p und q verbindet.

Wegen $\overline{\mathbb{C}} \setminus A_k = \bigcup_{j \neq k} A_j \dot{\cup} |\gamma|$ erhalten wir 4 Fälle:

- 1.) Falls $p, q \in |\gamma|$ gilt, dann ist γ selbst eine gesuchte Kurve.
- 2.) Falls $p, q \in A_i$ für ein $i \in J$ gilt, dann existiert eine stetige Kurve, da A_i nach Voraussetzung wegzusammenhängend ist.
- 3.) Falls $p \in |\gamma|$ und $q \in A_i$ für ein $i \in J$ gilt, so erhalten wir eine gesuchte Kurve, indem wir γ mit der in (i) konstruierte Kurve τ_i verknüpfen.
- 4.) Falls $p \in A_i$ und $q \in A_l$ für $i, l \in J$ mit $i \neq l$ gilt, so erhalten wir eine gesuchte Kurve, indem wir γ mit den in (i) konstruierten Kurven τ_l, τ_i verknüpfen.

Insgesamt haben wir damit gezeigt, dass $\overline{\mathbb{C}} \setminus A_k$ zusammenhängend ist. Weiterhin ist A_k ein Gebiet, da es offen und zusammenhängend ist. Mit Proposition 2.6 folgt, dass A_k einfach zusammenhängend ist. $\square$

Definition 2.10. Seien $A \subset \overline{\mathbb{C}}$ und $a, b \in \overline{\mathbb{C}} \setminus A$. Es heißen a und b von A *separiert*, falls $|\gamma| \cap A \neq \emptyset$ für alle stetigen Kurven $\gamma: [0, 1] \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ mit $\gamma(0) = a$ und $\gamma(1) = b$ gilt.

Satz 2.11 (Satz von Janiszewski). *Seien $A_1, A_2 \subset \overline{\mathbb{C}}$ abgeschlossen, $A_1 \cap A_2$ zusammenhängend und $a, b \in \overline{\mathbb{C}} \setminus (A_1 \cup A_2)$, sodass a und b weder von A_1 noch A_2 separiert werden. Dann werden a und b nicht von $A_1 \cup A_2$ separiert.*

Beweis. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass $a = 0$ und $b = \infty$ gilt, denn sonst betrachten wir die Koordinatentransformation $z \mapsto \frac{z-a}{z-b}$. Folglich sind wegen $\infty \notin A_1, A_2$ die Mengen A_1 und A_2 kompakt in $\mathbb{C}$. Nach Voraussetzung werden 0 und ∞ weder von A_1 noch A_2 separiert. Somit existieren stetige Kurven $\Gamma_j: [0, 1] \rightarrow \overline{\mathbb{C}} \setminus A_j$ mit $\Gamma_j(0) = 0$ und $\Gamma_j(1) = \infty$ für $j = 1, 2$. Nach Lemma 2.9 sind alle zusammenhängenden Komponenten von $\overline{\mathbb{C}} \setminus |\Gamma_j|$ einfach zusammenhängend und in keiner dieser Komponenten liegt 0 oder ∞ . Demnach existieren holomorphe Logarithmen f_j auf $\mathbb{C} \setminus |\Gamma_j|$ mit $\exp(f_j(z)) = z$. Die Menge $A_1 \cap A_2$ ist zusammenhängend und liegt daher in genau einer Komponente $L \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus (|\Gamma_1| \cup |\Gamma_2|)$. Wir wählen die Zweige der Logarithmusfunktionen f_j , sodass sie auf L übereinstimmen. Das heißt, es gilt $f_1(z) = f_2(z)$ für alle $z \in L$. (Sollte $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ gelten, wählen wir eine beliebige Komponente.) Die Menge $A_j \setminus L$ ist kompakt, da L offen und A_j kompakt ist. Der Schnitt von $A_1 \setminus L$ und $A_2 \setminus L$ ist leer, denn aus $A_1 \cap A_2 \subset L$ folgt $(A_1 \setminus L) \cap (A_2 \setminus L) = (A_1 \cap A_2) \setminus L = \emptyset$. Daher finden wir offene Mengen $V_j \subset \mathbb{C}$ mit $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ und $A_j \setminus L \subset V_j \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus |\Gamma_j|$ für $j = 1, 2$.

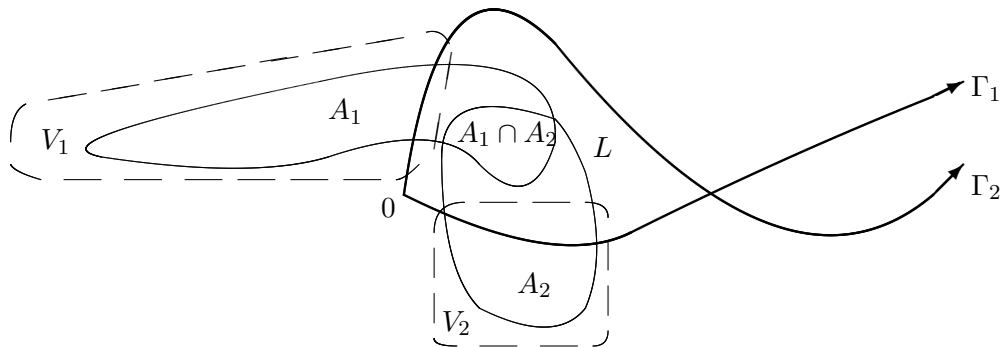


Abbildung 2.1

Wir definieren auf $M := V_1 \cup V_2 \cup L$ die Funktion

$$f: M \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) := \begin{cases} f_j(z) & , z \in V_j \\ f_1(z) = f_2(z) & , z \in L \end{cases}.$$

Es ist f auf $M \subset \mathbb{C}$ wohldefiniert und holomorph. Nach unserer Konstruktion gilt $\exp(f(z)) = z$ und daher ist $f'(z) = \frac{1}{z}$ holomorph auf M und besitzt die holomorphe Stammfunktion f .

Wir nehmen nun an, es werden 0 und ∞ von $A_1 \cup A_2$ separiert. Es sei $G \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus (A_1 \cap A_2)$ die offene und zusammenhängende Komponente, welche 0 enthält. Dann ist G beschränkt, denn sonst wäre 0 und ∞ nicht separiert. Nach Konstruktion liegt ∂G im inneren der von M , da $\partial G \subset \partial(A_1 \cup A_2) \subset V_1 \cup V_2 \cup L = M$ gilt. Wir wollen zeigen, dass ein $\delta > 0$ existiert, sodass der kleinste Abstand zum Rand größer als δ ist, das heißt $\delta < d(\partial M, \partial G) = \inf \{ |x - y| \mid x \in \partial M, y \in \partial G \}$. Angenommen es gilt $0 = d(\partial M, \partial G)$, das heißt es existiert für alle $\varepsilon_n := \frac{1}{n} > 0$ ein $p_n \in \partial G$, sodass $B_{\frac{1}{n}}(p_n) \cap \partial M \neq \emptyset$ gilt. Die Folge $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ liegt in der kompakten Menge ∂G , daher existiert eine konvergente Teilfolge $(p_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit Grenzwert $p \in \partial G \subset M$. Wir wählen für alle $k \in \mathbb{N}$ Punkte $a_{n_k} \in B_{\frac{1}{n_k}}(p_{n_k}) \cap \partial M$. Wegen $|a_{n_k} - p_{n_k}| \leq \frac{1}{n_k}$ besitzt die Folge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ ebenfalls den Grenzwert p . Da ∂M abgeschlossen ist, folgt $p \in \partial M$ und, da M offen ist, folgt insbesondere $p \notin M$. Das ist ein Widerspruch da $p \in \partial G \subset M$ gilt. Folglich können wir ein $0 < \delta < d(\partial M, \partial G)$ wählen und überdecken G mit Quadraten $(Q_i)_{i \in I}$ der Länge δ , sodass $0 \in Q_1$ Mittelpunkt ist und benachbarte Quadrate mit gemeinsamen Rand eine entgegengesetzte Orientierung besitzen. Wegen der Beschränktheit von G genügen endlich viele Quadrate $I = \{1, \dots, n\}$. Wir definieren den geschlossenen Weg $C = Q_1 + \dots + Q_n$.

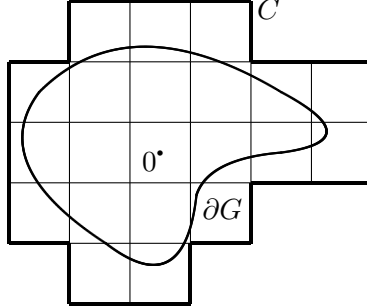


Abbildung 2.2

Nach Konstruktion verläuft die Kurve C in M . Es gilt für die Windungszahl

$$n_C(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{\omega} d\omega = \frac{1}{2\pi i} \sum_{i=1}^n \int_{Q_i} \frac{1}{\omega} d\omega = \sum_{i=1}^n n_{Q_i}(0) = 1,$$

da $0 \notin Q_i$ und somit $n_{Q_i}(0) = 0$ für $i \neq 1$ gilt. Wegen $|C| \subset M$ folgt aber auch

$$n_C(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{\omega} d\omega = \frac{1}{2\pi i} \int_C f'(\omega) d\omega = 0,$$

da f' holomorph auf M ist und dort die holomorphe Stammfunktion f besitzt. Dies ist ein Widerspruch. Also werden 0 und ∞ nicht von $A_1 \cup A_2$ separiert. $\square$

Definition 2.12. Eine stetige Kurve $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ heißt

- (i) *offene Jordankurve*, falls γ injektiv ist. Mit anderen Worten ist γ homöomorph zu $[0, 1]$.
- (ii) *geschlossene Jordankurve*, falls $\gamma|_{[0,1]}$ injektiv ist und $\gamma(0) = \gamma(1)$ gilt. Mit anderen Worten ist γ homöomorph zu S^1 .

Lemma 2.13. Sei $\gamma: [0, 1] \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ eine stetige und injektive Kurve. Dann ist $\overline{\mathbb{C}} \setminus |\gamma|$ zusammenhängend.

Beweis. Wir können nach geeigneter Koordinatentransformation annehmen, dass $\infty \notin |\gamma|$ gilt. Folglich ist $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ eine offene Jordankurve und daher ist $|\gamma|$ kompakt in $\mathbb{C}$. Es genügt zu zeigen, dass kein Punkt $a \in \mathbb{C} \setminus |\gamma|$ von ∞ separiert wird. Es ist $d(a, |\gamma|) > 0$, da $|\gamma|$ kompakt ist und der Punkt a nicht auf der Kurve γ liegt. Wir wählen $0 < r < d(a, |\gamma|)$ und konstruieren damit eine offene Überdeckung von $|\gamma|$. Es liegt a nach Konstruktion nicht in $\bigcup_{x \in [0,1]} B_r(\gamma(x))$. Da die Menge $|\gamma|$ kompakt ist, genügen endlich viele offene Scheiben $B_r(\gamma(t_i))$ mit $i = 1, \dots, n$, sodass $|\gamma|$ in der Vereinigung $\bigcup_{i=1}^n B_r(\gamma(t_i))$ enthalten ist. Wir nehmen ohne Einschränkung $t_1 < \dots < t_n$ an und konstruieren eine Zerlegung von $[0, 1]$ in n Intervalle $[s_i, s_{i+1}]$, wobei wir s_i so wählen, dass $s_0 = 0$, $s_n = 1$ sowie $s_i \in B_r(\gamma(t_{i-1})) \cap B_r(\gamma(t_i))$ für $i = 1, \dots, n-1$ gilt. Das heißt wir erhalten die Kurvenstücke $\gamma_i := \gamma|_{[s_{i-1}, s_i]}$ für alle $i = 1, \dots, n$. Sei nun $j \in \{1, \dots, n\}$ beliebig. Da die Punkte a und ∞ in der zusammenhängenden Menge $\overline{\mathbb{C}} \setminus B_r(\gamma(t_j))$ liegen, werden sie nicht von $B_r(\gamma(t_j))$ separiert. Wegen $|\gamma_j| \subset B_r(\gamma(t_j))$ gilt dies insbesondere auch für $|\gamma_j|$. Somit separiert keine der kompakten Mengen $|\gamma_i|$ die Punkte a und ∞ für alle $i = 1, \dots, n$.

Wir führen eine Induktion über die Anzahl der Intervalle und wenden Satz 2.11 an: Im Fall von $m = 1$ wissen wir nach vorheriger Betrachtung, dass $|\gamma_1|$ die Punkte a und ∞ nicht separiert. Für den Induktionsschritt von m nach $m+1$ definieren wir $\Gamma := \gamma_1 + \dots + \gamma_m$. Es werden a und ∞ nicht von $|\gamma_{m+1}|$ und nach Induktionsvoraussetzung nicht von $|\Gamma|$ separiert. Es sind $|\Gamma|$ und $|\gamma_{m+1}|$ kompakt und nach Konstruktion ist $|\Gamma| \cap |\gamma_{m+1}| = \{\gamma(s_k)\}$ zusammenhängend. Mit dem Satz von Janiszewski 2.11 folgt, dass die Menge $|\Gamma| \cup |\gamma_{m+1}| = |\gamma_1| \cup \dots \cup |\gamma_{m+1}| = |\gamma_1 + \dots + \gamma_{m+1}|$ die Punkte a und ∞ nicht separiert. Da n nach vorheriger Überlegung endlich ist, haben wir gezeigt, dass a und ∞ nicht von $|\gamma|$ separiert werden. Somit ist $\overline{\mathbb{C}} \setminus |\gamma|$ zusammenhängend. $\square$

Bemerkung 2.14. Aus dem vorherigem Lemma folgt unmittelbar, dass für eine offene Jordankurve $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ die Menge $\mathbb{C} \setminus |\gamma|$ zusammenhängend ist.

Lemma 2.15. Sei $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ eine geschlossene Jordankurve. Dann gilt $\partial S = |\gamma|$ für jede zusammenhängende Komponente $\emptyset \neq S \subset \mathbb{C} \setminus |\gamma|$.

Beweis. Wir zeigen zunächst $\partial S \subseteq |\gamma|$. Sei $z_0 \in \partial S$ und da S offen ist, folgt $z_0 \notin S$ und damit $z_0 \in \mathbb{C} \setminus S$. Wir wollen zeigen, dass z_0 auf $|\gamma|$ liegt. Dazu nehmen wir an, es gelte $z_0 \notin |\gamma|$. Das heißt es existiert eine Komponente $T \subset \mathbb{C} \setminus |\gamma|$ mit $z_0 \in T$. Da T offen ist, existiert eine offene und zusammenhängende Umgebung um z_0 mit $U \subset T$. Da z_0 auf dem Rand von S liegt, existiert eine Folge $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\omega_n \in S$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = z_0$. Aufgrund der Konvergenz existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq N$ die Punkte ω_n in der offenen Menge U liegen. Damit folgt $S = T$, da U sowohl Punkte aus S als auch Punkte aus T enthält und zusammenhängend ist. Das heißt aber, dass jeder Randpunkt auch im inneren von S liegt. Also folgt $S = \emptyset$ und damit erhalten wir den Widerspruch, da $\emptyset \subsetneq S \subset \mathbb{C} \setminus |\gamma|$ gilt.

Wir zeigen nun $\partial S \supseteq |\gamma|$. Sei $z_0 \in |\gamma|$. Wir definieren für $n \in \mathbb{N}$ eine Folge von zusammenhängenden Kurvensegmente. Genauer definieren wir das Segment $|J'_n| \subset |J| \cap B_{\frac{1}{n}}(z_0)$, welches z_0 enthält und dessen Komplement $|J''_n| := |J| \setminus |J'_n|$. Sei $N \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $|J''_n| \subsetneq |J|$ gilt. Dann ist J''_n eine offene Jordankurve. Mit Lemma ?? ist $\mathbb{C} \setminus J''_n$ zusammenhängend für alle $n \geq N$. Sei $a \in S$ beliebig, dann existieren für $n \geq N$ stetige Kurven $\Gamma_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\Gamma_n(0) = a$ und $\Gamma_n(1) = z_0$, da a und z_0 in der zusammenhängende Menge $\mathbb{C} \setminus J''_n$ liegen. Außerdem existiert ein $M \in \mathbb{N}$ mit $M \geq N$, sodass $a \notin B_{\frac{1}{n}}(z_0)$ für alle $n \geq M$ gilt, da $\mathbb{C}$ hausdorffsch ist. Wir definieren für $n \geq M$ den ersten Schnittpunkt ω_n von $|\Gamma_n|$ und $\partial B_{\frac{1}{n}}(z_0)$. Es gilt $\omega_n \in S$, denn die Kurve $|\Gamma_n|$ schneidet zwischen a und ω_n weder J''_n (nach Konstruktion) noch J'_n , da J'_n im inneren von $B_{\frac{1}{n}}(z_0)$ und ω_n auf dem Rand von $B_{\frac{1}{n}}(z_0)$ liegt. Das heißt wir haben eine Folge $(\omega_n)_{n \geq M}$ mit $\omega_n \in S$ und diese konvergiert wegen $|z_0 - \omega_n| = \frac{1}{n}$ für alle $n \geq M$ gegen z_0 . Es folgt $z_0 \in \partial S$. $\square$

Bemerkung 2.16 (Seen des Wada). Nach diesem Lemma ist es sinnvoll zu erwähnen, dass es ein kontraintuitives Konstruktionsverfahren *Seen des Wada* benannt nach Takeo Wada in [Yon] gibt, mit dem man drei offene, zusammenhängende und disjunkte Menge mit gleichem Rand konstruieren kann. Daher können wir nicht aus dem vorherigen Lemma 2.15 den Jordanschen Kurvensatz folgern. Umgekehrt wird aus dem Jordanschen Kurvensatz somit folgen, dass der Rand der Seen des Wada keine geschlossene Jordankurve sein kann.

Lemma 2.17. Sei $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ eine geschlossene Jordankurve $J = |\gamma|$ mit geradem Kurvensegment $[-c, c]$. Dann existiert ein $r > 0$, sodass $B_r(0) \cap J = (-r, r)$ gilt.

Beweis. Wir parametrisieren die Kurve γ (ohne Berücksichtigung der Orientierung), sodass $\gamma([0, \frac{1}{2}]) = [-c, c]$, $\gamma(0) = \gamma(1) = -c$ und $\gamma(\frac{1}{4}) = 0$ gilt. Wir wissen nach Voraussetzung, dass für $0 < r < c$ die Menge $(-r, r)$ in $B_r(0) \cap J$ enthalten ist. Wir nehmen an, dass $(-r, r) \subsetneq B_r(0) \cap J$ für alle $r > 0$ gilt. Das heißt, dass für alle $r_n := \frac{1}{n} > 0$ ein $t_n \in [\frac{1}{2}, 1]$ mit $\gamma(t_n) \in B_r(0) \setminus (-c, c)$ existiert. Da $[\frac{1}{2}, 1]$ kompakt ist, existiert eine konvergente Teilfolge t_{n_k} mit Grenzwert $s \in [\frac{1}{2}, 1]$. Aus der Stetigkeit von γ folgt, dass $\gamma(s) = 0$ ist. Wegen $\gamma(1) = -c \neq 0$ ist $s \neq 1$. Insgesamt erhalten wir einen Widerspruch, da $\gamma|_{[0, 1]}$ injektiv ist, aber $\gamma(\frac{1}{4}) = \gamma(s)$ gilt. Also ist die Annahme falsch und es folgt die Behauptung. $\square$

Wir haben nun alle Vorbereitungen getroffen um den Jordanschen Kurvensatz zu beweisen.

Satz 2.18 (Jordanscher Kurvensatz). Sei $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ eine geschlossene Jordankurve. Dann besitzt $\mathbb{C} \setminus |\gamma|$ genau zwei Komponenten.

Beweis. Schritt 1: Wir betrachten zunächst den Fall, dass wir eine geschlossene Jordankurve mit einem geraden Kurvensegment S haben.

Wir zeigen zunächst, dass $\mathbb{C} \setminus |\gamma|$ höchstens zwei Komponenten besitzt. Wir können nach Drehung und Translation der Ebene ohne Einschränkung annehmen, dass $[-c, c] = S \subset \mathbb{R}$ gilt. Nach Lemma 2.17 wissen wir, es existiert ein $r > 0$ und $B_r := B_r(0)$, sodass für $B_r \cap |\gamma| = (-r, r)$ gilt. Wir definieren $B_r^+ = \{z \in B_r \mid \text{Im}(z) > 0\}$ und $B_r^- = \{z \in B_r \mid \text{Im}(z) < 0\}$. Es ist $0 \in |\gamma|$ und nach Lemma 2.15 wissen wir, dass 0 Randpunkt jeder Komponente von $\mathbb{C} \setminus |\gamma|$ ist. Also besitzt jede Komponente eine gegen 0 konvergente Folge und somit Punkte in B_r . Da $(-r, r) \subset |\gamma|$ gilt,

besitzt jede Komponente gemeinsame Punkte mit B_r^+ oder B_r^- . Wegen der Konvexität von B_r^+ und B_r^- sind sie insbesondere zusammenhängend. Folglich muss jede Komponente ganz B_r^+ oder B_r^- enthalten. Also kann es höchstens zwei Komponenten geben.

Wir werden zeigen, dass es mindestens zwei Komponenten gibt. Dazu nehmen wir an, es gäbe nur eine Komponente, das heißt $\mathbb{C} \setminus |\gamma|$ ist zusammenhängend. Seien $z_1 \in B_r^+$ und $z_2 \in B_r^-$ beliebig. Die Punkte z_1 und z_2 werden nach Annahme nicht von $|\gamma|$ separiert. Außerdem separiert die Menge $\partial B_r \cup |\gamma| \setminus (-r, r)$ die Punkte nicht, denn die konvexe Menge B_r liegt im Komplement und die Punkte z_1 und z_2 befinden sich in B_r . Weiterhin ist der Schnitt der Mengen $|\gamma| \cap (\partial B_r \cup |\gamma| \setminus (-r, r)) = |\gamma| \setminus (-r, r)$ zusammenhängend. Mit dem Satz von Janiszewski 2.11 folgt, dass z_1 und z_2 nicht von $|\gamma| \cup (\partial B_r \cup |\gamma| \setminus (-r, r)) = |\gamma| \cup \partial B_r$ separiert werden. Wir zeigen, dass die Menge $J \cup \partial B_r$ die Punkte separiert. Dazu betrachten wir die Teilmenge $[-r, r] \cup \partial B_r$. Diese Menge separiert bereits die Punkte z_1 und z_2 , denn es gilt $\mathbb{C} \setminus ([-r, r] \cup \partial B_r) = B_r^+ \dot{\cup} B_r^- \dot{\cup} (\mathbb{C} \setminus \overline{B_r})$, wobei z_1 in B_r^+ und z_2 in B_r^- liegt. Das heißt es werden z_1 und z_2 doch separiert und wir erhalten den Widerspruch. Also gibt es genau zwei Komponenten, falls J ein gerades Kurvensegment enthält.

Schritt 2: Wir konstruieren aus einer geschlossenen Jordankurve γ ohne geradem Kurvensegment eine geschlossene Jordankurve J , die ein gerades Kurvensegment besitzt. Dazu seien $a, b \in |\gamma|$ beliebig mit $a \neq b$. Wir definieren $\tilde{I} := \{(1-t)a + tb \mid t \in [0, 1]\}$. Nach geeigneter Drehung und Translation von γ können wir ohne Einschränkung $\tilde{I} = [a, b] \subset \mathbb{R}$ annehmen. Es gilt $[a, b] \subsetneq |\gamma|$, da γ kein gerades Kurvensegment besitzt. Das heißt es existiert ein $x \in \tilde{I} \setminus |\gamma|$ und wir nehmen ohne Einschränkung an, dass $x = 0$ gilt. Da 0 in der offenen Menge $\mathbb{C} \setminus |\gamma|$ liegt, existiert ein $\varepsilon > 0$, sodass $B_\varepsilon(0) \subset \mathbb{C} \setminus |\gamma|$ und folglich $B_\varepsilon(0) \cap [a, b] = (-\varepsilon, \varepsilon)$ gilt. Wir werden das Intervall ausdehnen, sodass nur die Randpunkte auf γ liegen. Dazu definieren wir $\alpha := \inf \{z \in [a, b] \mid (z, 0) \subset \mathbb{C} \setminus |\gamma|\}$ und $\beta := \sup \{z \in [a, b] \mid [0, z] \subset \mathbb{C} \setminus |\gamma|\}$. Wegen $a \leq \alpha \leq -\varepsilon$ und $\varepsilon \leq \beta \leq b$, existieren α und β . Somit erhalten wir das gerade Kurvenstück $|S| = [\alpha, \beta]$ mit $\alpha, \beta \in |\gamma|$ und $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{C} \setminus |\gamma|$. Wir parametrisieren S , sodass die Kurve von β nach α verläuft und definieren die Kurvensegmente J' , welches von α nach β entlang γ verläuft, und J'' , welches von β nach α entlang γ verläuft. Durch das Verknüpfen von J' und S erhalten wir eine neue geschlossene Jordankurve $J = J' + S$ mit geradem Kurvensegment.

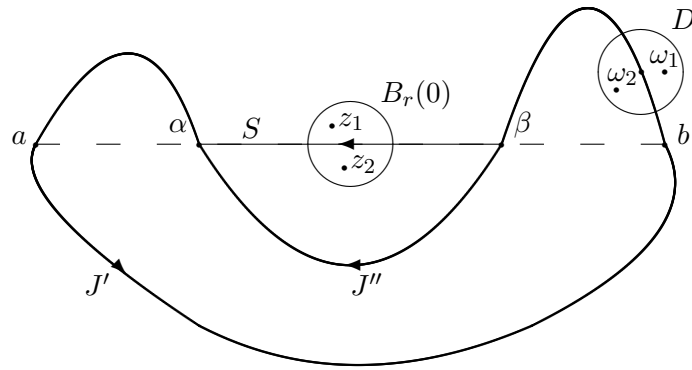


Abbildung 2.3

Schritt 3: Wir werden nun zeigen, dass $\mathbb{C} \setminus |\gamma|$ genau zwei Komponenten besitzt.

Nach Schritt 1 müssen wir den Fall betrachten, falls γ kein gerades Kurvensegment hat. Wir benutzen die in Schritt 2 konstruierte Kurve J . Es seien G_1 und G_2 die zwei Komponenten von $\mathbb{C} \setminus |J|$ aus Schritt 1. Wir wählen einen Punkt $z_0 \in |\gamma| \setminus (|S| \cup |J''|) = |J'|$. Dann gibt es ein $\tilde{r} > 0$ mit $D := B_{\tilde{r}}(z_0)$, sodass $D \cap (|S| \cup |J''|) = \emptyset$ gilt. Die Existenz von $\tilde{r}$ erhalten wir wie in Lemma 2.17, indem wir eine Folge konstruieren und über die Stetigkeit von γ einen Widerspruch zur Injektivität oder zur Wahl von α und β als Infimum und Supremum erhalten. Da $z_0 \in |J'| \subset |J|$ gilt, enthält D Punkte von G_1 und G_2 . Das heißt es gibt zwei Punkte $\omega_1 \in D \cap G_1$ und $\omega_2 \in D \cap G_2$, welche von $|J|$ separiert werden.

Wir nehmen an, dass $\mathbb{C} \setminus |\gamma|$ nur eine Komponente besitzt, das heißt $\mathbb{C} \setminus |\gamma|$ ist zusammenhängend und folglich separiert $|\gamma|$ die Punkte ω_1 und ω_2 nicht. Weiterhin separiert die Menge $|J''| \cup |S|$ die Punkte nicht, da $D \subset \mathbb{C} \setminus (|J''| \cup |S|)$ konvex und damit zusammenhängend ist. Es ist $|\gamma| \cap (|J''| \cup |S|) = |J''|$ zusammenhängend. Mit dem Satz von Janiszewski 2.11 folgt, dass die Punkte nicht von $(|J''| \cup |S|) \cup |\gamma| = |\gamma| \cup |S|$ separiert werden. Damit erhalten wir einen Widerspruch, da $|J| \subset |\gamma| \cup |S|$ gilt und $|J|$ die Punkte ω_1 und ω_2 separiert. Also besitzt $\mathbb{C} \setminus |\gamma|$ mindestens zwei Komponenten.

Wir werden zeigen, dass $\mathbb{C} \setminus |\gamma|$ höchstens zwei Komponenten besitzt. Nach Lemma 2.15 wissen wir, dass $z_0 \in |\gamma|$ Randpunkt jeder Komponente ist, das heißt insbesondere, dass jede Komponente Punkte in D besitzt. Wir wissen bereits nach Schritt 1, dass $\mathbb{C} \setminus |J|$ in genau zwei Komponenten zerfällt. Es gilt

$$D \setminus |\gamma| = D \setminus (|J'| \cup |J''|) = D \setminus |J'| = D \setminus (|J'| \cup |S|) = D \setminus |J|$$

das heißt für alle Punkte $\omega \in D \setminus |\gamma|$ gilt entweder $\omega \in G_1 \cap D$ oder $\omega \in G_2 \cap D$. Sei $\omega_0 \in D \setminus |\gamma|$ beliebig. Es folgt $\omega_0 \in G_1$ oder $\omega_0 \in G_2$. Ohne Einschränkung gelte $\omega_0 \in G_1$. Es separiert die Menge $|J''| \cup |S|$ die Punkte ω_0 und ω_1 nicht, da D vollständig in $\mathbb{C} \setminus (|J''| \cup |S|)$ liegt und zusammenhängend ist. Das heißt ω_0 und ω_1 werden weder von $|J|$ noch von $|J''| \cup |S|$ separiert. Da $|J| \cap (|J''| \cup |S|) = |S|$ zusammenhängend ist, folgt mit dem Satz von Janiszewski 2.11, dass ω_0 und ω_1 nicht von $|J| \cup (|J''| \cup |S|) = |\gamma| \cup |S|$ separiert werden und folglich auch nicht von $|\gamma|$. Also liegt ω_0 in der gleichen Komponente wie ω_1 . Damit gibt es höchstens 2 Komponenten, da wir nur zwei Möglichkeiten für beliebige $\omega \in D \setminus |\gamma|$ haben. Also gibt es genau zwei Komponenten. $\square$

Wir werden nun einige Folgerungen aus dem Jordanschen Kurvensatz herleiten. Insbesondere werden wir ein Kriterium beweisen, mit dem wir Injektivität für holomorphe Funktionen folgern können.

Korollar 2.19. *Sei $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ eine geschlossene Jordankurve. Dann besitzt $\mathbb{C} \setminus |\gamma|$ genau eine beschränkte und einfach zusammenhängende Komponente sowie eine unbeschränkte Komponente.*

Beweis. Nach dem Jordanschen Kurvensatz besitzt $\mathbb{C} \setminus |\gamma|$ genau 2 Komponenten H_1 und H_2 . Da $|\gamma|$ kompakt ist, existiert ein $M > 0$, sodass $|\gamma| \subset B_M(0)$ gilt. Weiterhin ist $\mathbb{C} \setminus B_M(0)$ zusammenhängend und gehört damit ohne Einschränkung zur Komponente H_1 , welche somit unbeschränkt ist. Die zweite Komponente H_2 liegt in $B_M(0)$ und ist damit beschränkt. Da die Menge $\overline{\mathbb{C}} \setminus H_2 = \{\infty\} \dot{\cup} H_1 \dot{\cup} |\gamma|$ zusammenhängend ist, ist H_2 nach Lemma 2.6 einfach zusammenhängend. $\square$

Korollar 2.20. Seien $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ eine geschlossene Jordankurve, H_1 die unbeschränkte und H_2 die beschränkte Komponente von $\mathbb{C} \setminus |\gamma|$. Dann gilt

- (i) $n_\gamma(z) = 0$ für alle $z \in H_1$,
- (ii) $n_\gamma(z) = \pm 1$ für alle $z \in H_2$.

Beweis. (i) Es existiert ein $M > 0$ mit $|\gamma| \subset B_M(0)$, da $|\gamma|$ kompakt ist. Nach Lemma 2.2 ist γ nullhomolog in $B_M(0)$, da $\overline{\mathbb{C}} \setminus B_M(0)$ zusammenhängend ist. Das heißt $n_\gamma(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus B_M(0)$. Da n_γ lokal konstant und $\mathbb{C} \setminus B_M(0)$ Teilmenge von H_1 ist, gilt $n_\gamma(z) = 0$ für alle $z \in H_1$.

(ii) Da n_γ lokal konstant ist, genügt es die Aussage für einen Punkt zu zeigen. Wir übernehmen die Notation aus dem Beweis des Jordanschen Kurvensatz entsprechend Abbildung 2.3 und nehmen zusätzlich ohne Einschränkung an, dass G_1 die unbeschränkte Komponente von $\mathbb{C} \setminus |J|$ ist und $B_r^+ \subset G_1$ gilt. Wir wissen, dass die Punkte $\omega_1, \omega_2 \in D$ zu verschiedenen Komponenten von $\mathbb{C} \setminus |\gamma|$ und $\mathbb{C} \setminus |J|$ gehören und ohne Einschränkung gelte $\omega_1 \in H_1, G_1$ und $\omega_2 \in H_2, G_2$.

Behauptung: Die Punkte ω_1 und ω_2 liegen in der unbeschränkten Komponente von $\mathbb{C} \setminus |J'' - S|$. Wir wählen wie in (i) dieses Beweises $M > 0$, sodass $|\gamma| \subset B_M(0)$ gilt. Da J' und J'' Segmente von γ sind gilt $|J'|, |J''| \subset B_M(0)$. Außerdem gilt $|S| \subset B_M(0)$, da S eine Verbindungsstrecke zwischen 2 Punkten aus der konvexen Menge $B_M(0)$ ist. Sei nun $z_0 \in \mathbb{C} \setminus B_M(0)$ beliebig. Es liegt z_0 nach Konstruktion in den unbeschränkten Komponenten von $\mathbb{C} \setminus |\gamma|$, $\mathbb{C} \setminus |J|$ und $\mathbb{C} \setminus |J'' - S|$. Folglich werden z_0 und ω_1 weder von $|\gamma|$ noch von $|J|$ separiert und weiter ist $|\gamma| \cap |J| = |J'|$ zusammenhängend. Wir folgern mit dem Satz von Janiszewski 2.11, dass z_0 und ω_1 auch nicht von $|\gamma| \cup |J| = |\gamma| \cup |S|$ separiert werden. Wegen $|J'' - S| = |J''| \cup |S| \subset |\gamma| \cup |S|$ werden z_0 und ω_1 insbesondere nicht von $|J'' - S|$ separiert. Also liegen z_0 und ω_1 in der selben Komponente. Wir wissen bereits, dass die Menge $|J''| \cup |S|$ die Punkte ω_1 und ω_2 nicht separiert, da $D \subset \mathbb{C} \setminus (|J''| \cup |S|)$ konvex und damit zusammenhängend ist. Daher liegen sie in der selben Komponente von $|\gamma| \cup |S|$ und es folgt nach (i) $n_{J''-S}(\omega_i) = n_{J''-S}(z_0) = 0$.

Wir beweisen nun $n_\gamma(z) = \pm 1$ für alle $z \in H_2$. Da $n_\gamma(z)$ lokal konstant ist, genügt es die Aussage für den Punkt $\omega_2 \in H_2$ zu zeigen. Die Kurven $\gamma = J' + J''$ und $J' + S - S + J'' = J - S + J''$ sind homotop und es folgt für die Umlaufzahl $n_\gamma(\omega_2) = n_J(\omega_2) + n_{J''-S}(\omega_2) = n_J(\omega_2)$. Wir wissen, dass ω_2 in der selben Komponente von $\mathbb{C} \setminus J$ wie ein beliebiger Punkt $z_2 \in B_r^-$ liegt. Damit folgt $n_J(\omega_2) = n_J(z_2)$. Wir zerlegen J in 2 Kurvensegmente. Dabei sei Q' das Kurvensegment von r nach $-r$ und Q'' von $-r$ nach r . Damit konstruieren wir unter Berücksichtigung der Orientierung eine zu $J = Q' + Q''$ homotope Kurve. Es beschreibe B^+ den oberen Kreisbogen von r nach $-r$ und B^- den unteren Kreisbogen von $-r$ nach r . Wir betrachten 2 Fälle:

a) Gilt $|Q'| = [-r, r]$ so betrachten wir die Kurve $Q' - B^+ + B^+ + B^- - B^- + Q''$. Da sie homotop zu J ist, folgt $n_J(z_2) = n_{Q'-B^+}(z_2) + n_{B^++B^-}(z_2) + n_{B^--Q''}(z_2)$. Da z_2 jeweils im Äußeren der Kurven $Q' - B^+$ und $B^- + Q''$ liegt, gilt nach (i) $n_{Q'-B^+}(z_2) = 0 = n_{B^--Q''}(z_2)$. Insgesamt folgt nun $n_\gamma(z) = n_{B^++B^-}(z_2) = n_{\partial B_r}(z_2) = 1$.

b) Gilt $|Q''| = [-r, r]$ so betrachten wir die Kurve $Q' + B^- - B^- - B^+ + B^+ + Q''$. Aus denselben Gründen wie in Fall a) erhalten wir $n_\gamma(z) = n_{-B^- - B^+}(z_2) = n_{-\partial B_r}(z_2) = -1$. $\square$

Korollar 2.21. Sei $0 < r < 1$ und $f \in \mathcal{O}(\mathbb{E})$, sodass f injektiv auf $\partial B_r(0)$ ist. Dann ist f injektiv auf $B_r(0)$ und bildet $B_r(0)$ auf das innere Gebiet der geschlossenen Jordankurve $\gamma = f(\partial B_r(0))$ ab, das heißt $\mathbb{C} = f(B_r(0)) \dot{\cup} |\gamma| \dot{\cup} G_1$, wobei G_1 die unbeschränkte Komponente ist.

Beweis. Wir verschieben zunächst die Funktion f um einen konstanten c , sodass $f - c$ auf $\partial B_r(0)$ keine Nullstellen besitzt. Wir können also ohne Einschränkung annehmen, dass f keine Nullstellen auf der Kurve γ besitzt. Sei G_1 die unbeschränkte und G_2 die beschränkte Komponente von $\mathbb{C} \setminus |\gamma|$. Die Nullstellenmenge von $f(z) - z_0$ ist für $z_0 \in \mathbb{C} \setminus |\gamma|$ gegeben durch

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(0)} \frac{f'(z)}{f(z) - z_0} dz \stackrel{\omega=f(z)}{=} \int_{\gamma} \frac{1}{\omega - z_0} d\omega = n_{\gamma}(z_0) \stackrel{2.20}{=} \begin{cases} 0 & , z_0 \in G_1 \\ \pm 1 & , z_0 \in G_2 \end{cases}.$$

Das heißt $f(z)$ nimmt keinen Wert aus G_1 und jeden Wert aus G_2 genau einmal an. Wegen der Injektivität von f auf $\partial B_r(0)$ ist f nicht konstant und damit ist $f(B_r(0))$ offen und zusammenhängend. Folglich nimmt f keinen Wert aus $|\gamma| = \partial f(B_r(0))$ und G_1 an und für das Bild gilt $f(B_r(0)) = G_2$. $\square$

3. Löwner-Theorie

Wir wenden uns nun der Löwner-Theorie zu. Zunächst werden wir einige Eigenschaften der Klasse S der schlichten Funktionen herleiten. Insbesondere werden wir zeigen, dass die Menge der *Schlitzabbildungen* dicht in S liegt. Für diese Menge werden wir die Gültigkeit der Löwner-Differentialgleichung zeigen. Eine sehr bekannte Anwendung der Löwner-Theorie ist ihre Anwendung im Beweis der *Bieberbachschen Vermutung* nach Weinsten [RS2]. Dieser Satz sagt aus, dass für die Koeffizienten einer schlichten Funktion $|a_n| \leq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Definition 3.1. Wir bezeichnen die Familie der normierten schlichten Funktionen des Einheitskreises als

$$S = \{ f \in \mathcal{O}(\mathbb{E}) \mid f(0) = 0, f'(0) = 1 \text{ und } f \text{ ist schlicht} \}.$$

Proposition 3.2. Die Familie S bleibt unter einigen Transformationen invariant. Sei $f \in S$.

- (i) Die Familie S ist invariant unter Rotationen, das heißt für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ liegt die Funktion $z \mapsto e^{-i\varphi} f(e^{i\varphi} z)$ in S .
- (ii) Die Familie S ist invariant unter Skalierungen, das heißt für alle $r \in \mathbb{R}^*$ liegt die Funktion $z \mapsto \frac{f(rz)}{r}$ in S .
- (iii) Die Familie S ist invariant unter Verkettungen mit Automorphismen des Einheitskreises, das heißt für $a \in \mathbb{E}$ liegt folgende Funktion in S

$$z \mapsto \frac{f\left(\frac{z+a}{1+\bar{a}z}\right) - f(a)}{(1-|a|)^2 f'(a)}.$$

- (iv) Die Familie S ist invariant unter Verkettungen mit biholomorphen Funktionen auf dem Bild von f , das heißt für alle $g \in \mathcal{O}(f(\mathbb{E}))$ mit $g(0) = 0$ und $g'(0) = 1$ liegt $g \circ f$ in S .
- (v) Sei $b \notin f(\mathbb{E})$ so liegt die Funktion $z \mapsto \frac{bf(z)}{b-f(z)}$ in S .
- (vi) Die Familie S ist invariant unter der sogenannten Wurzel-Transformation, das heißt die Funktion $z \mapsto \sqrt{f(z^2)}$ liegt in S .

Beweis. Wir werden nur (iii) und (vi) betrachten, denn die anderen Aussagen sind mit kurzer Rechnung nachzuweisen.

(iii) Die Möbiustransformation $q(z) = \frac{z+a}{1+\bar{a}z}$ ist eine biholomorphe Abbildung von $\mathbb{E}$ auf sich selbst. Damit ist die Verkettung ebenfalls schlicht. Durch Normierung von $f \circ q$ erhalten wir die gesuchte Funktion.

(vi) Wir definieren $g(z) = \sqrt{f(z^2)}$. Wir wissen, dass eine holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}(G)$ in einem Gebiet G genau dann eine n te-Wurzelfunktion besitzt, wenn G einfach zusammenhängend

und f nullstellenfrei auf G ist. Da $f(z^2)$ in 0 eine doppelte Nullstelle besitzt, schreiben wir $f(z^2) = z^2 \tilde{f}(z)$ für $\tilde{f} \in \mathcal{O}(\mathbb{E})$. Nun besitzt $\tilde{f}$ keine Nullstellen auf $\mathbb{E}$ und daher besitzt $\tilde{f}$ eine 2te-Wurzelfunktion h mit $h(z)^2 = \tilde{f}(z) = \frac{f(z^2)}{z^2}$. Wegen $\tilde{f}(0) = f'(0) = 1$ erhalten wir $h(0) = \pm 1$. Wir nehmen ohne Einschränkung an es gelte $h(0) = 1$, denn sonst betrachten wir $-h$. Damit ist $g(z) = zh(z)$ holomorph auf $\mathbb{E}$. Die Funktion g besitzt nur in 0 eine Nullstelle, da h keine Nullstellen auf $\mathbb{E}$ besitzt. Das heißt, es gilt $g(0) = 0$ und $g'(0) = h(0) + 0 = 1$. Wir zeigen die Injektivität. Da $h(z)^2 = \frac{f(z^2)}{z^2}$ eine gerade Funktion ist, muss h entweder gerade oder ungerade sein. Wegen $h(0) = 1$ folgt, dass h gerade ist. Folglich ist die Funktion $g(z) = zh(z)$ ungerade. Sei $z, w \in \mathbb{E}$ mit $g(z) = g(w)$. Dann folgt $f(z^2) = f(w^2)$ wegen $g(z)^2 = g(w)^2$. Aus der Injektivität von f folgt $z^2 = w^2$. Das heißt es gilt $z = \pm w$. Im Fall $z = -w$ gilt aber $g(z) = g(w) = -g(z)$. Also ist z eine Nullstelle von g und daher gilt $z = 0 = w$. Damit haben wir gezeigt, dass g injektiv ist und in S liegt. $\square$

Eine besondere Rolle spielt die sogenannte Koebe-Funktion. Sie ist in Hinblick auf viele Abschätzungen der Klasse S eine scharfe Schranke.

Definition 3.3. Die Funktion

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nz^n$$

heißt *Koebe-Funktion* und für $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| = 1$ erhalten wir nach Proposition 3.2 die *Rotationen* der Koebe-Funktion $k_\lambda(z) = \frac{z}{(1-\lambda z)^2}$. Die Koebe-Funktion besitzt das Bild $k(\mathbb{E}) = \mathbb{C} \setminus (-\infty, -\frac{1}{4}]$.

Im Folgenden zitieren wir einen Satz von Bieberbach [Bie] über die Potenzreihenentwicklung von Funktionen aus S . Dieser Satz gibt eine Abschätzung für den Koeffizienten $|a_2|$ und charakterisiert die Rotationen der Koebe-Funktion.

Satz 3.4 (Satz von Bieberbach). *Sei $f \in S$ dann gilt $|a_2| \leq 2$. Gleichheit gilt genau dann, falls f eine Rotation der Koebe-Funktion ist.*

Für einen Beweis verweisen wir auf [Dur]. Dieser Satz gab Bieberbach Anlass zur Bieberbachschen Vermutung, welche eine Verschärfung dieses Satzes darstellt. Die Bieberbachsche Vermutung besagt, dass für die Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung von Funktionen aus S die Abschätzung $|a_n| \leq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Diese Vermutung wurde 1985 von de Branges bewiesen [deBr].

Satz 3.5 (Koebe 1/4-Theorem). *Sei $f \in S$. Dann gilt $B_{\frac{1}{4}}(0) \subseteq f(\mathbb{E})$.*

Beweis. Sei $f \in S$ beliebig aber fest und $\omega \in \mathbb{C} \setminus f(\mathbb{E})$. Wir definieren die Funktion

$$g: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{\omega f(z)}{\omega - f(z)} = z + \left(a_2 + \frac{1}{\omega}\right)z^2 + \dots,$$

wobei $g \in S$ nach Proposition 3.2 gilt. Wir wenden nun den Satz von Bieberbach 3.4 auf f und g an und erhalten $|a_2| \leq 2$ sowie

$$\left|a_2 + \frac{1}{\omega}\right| \leq 2.$$

Dies können wir weiter abschätzen durch

$$2 \geq \left| a_2 + \frac{1}{\omega} \right| \geq \left| \frac{1}{\omega} \right| - |a_2| \geq \left| \frac{1}{\omega} \right| - 2.$$

Folglich erhalten wir $|\omega| \geq \frac{1}{4}$ und daher $B_{\frac{1}{4}}(0) \subset f(\mathbb{E})$, denn wir haben gezeigt, dass jeder Punkt in $\mathbb{C} \setminus f(\mathbb{E})$ außerhalb von $B_{\frac{1}{4}}(0)$ liegt. Die Abschätzung ist scharf, denn für die Koebe-Funktion gilt $-\frac{1}{4} \notin k(\mathbb{E})$. $\square$

Satz 3.6. *Sei $f \in S$. Dann gilt für alle $z \in \mathbb{E}$ die Abschätzung*

$$\frac{2|z|^2 - 4|z|}{1 - |z|^2} \leq \operatorname{Re} \left[\frac{zf''(z)}{f'(z)} \right] \leq \frac{2|z|^2 + 4|z|}{1 - |z|^2}.$$

Beweis. Sei $f \in S$ beliebig. Für $z = 0$ sind die Abschätzungen offensichtlich richtig. Sei daher $\omega \in \mathbb{E} \setminus \{0\}$. Nach Proposition 3.2 liegt die Funktion

$$g: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{f\left(\frac{z+\omega}{1+\bar{\omega}z}\right) - f(\omega)}{(1 - |\omega|^2)^2 f'(\omega)} = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

in S . Wir berechnen nun mithilfe der Taylorentwicklung den zweiten Koeffizient $\frac{1}{2} g''(0) = a_2$

$$g''(0) = \frac{f''(\omega)}{f'(\omega)}(1 - |\omega|^2) - 2\bar{\omega}.$$

Mit dem Satz von Bieberbach 3.4 erhalten wir

$$\left| \frac{f''(\omega)}{f'(\omega)}(1 - |\omega|^2) - 2\bar{\omega} \right| \leq 4.$$

Dies führt uns nach Multiplikation von $\frac{|\omega|}{1 - |\omega|^2}$ zu der Abschätzung

$$\left| \frac{\omega f''(\omega)}{f'(\omega)} - \frac{2|\omega|^2}{1 - |\omega|^2} \right| \leq \frac{4|\omega|}{1 - |\omega|^2}$$

Für ein beliebiges $z \in \mathbb{C}$ und $a \in \mathbb{R}$ mit $|z| \leq a$ gilt stets $-a \leq \operatorname{Re}(z) \leq a$. Dies wenden wir an und erhalten

$$\frac{-4|\omega|}{1 - |\omega|^2} \leq \operatorname{Re} \left[\frac{\omega f''(\omega)}{f'(\omega)} - \frac{2|\omega|^2}{1 - |\omega|^2} \right] \leq \frac{4|\omega|}{1 - |\omega|^2}$$

und es folgt wie gewünscht

$$\frac{2|\omega|^2 - 4|\omega|}{1 - |\omega|^2} \leq \operatorname{Re} \left[\frac{\omega f''(\omega)}{f'(\omega)} \right] \leq \frac{2|\omega|^2 + 4|\omega|}{1 - |\omega|^2}.$$

$\square$

Satz 3.7 (Koebescher Verzerrungssatz). *Sei $f \in S$. Dann gelten für alle $z \in \mathbb{E}$ die Abschätzungen*

$$\frac{1 - |z|}{(1 + |z|)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1 + |z|}{(1 - |z|)^3}$$

und

$$\frac{|z|}{(1 + |z|)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{|z|}{(1 - |z|)^2}.$$

Beweis. (i) Sei $f \in S$ beliebig. Für $w = 0$ sind die Abschätzungen offensichtlich richtig. Sei daher $w = Re^{i\varphi} \in \mathbb{E} \setminus \{0\}$. Nach Satz 3.6 gilt für alle $z \in \mathbb{E}$

$$\frac{2|z|^2 - 4|z|}{1 - |z|^2} \leq \operatorname{Re} \left[\frac{wf''(z)}{f'(z)} \right] \leq \frac{2|z|^2 + 4|z|}{1 - |z|^2}.$$

Wegen $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{E}$ existiert eine holomorphe Logarithmusfunktion h von f' mit $\exp(h) = f'$ und wegen $f'(0) = 1$ können wir die Logarithmusfunktion so wählen, dass $h(0) = 0$ gilt. Damit erhalten wir für die Darstellung $z = re^{i\varphi}$

$$\frac{\partial}{\partial r} \operatorname{Re} h(re^{i\varphi}) = \frac{1}{r} \operatorname{Re} \left[\frac{re^{i\varphi} f''(re^{i\varphi})}{f'(re^{i\varphi})} \right].$$

Mit $|\exp(z)| = \exp(\operatorname{Re}(z))$ für alle $z \in \mathbb{C}$ erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial r} \operatorname{Re} h(z) = \frac{\partial}{\partial r} \ln[\exp(\operatorname{Re} h(z))] = \frac{\partial}{\partial r} \ln |\exp(h(z))| = \frac{\partial}{\partial r} \ln |f'(z)|,$$

wobei wir mit $\ln$ den natürlichen Logarithmus auf $\mathbb{R}_+$ bezeichnen. Dies setzen wir nun in die Ungleichung aus Satz 3.6 ein und erhalten

$$\frac{2|z| - 4}{1 - |z|^2} \leq \frac{\partial}{\partial r} \ln |f'(z)| \leq \frac{2|z| + 4}{1 - |z|^2}.$$

Mit der Darstellung $z = re^{i\varphi}$ folgern wir

$$\frac{2r - 4}{1 - r^2} \leq \frac{\partial}{\partial r} \ln |f'(re^{i\varphi})| \leq \frac{2r + 4}{1 - r^2}.$$

Durch Integration über r von 0 bis R erhalten wir

$$\int_0^R \frac{2r - 4}{1 - r^2} dr = \ln \frac{1 - R}{(1 + R)^3} \leq \ln |f'(Re^{i\varphi})| \leq \int_0^R \frac{4 + 2r}{1 - r^2} dr = \ln \frac{1 + R}{(1 - R)^3}$$

und nach Anwendung der Exponentialfunktion erhalten wir die gesuchte Behauptung

$$\frac{1 - |w|}{(1 + |w|)^3} \leq |f'(w)| \leq \frac{1 + |w|}{(1 - |w|)^3}.$$

(ii) Sei $f \in S$ beliebig. Für $w = 0$ sind die Abschätzungen offensichtlich richtig. Wir wählen wieder $w = Re^{i\varphi} \in \mathbb{E} \setminus \{0\}$ beliebig. Offensichtlich gilt

$$f(w) = \int_0^R e^{i\varphi} f'(te^{i\varphi}) dt$$

und mit (i) erhalten wir die obere Schranke

$$|f(w)| \leq \int_0^R |f'(te^{i\varphi})| dt \leq \int_0^R \frac{1+t}{(1-t)^3} dt = \frac{R}{(1-R)^2} = \frac{|w|}{(1-|w|)^2}.$$

Für die untere Schranke benötigen wir zunächst eine Fallunterscheidung, denn für $|f(w)| \geq \frac{1}{4}$ wird die Abschätzung erfüllt, da $\frac{R}{(1+R)^2} < \frac{1}{4}$ für alle $R \in (0,1)$ gilt. Sei $|f(w)| < \frac{1}{4}$. Nach Rotation können wir ohne Einschränkung $f(w) \in (0, \frac{1}{4})$ annehmen. Die gerade Strecke $[0, f(w)]$ ist vollständig in $f(\mathbb{E})$ enthalten, denn sie liegt nach Satz 3.5 in der Menge $B_{\frac{1}{4}}(0) \subset f(\mathbb{E})$. Wir definieren das Urbild der Strecke $[0, f(w)]$ unter f

$$\gamma: [0, f(w)] \rightarrow \mathbb{E}, \quad t \mapsto f^{-1}(t).$$

Diese Kurve ist wohldefiniert und stetig differenzierbar. Nach Konstruktion gilt $f(\gamma(t)) = t$ für alle $t \in [0, f(w)]$. Daraus erhalten wir $f'(\gamma(t))\gamma'(t) = 1$ und folglich gilt $|f'(\gamma(t))\gamma'(t)| = 1$ für alle $t \in [0, f(w)]$. Wir wenden den Hauptsatz der Integralrechnung an

$$f(w) = \int_0^{f(w)} f'(\gamma(t))\gamma'(t) dt = \int_0^{f(w)} |f'(\gamma(t))\gamma'(t)| dt = \int_\gamma |f'(\zeta)| |d\zeta|.$$

Damit erhalten wir unter Anwendung der Abschätzung des ersten Teils die Behauptung

$$|f(w)| = \int_\gamma |f'(\zeta)| |d\zeta| \geq \int_0^w \frac{1-|r|}{(1+|r|)^3} dr = \frac{|w|}{(1+|w|)^2}.$$

□

Bemerkung 3.8. Die Ungleichungen in den Sätzen 3.6 und 3.7 sind scharf. Es lässt sich zeigen, dass Gleichheit in einer der Abschätzungen für ein $z \in \mathbb{E} \setminus \{0\}$ genau dann gilt, falls f eine Rotation der Koebe-Funktion ist [Dur].

Definition 3.9. Es sei G ein Gebiet und $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(G)$ eine Familie von holomorphen Funktionen.

- (i) Die Familie $\mathcal{F}$ heißt *normal*, falls jede Folge von Funktionen aus $\mathcal{F}$ eine kompakt konvergente Teilfolge besitzt.
- (ii) Die Familie $\mathcal{F}$ heißt *abgeschlossen*, falls die Grenzfunktion einer jeder kompakt konvergenten Folge in $\mathcal{F}$ liegt.
- (iii) Die Familie $\mathcal{F}$ heißt *lokal gleichmäßig beschränkt*, falls für alle kompakte Mengen $K \subset G$ ein $M > 0$ existiert, sodass $|f|_K \leq M$ für alle $f \in \mathcal{F}$ gilt.

Bemerkung 3.10. Nach dem Satz von Montel [RS2] ist eine in dem Gebiet G lokal gleichmäßig beschränkte Familie $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(G)$ normal in G .

Satz 3.11. *Die Familie S ist eine normale und abgeschlossene Familie.*

Beweis. (i) Normalität: Nach vorheriger Bemerkung 3.10 genügt zu zeigen, dass S lokal gleichmäßig beschränkt ist. Sei $K \subset \mathbb{E}$ kompakt. Aus Satz 3.7 folgt, dass für alle $f \in S$ gilt

$$|f(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{E}.$$

Somit erhalten wir auf K

$$|f|_K \leq \left| \frac{|z|}{(1-|z|)^2} \right|_K \quad \text{für alle } f \in S,$$

wobei $\frac{|z|}{(1-|z|)^2}$ stetig auf K ist und daher wird das Maximum angenommen. Daher ist S lokal gleichmäßig beschränkt und somit normal.

(ii) Abgeschlossenheit: Nach dem Satz von Hurwitz gilt für die Grenzfunktion f einer Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von in G schlichten und holomorphen Funktionen, welche kompakt gegen $f \in \mathcal{O}(G)$ konvergiert, dass f entweder konstant oder injektiv ist. Diesen Satz werden wir nun anwenden.

Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $f_n \in S$ für alle $n \in \mathbb{N}$ eine kompakt konvergente Folge mit Grenzfunktion f . Wegen $f_n(0) = 0$ und $f'_n(0) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erhalten wir $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$. Wegen $f'(0) = 1$ kann f nicht konstant sein, also ist f nach dem Satz von Hurwitz injektiv. Das heißt $f \in S$ und somit ist S abgeschlossen. $\square$

Wir wissen nach dem Riemannschen Abbildungssatz, dass wir zu jedem einfach zusammenhängendem Gebiet $G \subsetneq \mathbb{C}$ eine biholomorphe Funktion f von $\mathbb{E}$ nach G finden. Wir werden sehen, dass wir für dieses f unter zusätzlichen Bedingungen sogar Eindeutigkeit fordern können. Wir werden im Folgenden den Zusammenhang zwischen topologischen Eigenschaften von Folgen einfach zusammenhängender Gebiete und den entsprechenden biholomorphen Funktionen untersuchen. Dazu benötigen wir den Begriff des *Kerns* einer Folge von einfach zusammenhängenden Gebieten.

Proposition 3.12. *Es sei $r > 0$ und $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von einfach zusammenhängenden Gebieten mit $G_n \subsetneq \mathbb{C}$ sowie $B_r(0) \subset G_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es ein größtes Gebiet G mit*

- (i) $0 \in G$ und
- (ii) für alle kompakten Teilmengen $K \subset G$ existiert ein $n(K) \in \mathbb{N}$ mit $K \subset G_n$ für alle $n \geq n(K)$.

Beweis. Wir definieren die Menge

$$A := \{ U \mid U \subset \mathbb{C} \text{ ein Gebiet, welches (i) und (ii) erfüllt} \}.$$

Da $B_r(0)$ sowohl (i) als auch (ii) erfüllt, gilt $A \neq \emptyset$. Wir werden zeigen, dass das Gebiet

$$G := \bigcup_{U \in A} U$$

alle behaupteten Eigenschaften besitzt und beginnen damit nachzuweisen, dass G (i) und (ii) erfüllt. Wegen $B_r(0) \in A$ folgt $0 \in G$. Sei $K \subset G = \bigcup_{U \in A} U$ kompakt. Dann gibt es endlich viele $U_j \in A$ mit $K \subset \bigcup_{j=1}^n U_j$. Wir suchen kompakte Mengen $K_j \subset U_j \cap K \subset U_j$ für $j \in \{1, \dots, n\}$, sodass $K = \bigcup_{j=1}^n K_j$ gilt. Dazu schöpfen wir G zunächst aus. Da G offen ist, existiert für alle Punkte $p \in G$ ein Radius $\varepsilon_p > 0$, sodass gilt

$$\overline{B_{\varepsilon_p}(p)} \subset U_{j(p)} \quad \text{für geeignetes } j(p) \in \{1, \dots, n\}.$$

Nach Konstruktion gilt $K \subset \bigcup_{p \in G} B_{\varepsilon_p}(p)$. Da K kompakt ist genügen endlich viele dieser Kugeln $B_1^j, \dots, B_{i_j}^j \subset U_j$ für alle j . Wir definieren die Mengen $\overline{K_j} := \bigcup_{i=1}^{i_j} B_i^j$ für alle j . Nach Konstruktion gilt $\overline{K_j} \subset U_j$ und $\overline{K_j}$ ist kompakt. Wir definieren die Mengen $K_j := K \cap \overline{K_j}$ für alle j und es gilt $K = \bigcup_{j=1}^n K_j$. Für beliebiges $j = 1, \dots, n$ wissen wir, dass U_j die Forderung (ii) erfüllt. Das heißt für die kompakte Menge K_j gilt $K_j \subset G_n$ für alle $n \geq n(K_j)$. Also gilt $K \subset G_n$ für alle $n \geq \max \{n(K_i) \mid i = 1, \dots, n\}$. Dieses G ist maximal, da es die Vereinigung aller Mengen ist, die (i) und (ii) erfüllen. $\square$

Definition 3.13. Es sei $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von einfach zusammenhängenden Gebieten $G_n \subsetneq \mathbb{C}$ mit $0 \in G_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

- (i) Es sei 0 ein innerer Punkt von $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n$. Dann heißt das Gebiet G aus Proposition 3.12 Kern der Folge $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- (ii) Es sei 0 kein innerer Punkt von $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n$. Dann ist $G = \{0\}$ der Kern der Folge $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- (iii) Wir nennen die Folge $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent gegen G , falls jede Teilfolge den Kern G besitzt.

Satz 3.14. Es sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von schlichten Funktionen $f_n: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{C}$, die kompakt gegen eine schlichte Funktion f konvergiert. Ist $K \subset f(\mathbb{E})$ kompakt, dann gibt es ein $n(K) \in \mathbb{N}$, sodass $K \subset f_n(\mathbb{E})$ für alle $n \geq n(K)$ gilt.

Beweis. Es ist $f^{-1}(K) \subset \mathbb{E}$ kompakt, da f stetig und $\mathbb{E}$ beschränkt ist. Das heißt es existiert ein $0 < r < 1$ mit $f^{-1}(K) \subset B_r(0)$. Es folgt $f(\partial B_r(0)) \cap K = \emptyset$, da $f^{-1}(K)$ sowohl kompakt ist als auch im inneren von $B_r(0)$ liegt und f biholomorph ist. Es sei $c \in K$ beliebig aber fest. Wir wollen zeigen, dass ein $n(K) \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $c \in f_n(\mathbb{E})$ für alle $n \geq n(K)$ gilt, wobei $n(K)$ nicht von c abhängt sondern nur von K . Wir definieren

$$\tilde{f} := f - c \quad \text{und} \quad \tilde{f}_n := f_n - c \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

sowie

$$\delta := d(K, f(\partial B_r(0))) = \inf \{ |b - f(z)| \mid b \in K, z \in \partial B_r(0) \}.$$

Da K und $\partial B_r(0)$ kompakt sind, wird das Infimum angenommen und wegen $f(\partial B_r(0)) \cap K = \emptyset$ ist $\delta > 0$. Für $z \in \partial B_r(0)$ gilt

$$|\tilde{f}_n(z) - \tilde{f}(z)| \leq |f_n - f|_{\partial B_r(0)}.$$

Wegen der kompakten Konvergenz von $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ existiert ein $n(K) := n(\partial B_r(0))$, sodass gilt

$$|f_n - f|_{\partial B_r(0)} < \delta \quad \text{für alle } n \geq n(K).$$

Wir können den Satz von Rouché anwenden, denn es gilt für alle $z \in \partial B_r(0)$

$$|\tilde{f}_n(z) - \tilde{f}(z)| < \delta = d(K, f(\partial B_r(0))) \leq |c - f(z)| = |\tilde{f}(z)|.$$

Mit dem Satz von Rouché folgt, dass $f_n - c$ und $f - c$ in $B_r(0)$ gleich viele Nullstellen besitzen. Wegen $c \in K \subset f(B_r(0))$ wird c von f in $B_r(0)$ angenommen. Somit nimmt f_n den Wert c für alle $n \geq n(K)$ auf $B_r(0)$ an. Da $c \in K$ beliebig war und $n(K)$ nicht von c abhängt, folgt $K \subset f_n(B_r(0)) \subset f_n(\mathbb{E})$ für alle $n \geq n(K)$. $\square$

Lemma 3.15. *Es sei $G \subsetneq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet mit $0 \in G$. Dann existiert genau eine biholomorphe Funktion $f: \mathbb{E} \rightarrow G$ mit $f(0) = 0$ und $f'(0) > 0$.*

Beweis. Existenz: Der Riemannsche Abbildungssatz liefert eine biholomorphe Abbildung von $f: \mathbb{E} \rightarrow G$. Wegen $0 \in G$ existiert genau ein $p \in \mathbb{E}$ mit $f(p) = 0$. Wir wählen nun ein $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{E})$ mit $\varphi(0) = p$. Somit gilt $f \circ \varphi(0) = 0$. Wir können also ohne Einschränkung annehmen, dass $f(0) = 0$ gilt. Sei $\psi \in \text{Aut}(\mathbb{E})$ mit $\psi(0) = 0$ eine Drehung, das heißt $\psi(z) = ze^{i\alpha}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$. Somit ist $f \circ \psi$ weiterhin eine biholomorphe Abbildung des Einheitskreises auf G und es gilt

$$(f \circ \psi)'(0) = f'(\psi(0))\psi'(0) = f'(0)\psi'(0).$$

Da ψ eine Drehung ist gilt also $(f \circ \psi)'(0) = f'(0)e^{i\alpha}$. Nun können wir α geeignet wählen, sodass $f'(0)e^{i\alpha} \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt. Damit zeigt $f \circ \psi$, dass es mindestens eine Funktion mit dieser Eigenschaft gibt.

Eindeutigkeit: Es seien $f, g: \mathbb{E} \rightarrow G$ zwei biholomorphe Funktionen mit $f(0), g(0) = 0$ und $g'(0), f'(0) > 0$. Wir müssen $f = g$ zeigen. Dazu genügt es $g^{-1} \circ f = \text{id}_{\mathbb{E}}$ zu zeigen. Es gilt $g^{-1} \circ f \in \text{Aut}(\mathbb{E})$ mit $(g^{-1} \circ f)(0) = 0$. Also ist $g^{-1} \circ f$ eine Drehung. Das heißt, es existiert ein $\beta \in [0, 2\pi)$ mit $(g^{-1} \circ f)(z) = ze^{i\beta}$. Weiterhin gilt

$$e^{i\beta} = (g^{-1} \circ f)'(0) = \frac{f'(0)}{g'(0)} \in \mathbb{R}_{>0}$$

und wir erhalten $\beta = 0$. Also gilt $g^{-1} \circ f = \text{id}_{\mathbb{E}}$. $\square$

Proposition 3.16. *Es seien $f_n: \mathbb{E} \rightarrow G_n$ biholomorph mit $f_n(0) = 0$ und $f'_n(0) > 0$. Dann konvergiert die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ genau dann kompakt gegen die Nullfunktion, wenn die Gebiete G_n gegen ihren Kern $G = \{0\}$ konvergieren.*

Beweis. Wir nehmen zunächst an, dass $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ kompakt gegen die Nullfunktion f konvergiert. Angenommen der Kern der Folge $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei nicht $\{0\}$, das heißt es existiert ein $r > 0$ mit $B_r(0) \subset G_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit existieren die Umkehrfunktionen $\varphi_n := f_n^{-1}|_{B_r(0)}: B_r(0) \rightarrow \mathbb{E}$ mit $f_n \circ \varphi_n = \text{id}_{B_r(0)}$ und wegen $f_n(0) = 0$ gilt insbesondere $\varphi_n(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren

$$h_n: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}, \quad z \mapsto \varphi_n(rz).$$

Wegen $h_n(0) = 0$ können wir das Lemma von Schwarz anwenden

$$1 \geq |h'_n(0)| = |r\varphi'_n(r0)| = r|\varphi'_n(0)|.$$

und erhalten weiter

$$|\varphi'_n(0)| \leq \frac{1}{r} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dies ermöglicht uns $|f'_n(0)|$ abzuschätzen, denn es gilt

$$1 = |\text{id}'(0)| = |(f_n \circ \varphi_n)'(0)| \leq |f'_n(0)| \frac{1}{r} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Das heißt, es gilt $|f'_n(0)| \geq r$. Aber die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und damit auch $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert kompakt gegen die Nullfunktion. Insbesondere gilt daher $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(0) = 0 < r$. Dies ist ein Widerspruch, das heißt, es gilt doch $G = \{0\}$. Hiermit folgt auch die Konvergenz der $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen ihren Kern $G = \{0\}$, denn dieses Argument lässt sich auf jede beliebige Teilfolge $(G_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ anwenden, indem wir die entsprechende Teilfolge $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ betrachten.

Wir nehmen an der Kern sei $G = \{0\}$ und die G_n konvergieren gegen ihren Kern. Zunächst zeigen wir, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(0) = 0$ gilt. Angenommen $(f'_n(0))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiere nicht gegen 0, dann existiert eine $\varepsilon > 0$ und eine Teilfolge $(f'_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit $f'_{n_k}(0) \geq \varepsilon$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Wir betrachten für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}$ die Funktion

$$g: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{f_{n_k}(z)}{f'_{n_k}(0)}.$$

Es ist g holomorph und schlicht. Weiterhin gilt $g(0) = 0$ und $g'(0) = 1$, daher liegt g in S . Nach Satz 3.5 gilt somit $B_{\frac{1}{4}}(0) \subset g(\mathbb{E})$. Wir werden zeigen, dass $B_{\frac{\varepsilon}{4}}(0) \subset G_{n_k} = f_{n_k}(\mathbb{E})$ gilt. Sei dazu $z_0 \in B_{\frac{\varepsilon}{4}}(0)$ beliebig, dann folgt

$$|z_0| < \frac{\varepsilon}{4} \leq \frac{f'_{n_k}(0)}{4}.$$

Also gilt $\left| \frac{z_0}{f'_{n_k}(0)} \right| < \frac{1}{4}$ und folglich existiert wegen $B_{\frac{1}{4}}(0) \subset g(\mathbb{E})$ ein $\omega \in \mathbb{E}$ mit

$$\frac{z_0}{f'_{n_k}(0)} = g_{n_k}(\omega) = \frac{f_{n_k}(\omega)}{f'_{n_k}(0)}.$$

Somit gilt $f_{n_k}(\omega) = z_0$. Da z_0 und k beliebig waren, folgt $B_{\frac{\varepsilon}{4}}(0) \subset f_{n_k}(\mathbb{E}) = G_{n_k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Das heißt, dass der Kern der Teilfolge $(G_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mindestens $B_{\frac{\varepsilon}{4}}(0)$ enthält und folglich kann der Kern nicht $\{0\}$ sein kann. Dies ist jedoch ein Widerspruch, da aus der Konvergenz der Folge $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $\{0\}$ definitionsgemäß folgt, dass die Teilfolge G_{n_k} den Kern $\{0\}$ besitzt. Also gilt doch $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(0) = 0$.

Wir zeigen, dass $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ kompakt gegen die Nullfunktion konvergiert. Wir betrachten für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ die Funktion

$$h: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{f_n(z)}{f'_n(0)}.$$

Es ist h holomorph, schlicht, $h(0) = 0$ und $h'(0) = 1$, das heißt $h \in S$. Wir erhalten mit Satz 3.7

$$\left| \frac{f_n(z)}{f'_n(0)} \right| = |h(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{E}.$$

Das heißt wir können $|f_n(z)|$ abschätzen mit

$$|f_n(z)| \leq f'_n(0) \frac{|z|}{(1-|z|)^2} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{E}.$$

Sei $0 < R < 1$ beliebig. Dann gilt

$$|f_n|_{B_R(0)} < f'_n(0) \frac{R}{(1-R)^2}.$$

Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(0) = 0$ konvergiert für alle $0 < R < 1$ die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf $B_R(0)$ gleichmäßig gegen 0. Daher konvergiert die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ kompakt gegen die Nullfunktion. $\square$

Satz 3.17 (Carathéodory). *Es seien $f_n: \mathbb{E} \rightarrow G_n$ biholomorph mit $f_n(0) = 0$ und $f'_n(0) > 0$.*

- (i) *Falls die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ kompakt gegen eine schlichte Funktion f konvergiert, dann ist das einfach zusammenhängende Gebiet $f(\mathbb{E})$ der Kern der Folge $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und die Folge $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen $f(\mathbb{E})$. Außerdem konvergiert die Folge $(f_n^{-1})_{n \in \mathbb{N}}$ der Umkehrfunktionen auf dem Kern $f(\mathbb{E})$ kompakt gegen f^{-1} .*
- (ii) *Falls die Folge $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen ein einfach zusammenhängendes Gebiet $G \subsetneq \mathbb{C}$ konvergiert, so konvergiert die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ kompakt gegen eine schlichte Funktion f mit $f(\mathbb{E}) = G$, $f(0) = 0$ und $f'(0) > 0$.*

Beweis. (i) Es konvergiere die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ kompakt gegen eine schlichte Funktion f . Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass $G \neq \{0\}$ gilt, denn sonst würde die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nach Proposition 3.16 kompakt gegen die Nullfunktion konvergieren.

1. Schritt: Es gilt $f(\mathbb{E}) \subset G$.

Wegen $f_n(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $f(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) = 0$, das heißt $0 \in f(\mathbb{E})$. Sei $L \subset f(\mathbb{E})$ kompakt, dann existiert nach Satz 3.14 ein $n(L) \in \mathbb{N}$, sodass $L \subset f_n(\mathbb{E})$ für alle $n \geq n(L)$ gilt. Nach Definition des Kerns der Folge G_n folgt also $f(\mathbb{E}) \subset G$. Außerdem ist $f(\mathbb{E})$ einfach zusammenhängend, da f biholomorph auf $\mathbb{E}$ ist.

2. Schritt: Es sei $L \subset G$ kompakt und U offen mit $L \subset U \subset G$ und $U \subset G_n$ für alle $n \geq n(U)$. Dann existiert eine Teilfolge $(f_{n_k}^{-1})_{k \in \mathbb{N}}$, welche auf L kompakt konvergiert.

Wir betrachten die Umkehrfunktionen $f_n^{-1}: G_n \rightarrow \mathbb{E}$. Wir nehmen an es gäbe eine kompakte Menge L und eine offene Menge U mit $L \subset U \subset G$ sowie $U \subset G_n$ für alle $n \geq n(U)$. Dann ist die Einschränkung $(f_n^{-1}|_U)_{n \geq n(U)}$ wohldefiniert und es gilt $|f_n^{-1}(z)| \leq 1$ für alle $z \in U$ sowie $n \in \mathbb{N}$. Nach dem Satz von Montel finden wir also eine auf U kompakt konvergente Teilfolge $(f_{n_k}^{-1}|_U)_{k \in \mathbb{N}}$. Damit ist diese Teilfolge auf L gleichmäßig konvergent.

3. Schritt: Es existiert eine Teilfolge $(f_{n_k}^{-1})_{k \in \mathbb{N}}$, welche kompakt gegen f^{-1} konvergiert und es gilt $G = f(\mathbb{E})$.

Wir schöpfen G durch eine aufsteigende Folge kompakter Mengen K_j aus, das heißt

$$G = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} K_j \quad \text{mit} \quad K_j \subset K_{j+1}^\circ \quad \text{für alle } j \in \mathbb{N}.$$

Aus Schritt 2 folgt, dass für alle $j \in \mathbb{N}$ eine auf K_j gleichmäßig konvergente Teilfolge $(f_{n_j(l)}^{-1})_{l \in \mathbb{N}}$ existiert. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass die Folge $(f_{n_{j+1}(l)}^{-1})_{l \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(f_{n_j(l)}^{-1})_{l \in \mathbb{N}}$ ist, denn wegen $K_j \subset K_{j+1}$ fassen wir die Folge $(f_{n_j(l)}^{-1})_{l \in \mathbb{N}}$ als eine normale Familie holomorpher Funktionen auf und daher besitzt sie nach dem Satz von Montel eine auf K_{j+1} kompakt konvergente Teilfolge. Wir definieren die Diagonalfolge $(f_{n(l)}^{-1})_{l \in \mathbb{N}} := (f_{n_l(l)}^{-1})_{l \in \mathbb{N}}$. Diese Folge ist nach Konstruktion ab $l \geq j$ auf K_j gleichmäßig konvergent. Das heißt auf jedem K_j konvergiert $(f_{n(l)}^{-1})_{l \in \mathbb{N}}$ gegen eine holomorphe Funktion, wenn wir die Folge ab $l \geq j$ betrachten. Wir erhalten eine holomorphe Funktion $\psi: G \rightarrow \mathbb{C}$, für die $\psi(G) \subset \overline{\mathbb{E}}$ gilt, denn für $z \in G$ existiert ein $j \in \mathbb{N}$ mit $z \in K_j$ und wir folgern

$$|\psi(z)| = \lim_{\substack{l \rightarrow \infty \\ l \geq j}} |f_{n(l)}^{-1}(z)| \leq 1.$$

Angenommen es gäbe ein $z_0 \in G$ mit $|\psi(z_0)| = 1$, dann folgt aus dem Offenheitssatz, dass ψ konstant ist. Wegen $f_n(0) = 0$ folgt $f_n^{-1}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also gilt $\psi \equiv 0$ und insbesondere $\psi(z_0) = 0$ und dies ist ein Widerspruch. Also gilt $|\psi(z)| < 1$ für alle $z \in G$. Wir zeigen nun, dass $\psi = f^{-1}$ gilt. Sei dazu $w \in G$ beliebig, dann existiert ein $j \in \mathbb{N}$ mit $w \in K_j$. Wir definieren die Folge $z_l := f_{n(l)}^{-1}(w)$ für $l \geq j$ und aus der kompakten Konvergenz der Folge $(f_{n(l)}^{-1})_{l \in \mathbb{N}}$ folgt die Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{l \rightarrow \infty} z_l = \lim_{l \rightarrow \infty} f_{n(l)}^{-1}(w) = \psi(w) =: z.$$

Wir erhalten mit der kompakten Konvergenz von $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$w = \lim_{l \rightarrow \infty} f_{n(l)}(z_l) = f(z),$$

wobei wir verwendet haben, dass kompakte Konvergenz und stetige Konvergenz äquivalent sind. Damit haben wir $f(\psi(w)) = w$ für alle $w \in G$ gezeigt, das heißt $f \circ \psi = \text{id}_G$. Damit folgt $G = f(\psi(G))$ und wegen $\psi(G) \subset \mathbb{E}$ erhalten wir $G \subset f(\mathbb{E})$. Zusammen mit Schritt 1 erhalten wir $G = f(\mathbb{E})$. Wir zeigen noch $\psi \circ f = \text{id}_{\mathbb{E}}$. Angenommen es gelte $z \neq \psi(f(z))$ für ein $z \in \mathbb{E}$, dann folgt der Widerspruch aus der Injektivität von f wegen

$$f(z) \neq f(\psi(f(z))) = \text{id}_G(f(z)) = f(z).$$

Damit haben wir insbesondere $\psi = f^{-1}$ gezeigt und die Folge konvergiert auf jedem Kompaktum gleichmäßig gegen f^{-1} .

Schritt 4: Es konvergiert die Folge $(f_n^{-1})_{n \in \mathbb{N}}$ kompakt gegen f^{-1} .

Wir wenden das Montelsche Konvergenzkriterium an. Dieses besagt, dass eine lokal beschränkte Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ kompakt gegen f konvergiert, wenn jede kompakt konvergente Teilfolge bereits gegen f konvergiert. Wir betrachten eine beliebige kompakt konvergente Teilfolge von $(f_n^{-1})_{n \in \mathbb{N}}$. Die Argumentation in Schritt 3 lässt sich auf jede beliebige Teilfolge von $(f_n^{-1})_{n \in \mathbb{N}}$ anwenden. Wir finden daher eine gegen f^{-1} kompakt konvergente Teilfolge dieser Teilfolge. Folglich muss schon die ursprüngliche Teilfolge wegen ihrer Konvergenz gegen f^{-1} konvergieren. Daher konvergieren alle kompakt konvergenten Teilfolgen von $(f_n^{-1})_{n \in \mathbb{N}}$ gegen f^{-1} . Damit konvergiert die Folge $(f_n^{-1})_{n \in \mathbb{N}}$ kompakt gegen f^{-1} .

Schritt 5: Die $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergieren gegen ihren Kern $G = f(\mathbb{E})$.

Die Argumentation in Schritt 1 bis 3 hängt nur von den $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und f ab. Für eine beliebige Teilfolge der G_n betrachten wir die entsprechende Teilfolge der $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Dies liefert erneut den Kern $f(\mathbb{E})$, da sämtliche Teilfolgen von $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auch kompakt gegen f konvergieren. Also konvergiert die Folge der Gebiete $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen ihren Kern $G = f(\mathbb{E})$.

(ii) Die Folge der Gebiete $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei gegen ein einfach zusammenhängendes Gebiet $G \subsetneq \mathbb{C}$ konvergent. Wir zeigen zunächst, dass die Folge $(f'_n(0))_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt ist. Angenommen es gäbe eine Teilfolge $(f'_{n_k}(0))_{k \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} f'_{n_k}(0) = \infty$. Analog zum Beweis von Proposition 3.16 erhalten wir $B_{r_k}(0) \subset G_{n_k}$ mit $r_k := \frac{1}{4} f'_{n_k}(0)$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Es folgt, dass der Kern der Teilfolge $(G_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ und damit der Kern von $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ganz $\mathbb{C}$ ist. Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung. Das heißt es existiert ein $M > 0$ mit $0 \leq |f'_n(0)| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir erhalten wie in Proposition 3.16

$$|f_n(z)| \leq f'_n(0) \frac{|z|}{(1-|z|)^2} \leq M \frac{|z|}{(1-|z|)^2} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{E}, n \in \mathbb{N}.$$

Wir sehen, dass die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lokal gleichmäßig beschränkt ist. Daher existiert eine auf $\mathbb{E}$ kompakt konvergente Teilfolge $(f_{n_l})_{l \in \mathbb{N}}$, welche gegen eine holomorphe Funktion f konvergiert. Nach dem Satz von Hurwitz ist f entweder schlicht oder konstant, da f_{n_l} für alle $l \in \mathbb{N}$ schlicht ist. Angenommen f wäre konstant, dann wäre sie wegen $f_n(0) = 0$ die Nullfunktion. Aber dann wäre $G = \{0\}$ der Kern der Teilfolge $(G_{n_l})_{l \in \mathbb{N}}$, was aber ein Widerspruch gegen die Konvergenz der Folge $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen ein einfach zusammenhängendes Gebiet ist. Das heißt f ist schlicht und nach Teil (i) ist $f: \mathbb{E} \rightarrow G$ biholomorph. Weiterhin gilt $f'(0) > 0$ und $f(0) = 0$. Nach Lemma 3.15 ist f damit eindeutig bestimmt. Mit denselben Argumenten finden wir zu jeder beliebigen Teilfolge von $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine kompakt konvergente Teilfolge, welche gegen eine schlichte Funktion $\tilde{f}$ konvergiert. Mit Teil (i) ist $\tilde{f}: \mathbb{E} \rightarrow G$ biholomorph mit $\tilde{f}'(0) > 0$ und $\tilde{f}(0) = 0$. Wegen der Eindeutigkeit von Lemma 3.15 folgt nun $f = \tilde{f}$. Wir wenden wie in Schritt 4 das Montelsche Konvergenzkriterium an. Daher folgt die kompakte Konvergenz von $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen f . $\square$

Definition 3.18. Es sei G ein Gebiet und $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(G)$ eine Familie holomorpher Funktionen. Eine Familie $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ heißt *dicht* in $\mathcal{F}$, falls es für alle $f \in \mathcal{F}$ eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $f_n \in \mathcal{G}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt, welche kompakt gegen f konvergiert.

Lemma 3.19. Sei $J := \{ f \in S \mid f(\mathbb{E}) \text{ ist durch eine geschlossene Jordankurve berandet.} \}$. Dann liegt die Menge J dicht in S .

Beweis. Sei $f \in S$ beliebig und $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit $0 < r_n < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 1$. Wir definieren

$$f_n: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{1}{r_n} f(r_n z) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Nach Proposition 3.2 ist $f_n \in S$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da f ein Homöomorphismus von $\mathbb{E}$ nach $f(\mathbb{E})$ ist, erhalten wir $f_n(\partial\mathbb{E}) = \partial f_n(\mathbb{E})$. Daher können wir den Rand durch eine stetige Kurve darstellen

$$\gamma_n: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto \frac{1}{r_n} f(r_n e^{it}) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Da f injektiv ist, sind die Kurven γ_n geschlossene Jordankurven und somit gilt $f_n \in J$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir zeigen nun die kompakte Konvergenz. Dazu genügt es zu zeigen, dass die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf allen Kreisscheiben $\overline{B_R(0)}$ mit $0 < R < 1$ gleichmäßig gegen f konvergiert. Seien also $0 < R < 1$ und $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Als holomorphe Funktion ist f stetig und somit auf der kompakten Menge $\overline{B_R(0)}$ gleichmäßig stetig. Das heißt es existiert ein $\delta > 0$, sodass gilt

$$|f(w) - f(z)| < \varepsilon \quad \text{für alle } w, z \in \overline{B_R(0)} \quad \text{mit } |w - z| < \delta.$$

Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 1$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|r_n - 1| < \frac{\delta}{R} \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Für $z \in \overline{B_R(0)}$ setzen wir $w_n = r_n z$. Wegen $0 < r_n < 1$ gilt $w_n \in \overline{B_R(0)}$ und es folgt

$$|w_n - z| = |r_n z - z| = |r_n - 1| |z| < \frac{\delta}{R} R = \delta \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Aus der gleichmäßigen Stetigkeit folgt

$$|f(w_n) - f(z)| = |f(r_n z) - f(z)| < \varepsilon \quad \text{für alle } z \in \overline{B_R(0)}, n \geq N.$$

Daher konvergiert die Folge $(r_n f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf $\overline{B_R(0)}$ gleichmäßig gegen f . Also konvergiert $(r_n f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf ganz $\mathbb{E}$ kompakt gegen f . Weiterhin konvergiert die Folge $(\frac{1}{r_n})_{n \in \mathbb{N}}$ aufgefasst als Folge konstante Funktionen auf $\mathbb{E}$ kompakt gegen 1. Das Produkt von zwei kompakt konvergenten Folgen konvergiert kompakt gegen das Produkt der Grenzfunktionen. Somit konvergiert $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\frac{1}{r_n} r_n f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ kompakt gegen f . $\square$

Definition 3.20. (i) Sei $0 < T \leq \infty$ und $\gamma: [0, T] \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ eine stetige und injektive Kurve mit $\gamma(T) = \infty$. So nennen wir γ einen *Jordanscher Kurvenbogen*.

(ii) Das Komplement $G = \mathbb{C} \setminus |\gamma|$ eines Jordanschen Kurvenbogens γ heißt *Schlitzgebiet*.

(iii) Wir nennen eine Funktion $f \in S$, dessen Bild ein Schlitzgebiet ist, eine *Schlitzabbildung*.

(iv) Mit $M \subset S$ bezeichnen wir folgende Familie von speziellen Schlitzabbildungen:

$$M := \{ f \in S \mid f \text{ ist Schlitzabbildung und für ein } c \in \mathbb{R} \text{ gilt } (-\infty, c] \subset \partial f(\mathbb{E}) \}.$$

Bemerkung 3.21. Die Schlitzgebiete sind einfach zusammenhängende Gebiete, denn mit Lemma 2.13 erhalten wir, dass $\mathbb{C} \setminus |\gamma|$ zusammenhängend und folglich ein Gebiet ist, und mit Proposition 2.6 folgt, dass sie sogar einfach zusammenhängend sind.

Wir haben in Lemma 3.19 gezeigt, dass die Menge J dicht in S liegt. Dies werden wir benutzen, um zu zeigen, dass die Familie M der Schlitzabbildungen dicht in S liegt und damit liegt insbesondere die Menge aller Schlitzabbildung dicht in S .

Lemma 3.22. *Sei $f \in J$. Dann existiert eine Teilfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $f_n \in M$ für alle $n \in \mathbb{N}$, welche kompakt gegen f konvergiert.*

Beweis. Sei also $f \in J$ beliebig. Da $f(\mathbb{E})$ von einer geschlossenen Jordankurve, also von einer kompakten und beschränkten Menge, berandet wird, ist das Bild beschränkt. Wir definieren $w_0 = \min \{ \mathbb{R} \cap \partial f(\mathbb{E}) \}$. Es sei $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ die Kurve, welche $f(\mathbb{E})$ berandet und sie sei so parametrisiert, dass $\gamma(0) = \gamma(1) = w_0$ gilt. Wir definieren die Folge $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $w_n := \gamma(1 - \frac{1}{n})$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus der Stetigkeit von γ folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = w_0$. Wir definieren die stetigen und injektiven Kurven γ_n , die zunächst von w_n entlang der Kurve γ bis w_0 und dann entlang der negativen reellen Achse bis $-\infty$ verlaufen.

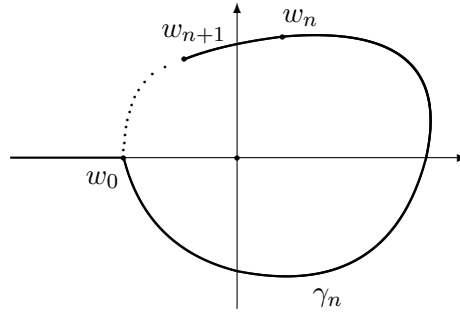


Abbildung 3.1

Damit sind die Gebiete $G_n := \mathbb{C} \setminus |\gamma_n|$ Schlitzgebiete, welche nach Proposition 2.6 einfach zusammenhängend sind. Es sei G der Kern der Gebiete $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und nach Konstruktion gilt $f(\mathbb{E}) \subset G_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit gilt $f(\mathbb{E}) \subset G$. Nach Lemma 3.15 existieren eindeutige biholomorphe Abbildungen $f_n: \mathbb{E} \rightarrow G_n$ mit $f_n(0) = 0$ und $f'_n(0) > 0$. Wir nehmen an, dass G einen Punkt aus $\partial f(\mathbb{E})$ enthalte. Sei $p \in G \cap \partial f(\mathbb{E})$, so ist $\{p\} \subset G$ kompakt und nach Definition des Kerns gilt $\{p\} \subset G_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Aber für ein genügend großes $N \in \mathbb{N}$ gilt $p \in |\gamma_n|$ und folglich $p \notin G_n = \mathbb{C} \setminus |\gamma_n|$ für alle $n \geq N$. Also kann G keinen gemeinsamen Punkt mit $\partial f(\mathbb{E})$ besitzen. Weiterhin liefert uns die Folgerung aus dem Jordansche Kurvensatz Korollar 2.21 die disjunkte Zerlegung

$$\mathbb{C} = f(\mathbb{E}) \dot{\cup} \partial f(\mathbb{E}) \dot{\cup} U,$$

wobei U die unbeschränkte Zusammenhangskomponente sei. Da G ein Gebiet und damit insbesondere zusammenhängend ist, kann also nur $G \subset f(\mathbb{E})$ oder $G \subset U$ gelten. Wegen $0 \in G$ und

$0 \in f(\mathbb{E})$ erhalten wir also $G \subset f(\mathbb{E})$ und damit $G = f(\mathbb{E})$. Wir wenden dieses Argument auf jede beliebige Teilfolge von G_n an und wir erhalten für alle diese stets den selben Kern $f(\mathbb{E})$. Damit folgt die Konvergenz der G_n gegen ihren Kern $G = f(\mathbb{E})$. Nach Voraussetzung ist f schlicht. Damit ist $G \neq \{0\}$ und wegen des Satzes von Liouville erhalten wir $G \subsetneq \mathbb{C}$. Also ist $G \subsetneq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Wir wenden Satz 3.17 (ii) an und erhalten, dass die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ kompakt gegen eine schlichte Funktion $g \in \mathcal{O}(\mathbb{E})$ konvergiert. Wegen $f_n(0) = 0$ und $f'_n(0) > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erhalten wir $g(0) = 0$ und $g'(0) > 0$. Das heißt wir haben zwei biholomorphe Funktionen

$$f, g: \mathbb{E} \rightarrow G = f(\mathbb{E}) \quad \text{mit} \quad f(0), g(0) = 0 \quad \text{und} \quad f'(0), g'(0) > 0.$$

Nach Lemma 3.15 sind sie identisch. Wir haben also gezeigt, dass die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ kompakt gegen f konvergiert. Wir müssen die Folge normieren, sodass $f_n \in M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Wegen $f'(0) = 1$ folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(0) = 1$. Also konvergiert die Folge $(\frac{f_n}{f'_n(0)})_{n \in \mathbb{N}}$ kompakt gegen f . Die Funktionen f_n sind Schlitzabbildungen, welche die Gerade $(-\infty, w_0]$ als Teil des Bildrandes enthalten. Sei $n \in \mathbb{N}$ fest und $\gamma_n: [0, T] \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ der Jordansche Kurvenbogen der Schlitzabbildung f_n . Durch Skalierung mit dem positiven und reellen Faktor $\frac{1}{f'_n(0)} \in \mathbb{R}_{>0}$ erhalten wir wieder eine Schlitzabbildung $\frac{f_n}{f'_n(0)}$, denn die Kurve

$$\tau: [0, T] \rightarrow \overline{\mathbb{C}}, \quad t \mapsto \frac{\gamma_n(t)}{f'_n(0)}$$

ist stetig, injektiv und beschreibt das Komplement des Bildes von $\frac{f_n}{f'_n(0)}$. Außerdem enthält $\frac{f_n}{f'_n(0)}$ die Gerade $(-\infty, \frac{w_0}{f'_n(0)}]$. Damit ist $\frac{f_n}{f'_n(0)} \in M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Satz 3.23. *Die Menge M liegt dicht in S .*

Beweis. Sei $f \in S$ beliebig. Wir müssen zeigen, dass es eine Folge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $g_n \in M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ kompakt gegen f konvergiert.

Schritt 1: Wir zeigen zunächst, dass es für alle $\varepsilon > 0$ und $0 < r < 1$ eine Schlitzabbildung $g \in M$ gibt, sodass gilt

$$|f(z) - g(z)| < \varepsilon \quad \text{für alle } |z| \leq r.$$

Seien dazu $0 < \varepsilon$ und $0 < r < 1$ beliebig aber fest. Da J in S nach Lemma 3.19 dicht liegt, existiert eine gegen f kompakt konvergente Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $f_n \in J$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen der kompakten Konvergenz existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|f(z) - f_n(z)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } |z| \leq r, n \geq N.$$

Wir betrachten die Funktion f_N . Nach Lemma 3.22 existiert eine gegen f_N kompakt konvergente Folge von Schlitzabbildungen $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $g_k \in M$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Wiederum existiert wegen der kompakten Konvergenz ein $M \in \mathbb{N}$ mit

$$|f_N(z) - g_k(z)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } |z| \leq r, k \geq M.$$

Wir betrachten die Funktion g_M . Für diese gilt wie gewünscht

$$|f(z) - g_M(z)| \leq |f(z) - f_N(z)| + |f_N(z) - g_M(z)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \text{für alle } |z| \leq r.$$

Schritt 2: Wir konstruieren eine kompakt konvergente Folge. Wir wenden nun Schritt 1 an, indem wir $\varepsilon_n := \frac{1}{n}$ und $r_n := 1 - \frac{1}{n}$ für alle $n \geq 2$ wählen. Wir erhalten somit eine Folge von Schlitzabbildungen $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $g_n \in M$ für $n \geq 2$. Wir zeigen, dass diese Folge kompakt gegen f konvergiert. Seien dazu $K \subset \mathbb{E}$ kompakt und $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Zunächst existiert ein $n(K) \in \mathbb{N}$, sodass K in $B_n := B_{1-\frac{1}{n}}(0)$ für alle $n \geq n(K)$ liegt, sowie ein $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, sodass $\frac{1}{n} < \varepsilon$ für alle $n \geq n(\varepsilon)$ gilt. Wir setzen $N := n(K, \varepsilon) := \max\{n(K), n(\varepsilon)\}$. Für dieses N gilt

$$|f(z) - g_n(z)| < \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N, z \in K \subset B_n.$$

Also konvergiert $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ kompakt gegen f . □

Bemerkung 3.24. (i) Sei $\Phi: S \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf S , wobei stetig so zu verstehen ist, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(f_n) = \Phi(f)$ für eine kompakte konvergente Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit Grenzwert f gilt. Dann lässt sich das Problem, den Wert $\sup_{f \in S} \Phi(f)$ zu bestimmen, auf $\sup_{f \in M} \Phi(f)$ reduzieren. Die Löwner-Theorie liefert uns eine Methode, mit der wir Schlitzabbildungen betrachten können. Folglich können wir diese Methode anwenden, um ein Problem der Form $\sup_{f \in M} \Phi(f)$ auszurechnen.

(ii) Wir wenden uns nun der Löwner-Theorie zu. Dazu ist es sinnvoll, zunächst einige Normierungen durchzuführen. In dem folgenden Abschnitt sei $f \in S$ stets eine Schlitzabbildung und $\gamma: [0, T] \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ der zugehörige Jordansche Kurvenbogen. Wir definieren die Kurvensegmente

$$\gamma_t := \gamma|_{[t, T]}: [t, T] \rightarrow \overline{\mathbb{C}}, \quad s \mapsto \gamma(s) \quad \text{für alle } t \in [0, T].$$

Bei diesen Kurven handelt es sich ebenfalls um Jordansche Kurvenbögen. Folglich sind die Mengen $G_t := \mathbb{C} \setminus |\gamma_t|$ ebenfalls Schlitzgebiete und nach Lemma 3.15 existieren eindeutige biholomorphe Abbildungen

$$g_t: \mathbb{E} \rightarrow G_t \quad \text{mit} \quad g_t(0) = 0 \quad \text{und} \quad g'_t(0) > 0.$$

Wir notieren $g(z, t) := g_t(z)$ für alle $z \in \mathbb{E}$ und $t \in [0, T)$. Das heißt wir erhalten eine Abbildung

$$g: \mathbb{E} \times [0, T) \rightarrow \mathbb{C},$$

welche für alle festen t holomorph auf $\mathbb{E}$ ist. Somit können wir für festes t die Funktion $g(\cdot, t)$ in eine Potenzreihe um 0 entwickeln, welche auf $\mathbb{E}$ konvergiert

$$g(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) z^k = \beta(t) \left(z + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{c_k(t)}{\beta(t)} z^k \right),$$

wobei wir $\beta(t) := c_1(t)$ definieren. Wegen $\beta(t) = g'_t(0) > 0$ für alle $t \in [0, T)$ sind die Koeffizienten $b_n(t) := \frac{c_n(t)}{\beta(t)}$ wohldefiniert. Wie werden die hier entwickelte Notation im folgenden benutzen.

Wir wollen nun einige Eigenschaften der Koeffizienten untersuchen.

Lemma 3.25. *In obiger Situation sind die Koeffizienten $c_n(t)$, $b_n(t)$ und $\beta(t)$ stetig in t .*

Beweis. Schritt 1: Für alle konvergenten Folgen $(t_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit Grenzwert $t_0 \in [0, T)$ konvergiert die Folge der biholomorphen Funktionen $(g_{t_{n_k}})_{k \in \mathbb{N}}$ kompakt gegen g_{t_0} .

Sei $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $[0, T)$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = t_0 \in [0, T)$. Wir erhalten eine Folge von Schlitzgebieten $(G_{t_k})_{k \in \mathbb{N}}$ und den dazugehörigen biholomorphen Funktionen $(g_{t_k})_{k \in \mathbb{N}}$. Wir zeigen, dass G_{t_0} der Kern der Gebiete $(G_{t_k})_{k \in \mathbb{N}}$ ist und die Folge Gebiete gegen ihren Kern konvergiert. Es bezeichne G den Kern der Gebiete. Wir zeigen zunächst $G_{t_0} \subseteq G$. Wegen $g_{t_0}(0) = 0$ folgt $0 \in G_{t_0}$. Wir müssen also zeigen, dass für alle Kompakta $K \subset G_{t_0}$ ein $n(K) \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $K \subset G_{t_k}$ für alle $k \geq n(K)$ gilt. Nach Konstruktion der Gebiete gilt für $0 < s < t < T$

$$\mathbb{C} \setminus |\gamma| = G_0 \subsetneq G_s \subsetneq G_t \subsetneq \mathbb{C}.$$

Folglich gilt für alle Teilmengen $A \subseteq \mathbb{C} \setminus |\gamma|$

$$A \subseteq G_t \quad \text{für alle } t \in [0, T).$$

Sei $K \subset G_{t_0}$ kompakt. Es liegt die Menge $K \setminus |\gamma|$ nach vorheriger Überlegung in G_t für alle $t \in [0, T)$. Das heißt wir müssen zeigen, dass ein $n(K)$ existiert mit $K \cap |\gamma| \subset G_{t_k}$ für alle $k \geq n(K)$. Ohne Einschränkung sei $K \cap |\gamma| \neq \emptyset$, ansonsten ist K in allen G_t enthalten. Wir definieren

$$c := \sup \gamma^{-1}(K \cap |\gamma|) \leq T.$$

Wir wollen $c < T$ zeigen, denn dann folgt wegen der Abgeschlossenheit von $\gamma^{-1}(K \cap |\gamma|)$ in $\mathbb{C}$, dass $\gamma(c) \in K \cap |\gamma|$ gilt. Angenommen es gilt $c = T$. Es existiert also eine Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $z_n \in K$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma^{-1}(z_n) = T$. Wegen der Stetigkeit und Injektivität von γ folgt aber $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$. Damit ist K unbeschränkt und nicht kompakt, also ein Widerspruch. Wegen

$$\gamma(c) \in K \cap |\gamma| \subset K \subset G_{t_0}$$

folgt jetzt sogar $c \in [0, t_0)$. Die Folge $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert nach Voraussetzung gegen t_0 , daher existiert ein $n(K) \in \mathbb{N}$, sodass $c < t_k$ für alle $k \geq n(K)$ gilt. Das heißt $K \cap |\gamma| \subset \gamma([0, c]) \subset G_{t_k}$ für alle $k \geq n(K)$. Also haben wir gezeigt, dass G_{t_0} im Kern G enthalten ist.

Wir zeigen $G \subseteq G_{t_0} = \mathbb{C} \setminus |\gamma_{t_0}|$. Dazu genügt es zu zeigen, dass kein Punkt des Jordanschen Kurvenbogens γ_{t_0} in G liegt. Wir zeigen dies zunächst für die Punkte $\gamma(s) \in |\gamma_{t_0}|$ für $t_0 < s < T$ und folgern hieraus im Anschluss, dass auch $\gamma(t_0)$ nicht in G liegen kann. Sei also $s \in (t_0, T)$ beliebig aber fest. Wegen der Konvergenz der $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $t_k < s$ für alle $k \geq N$. Somit liegt $\gamma(s)$ auf dem Jordanschen Kurvenbogen γ_{t_k} für alle $k \geq N$ und folglich erhalten wir $\gamma(s) \notin \mathbb{C} \setminus |\gamma_{t_k}| = G_{t_k}$ für alle $k \geq N$. Nach Definition des Kerns und wegen der Kompaktheit von $\{\gamma(s)\}$ folgt also $\gamma(s) \notin G$. Wir zeigen, dass $\gamma(t_0)$ nicht in G liegt. Wir wissen, dass G ein Gebiet und damit insbesondere offen ist. Nach obiger Betrachtung folgt $\gamma(t_0) \notin G^\circ$, denn wir können eine Folge $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $s_k \in (t_0, T)$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = t_0$ konstruieren, für die $\gamma(s_k) \notin G$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Mit der Stetigkeit von γ erhalten wir $\gamma(t_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \gamma(s_k)$ also liegt $\gamma(t_0)$ nicht im Inneren von G .

Wir haben also gezeigt, dass G_{t_0} der Kern der Folge $(G_{t_k})_{k \in \mathbb{N}}$ ist. Weiterhin lässt sich dieses Argument auf jede beliebige Teilfolge von $(G_{t_k})_{k \in \mathbb{N}}$ anwenden, da die entsprechende Teilfolge von $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ gegen t_0 konvergiert. Somit konvergiert die Folge der Gebiete G_{t_k} gegen ihren Kern G_{t_0} . Da G_{t_0} das Bild einer schlichten Funktion ist, folgt $G_{t_0} \neq \{0\}$ und wir können nun den Satz von Carathéodory 3.17 (ii) anwenden. Das heißt die schlichten Funktionen $(g_{t_k})_{k \in \mathbb{N}}$ konvergieren kompakt gegen eine schlichte Funktion $\tilde{g}: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{C}$ und mit (i) des Satzes von Carathéodory 3.17 und der Eindeutigkeit gilt $\tilde{g} = g_{t_0}$.

Schritt 2: Die Koeffizienten b_n und β sind stetig in t . Nach Konstruktion der b_n und β genügt es zu zeigen, dass die Koeffizienten c_n stetig in t sind. Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $t_0 \in [0, T)$ beliebig aber fest. Weiterhin sei $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine in $[0, T)$ liegende Folge, welche gegen t_0 konvergiert. Wir müssen zeigen, dass $\lim_{k \rightarrow \infty} c_n(t_k) = c_n(t_0)$ gilt. Wir wissen nach Schritt 1, dass die Folge $(g_{t_k})_{k \in \mathbb{N}}$ kompakt gegen g_{t_0} konvergiert. Nach dem Konvergenzsatz von Weierstraß konvergiert die Folge $(g_{t_k}^{(n)})_{k \in \mathbb{N}}$ kompakt gegen $(g_{t_0}^{(n)})$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit konvergiert die Folge insbesondere punktweise, das heißt $\lim_{k \rightarrow \infty} g_{t_k}^{(n)}(0) = g_{t_0}^{(n)}(0)$. Wir erhalten mit Taylor die Darstellung

$$c_n(t) = \frac{g_t^{(n)}(0)}{n!}$$

und für diese folgt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} c_n(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{g_{t_k}^{(n)}(0)}{n!} = \frac{g_{t_0}^{(n)}(0)}{n!} = c_n(t_0).$$

Also sind $\beta(t)$ und $b_n(t)$ stetig. □

Satz 3.26 (Subordinationsprinzip). *Seien $f, g \in \mathcal{O}(\mathbb{E})$ schlicht mit $g(0) = f(0)$ und es gelte $g(\mathbb{E}) \subseteq f(\mathbb{E})$. Dann gilt $|g'(0)| \leq |f'(0)|$ und $g(B_r(0)) \subseteq f(B_r(0))$ für alle $0 < r \leq 1$.*

Zusatz: Gilt $g(\mathbb{E}) \subsetneq f(\mathbb{E})$, so folgt $|g'(0)| < |f'(0)|$.

Beweis. Es sei $f^{-1}: f(\mathbb{E}) \rightarrow \mathbb{E}$ die Umkehrabbildung von f . Dann ist $f^{-1} \circ g: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ wohldefiniert, holomorph und erfüllt $(f^{-1} \circ g)(0) = 0$. Wir folgern mit dem Lemma von Schwarz

$$|(f^{-1} \circ g)(z)| \leq |z| \quad \text{für alle } z \in \mathbb{E}.$$

Sei $z \in B_r(0)$ für $r \in (0, 1]$ beliebig, dann erhalten wir

$$|(f^{-1} \circ g)(z)| \leq |z| < r.$$

Das heißt $(f^{-1} \circ g)(z) \in B_r(0)$ und es folgt $g(z) \in f(B_r(0))$. Also gilt $g(B_r(0)) \subset f(B_r(0))$. Das Lemma von Schwarz liefert uns außerdem

$$1 \geq |(f^{-1} \circ g)'(0)| = \left| \frac{g'(0)}{f'(0)} \right|$$

und damit folgt $|g'(0)| \leq |f'(0)|$.

Zusatz: Nach obiger Rechnung gilt $|g'(0)| = |f'(0)|$ genau dann, wenn $|(f \circ g)'(0)| = 1$ gilt. Nach dem Lemma von Schwarz ist in diesem Fall $f^{-1} \circ g$ eine Drehung. Das heißt es existiert ein

$\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| = 1$ und $(f^{-1} \circ g)(z) = \lambda z$ für alle $z \in \mathbb{E}$. Also gilt $g(z) = f(\lambda z)$ für alle $z \in \mathbb{E}$ und damit folgt auch $g(\mathbb{E}) = f(\mathbb{E})$. Somit erhalten wir: Gilt $g(\mathbb{E}) \subsetneq f(\mathbb{E})$, so folgt $|g'(0)| < |f'(0)|$. $\square$

Satz 3.27. *Der Koeffizient $\beta(t)$ ist streng monoton wachsend in t .*

Beweis. Wegen der Injektivität von γ folgt $G_{t_1} \subsetneq G_{t_2}$ für $t_1 < t_2$. Es seien g_{t_1} und g_{t_2} die entsprechenden biholomorphen Abbildungen. Auf diese können wir nun den Zusatz aus Satz 3.26 anwenden und erhalten

$$\beta(t_1) = g'_{t_1}(0) < g'_{t_2}(0) = \beta(t_2).$$

$\square$

Definition 3.28. Wir nennen $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ eine *Parametertransformationen*, falls $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ und φ homöomorph ist.

Bemerkung 3.29. (i) Die obige Definition lässt sich analog auf offene und halboffene Intervalle übertragen, indem wir fordern, dass die Grenzwerte entsprechend übereinstimmen.

(ii) Wir interessieren uns nun für eine Parametertransformationen der Kurve γ . Zunächst wollen wir jedoch betrachten, ob eine solche Transformation die Stetigkeit der Koeffizienten c_n und somit von β und b_n beeinflusst. Sei $\varphi: [0, S] \rightarrow [0, T]$ eine Parametertransformation. Dann ist $\gamma_2 := \gamma \circ \varphi: [0, S] \rightarrow \mathbb{C}$ ebenfalls eine Schlitzabbildung, da $|\gamma_2| = |\gamma|$ und γ_2 sowohl stetig als auch injektiv ist. Wir erhalten entsprechend die eindeutigen biholomorphen Funktionen $\tilde{g}_s: \mathbb{E} \rightarrow \tilde{G}_s$ für $s \in [0, S)$ von γ_2 . Sei $s \in [0, S)$ beliebig. Da φ bijektiv ist, existiert ein eindeutiges $t \in [0, T)$ mit $\varphi^{-1}(t) = s$. Wegen $\gamma_2(s) = \gamma(t)$ folgt $\tilde{G}_s = G_t$ und mit Lemma 3.15 erhalten wir $\tilde{g}_s = g_t$. Folglich gilt für die Koeffizienten $c_n(s) = c_n(\varphi^{-1}(t))$. Da $s \in [0, S)$ beliebig war und φ^{-1} stetig ist, folgt die Stetigkeit der Koeffizienten. Damit haben wir sogar gezeigt, dass die Parametertransformation φ von γ nur eine entsprechende Transformation $\varphi|_{[0, S)}$ für die Koeffizienten bedeutet.

Korollar 3.30. *Es existiert eine Parametertransformation $\varphi: [0, \infty] \rightarrow [0, T]$ von γ , sodass $\beta(t) = e^t$ für alle $t \in [0, \infty)$ gilt. Wir nennen dies die Standardparametrisierung von γ .*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $\beta(t)$ unbeschränkt ist. Sei dazu $M > 0$ beliebig. Wir wissen, dass $\lim_{t \rightarrow T} \gamma(t) = \infty$ gilt. Das heißt es existiert ein $t_0 < T$ mit $|\gamma(t)| > M$ für alle $t \geq t_0$. Daher liegt die Scheibe $B_M(0)$ in $\mathbb{C} \setminus |\gamma([t, T))| = G_t$ für alle $t \geq t_0$. Wir definieren

$$h_t: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}, \quad z \mapsto g_t^{-1}(Mz) \quad \text{für alle } t \geq t_0.$$

Wegen $|Mz| < M$ ist h_t wohldefiniert und holomorph mit $h_t(0) = g_t^{-1}(0) = 0$. Mit dem Lemma von Schwarz folgt

$$1 \geq |h'_t(0)| = M \left| \frac{1}{g'_t(0)} \right| = M \frac{1}{\beta(t)} \quad \text{für alle } t \geq t_0.$$

Das heißt $\beta(t) \geq M$ für alle $t \geq t_0$. Also ist $\beta(t)$ unbeschränkt. Zuvor hatten wir gezeigt, dass β stetig und streng monoton wachsend ist. Wegen $\beta(0) = g'_0(0) = f'(0) = 1$ erhalten wir,

dass β eine Funktion der Form $\beta: [0, T) \rightarrow [1, \infty)$ ist. Da für den Grenzwert $\lim_{t \rightarrow T} \beta(t) = \infty$ gilt, können wir β in ∞ stetig fortsetzen und erhalten eine Funktion $\tilde{\beta}: [0, T] \rightarrow [1, \infty]$. Wir haben nun eine bijektive und stetige Funktion $\tilde{\beta}$ auf einer kompakten Menge, daher ist die Umkehrabbildung ebenfalls stetig, das heißt $\tilde{\beta}$ ist homöomorph. Wir definieren

$$\psi: [0, T] \rightarrow [0, \infty], \quad t \mapsto \ln \tilde{\beta}(t),$$

wobei wir $\ln(\infty) = \infty$ stetig fortsetzen. Die Funktion ψ ist wohldefiniert und homöomorph, da $\tilde{\beta}(t) \geq 1 > 0$ für alle $t \in [0, \infty]$ gilt und es sich um eine Verkettung von homöomorphen Abbildungen handelt. Das heißt wir haben eine Parametrisierung gefunden, sodass $\tilde{\beta}(t) = \exp(\psi(t))$ gilt. Wir wählen $\varphi = \psi^{-1}$ und erhalten die gewünschte Parametrisierung. $\square$

Wir werden im Folgenden ohne Einschränkung annehmen, dass γ in der Standardparametrisierung vorliegt.

Definition 3.31. Wir definieren zu einer Schlitzabbildung $f \in S$ und der in Bemerkung 3.24 festgelegten Notation folgende Funktion in Abhängigkeit des Parameters t

$$f(\cdot, \cdot): \mathbb{E} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{E}, \quad f(z, t) := f_t(z) := g_t^{-1}(f(z)).$$

Bemerkung 3.32. (i) Nach Konstruktion sind die Funktionen f_t injektiv aber nicht surjektiv. Das Bild $f_t(\mathbb{E})$ ist das Komplement einer stetigen und injektiven Kurve J_t . Es gilt $f(\mathbb{E}) = \mathbb{E} \setminus |J_t|$, denn f nimmt das Kurvensegment $\gamma([0, t))$ nicht an, welches aber im Definitionsbereich von g_t^{-1} zusätzlich zu $f(\mathbb{E})$ enthalten ist, und somit gilt $J_t: [0, t) \rightarrow |J_t|$ mit $s \mapsto g_t^{-1}(\gamma(s))$. Für $s \rightarrow t$ verläuft J_t gegen den Rand, da $\gamma(t)$ nicht im Definitionsbereich von g_t^{-1} liegt.

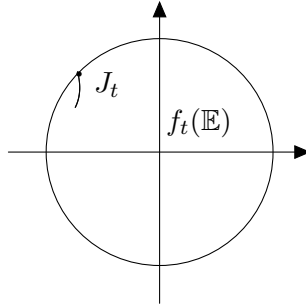


Abbildung 3.2

(ii) Wegen $g_t(z) = e^t(z + \sum_{k=2}^{\infty} b_k(t)z^k)$ erhalten wir für f_t die Taylorentwicklung

$$f_t(z) = e^{-t}(z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k(t)z^k).$$

(iii) Die Koeffizienten a_n sind stetig in t , denn durch Taylorentwicklung erhalten wir die Koeffizienten a_n in rationaler Abhängigkeit von $\beta, b_2, \dots, b_n$, wobei im Nenner nur Vielfache und Potenzen von β vorkommen. Wegen $\beta(t) > 0$ für alle $t \in [0, \infty)$ erhalten wir die Stetigkeit von a_n . Folglich ist die Funktion $f(z, t)$ stetig in t für alle $z \in \mathbb{E}$.

Wir benötigen für den Hauptsatz der Löwner-Theorie drei Hilfssätze. Als erstes erwähnen wir einen Satz von Carathéodory [Car], dieser liefert uns das Kriterium, dass eine biholomorphe Funktion $f: G \rightarrow \mathbb{E}$ auf ihren Rand homöomorph fortsetzbar ist, falls G von einer geschlossenen Jordankurve berandet wird. In [BS] wird diese Aussage ausgeführt und wir erhalten folgende Verallgemeinerung:

Definition 3.33. Sei G ein Gebiet. Wir nennen einen Randpunkt $z \in \partial G$ *normal*, wenn zu jeder gegen z konvergente Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $z_n \in G$ eine Teilfolge $(z_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ und eine offene Jordankurve $\gamma: [0, 1] \rightarrow \overline{G}$ mit $\gamma(1) = z$ und $\gamma([0, 1)) \subset G$ existiert, sodass alle Punkte der Teilfolge $(z_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ auf γ liegen.

Satz 3.34. Es sei $G \subsetneq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet mit nur normalen Randpunkten. Dann lässt sich jede biholomorphe Abbildung $f: \mathbb{E} \rightarrow G$ zu einem Homöomorphismus von $\mathbb{E}$ nach $\overline{G}$ fortsetzen.

Korollar 3.35. In vorliegender Situation sind die Funktionen $g_t^{-1}: G_t \rightarrow \mathbb{E}$ homöomorph auf ihren Rand fortsetzbar.

Beweis. Wir geben an dieser Stelle nur eine Beweisskizze, denn der Beweis verläuft ähnlich wie der Beweis von Lemma 2.17. Wenn wir annehmen, dass ein Randpunkt $z \in G_t$ existiert, welcher nicht normal ist, dann existiert eine konvergente Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, sodass jede stetige und injektive Kurve τ , welche eine Teilfolge enthält, den Rand von G_t schneidet. Wenn wir nun die Konstruktion aus Lemma 2.17 anpassen, erhalten wir über die Schnittpunkte von τ mit dem Rand von G_t eine konvergente Folge auf der stetigen Kurve. Mit dieser Folge erhalten wir einen Widerspruch zur Injektivität von γ . $\square$

Weiterhin benötigen wir eine modifizierte Version des Schwarzschen Spiegelungsprinzips [BS], wobei wir die Spiegelung an dem Einheitskreis statt an der reellen Achse durchführen.

Satz 3.36 (Schwarzsches Spiegelungsprinzip - Modifikation). Es sei $G \subset \mathbb{E}$ ein Gebiet des Einheitskreises, dessen Rand ein offenes Kurvenstück $J \subsetneq \partial \mathbb{E}$ enthalte. Weiter sei $G^* = \{ \frac{1}{\bar{z}} \mid z \in G \}$ und $f \in \mathcal{O}(G)$, sodass f auf J stetig mit Werten auf dem Einheitskreis ist, das heißt $|f(z)| = 1$ für alle $z \in J$. Dann gibt es eine eindeutige holomorphe Fortsetzung

$$F: G \cup J \cup G^* \rightarrow \mathbb{C}, \quad F(z) := \begin{cases} \overline{\frac{1}{f(\frac{1}{\bar{z}})}} & , z \in G^* \\ f(z) & , z \in G \cup J \end{cases}.$$

Beweis. Wir werden diesen Fall auf das bereits bekannte Schwarze Spiegelungsprinzip zurückführen. Wir konstruieren eine Möbiustransformation, welche den Rand des Einheitskreises auf die reelle Achse abbildet. Dazu betrachten wir die Funktion

$$\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)},$$

wobei wir $z_3 \in \partial \mathbb{E} \setminus J$ und $z_1, z_2 \in \partial \mathbb{E} \setminus \{z_3\}$ verschieden wählen. Durch diese Konstruktion ist φ eine Möbiustransformation, welche z_1 auf 0, z_2 auf 1 und z_3 auf ∞ und folglich den ganzen Einheitskreis auf die reelle Achse abbildet. Entsprechend wird das Innere des Einheitskreises

entweder in die obere oder in untere Halbebene abgebildet. Wir betrachte die verkettete Funktion $h := \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}: \varphi(G) \cup \varphi(J) \rightarrow \mathbb{C}$, welche auf $\varphi(G)$ holomorph und in $\varphi(J)$ stetig ist. Nach Konstruktion unserer Möbiustransformation gilt $\varphi(J) \subset \mathbb{R}$. Da f auf J Werte des Einheitskreises annimmt, gilt $h(z) \in \mathbb{R}$ für alle $z \in \varphi(J)$. Folglich erhalten wir nach dem bekannten Schwarzschen Spiegelungsprinzip eine eindeutige und holomorphe Fortsetzung H

$$H: \varphi(G) \cup \varphi(J) \cup \overline{\varphi(G)} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \begin{cases} \overline{h(\bar{z})} & , z \in \overline{\varphi(G)} \\ h(z) & , z \in \varphi(G) \cup J \end{cases}.$$

Wir definieren die Funktion $F := \varphi^{-1} \circ H \circ \varphi: G \cup J \cup \varphi^{-1}(\overline{\varphi(G)}) \rightarrow \mathbb{C}$. Diese Funktion ist eine Fortsetzung von f . Wir müssen noch zeigen, dass $\overline{\varphi(G)} = \varphi(G^*)$ und damit $\varphi^{-1}(\overline{\varphi(G)}) = G^*$ gilt. Sei $z \in G$. Dann ist $\overline{\varphi(z)} \in \overline{\varphi(G)}$ und $\varphi(\frac{1}{\bar{z}}) \in \varphi(G^*)$. Außerdem liegen die Punkte z_i auf dem Einheitskreis, daher gilt $\bar{z}_i = \frac{1}{z_i}$. Die Behauptung folgt nun aus

$$\overline{\varphi(z)} = \frac{(\bar{z} - \frac{1}{z_1})(\frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_3})}{(\bar{z} - \frac{1}{z_3})(\frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_1})} = \frac{(\frac{1}{\bar{z}} - z_1)(z_2 - z_3)}{(\frac{1}{\bar{z}} - z_3)(z_2 - z_1)} = \varphi(\frac{1}{\bar{z}}).$$

□

Wir wiederholen außerdem die Schwarzsche Integralformel, welche wir benötigen [RS1].

Satz 3.37 (Schwarzsche Integralformel). *Sei $R > 0$, $B := \overline{B_R(0)}$ und $f: B \rightarrow \mathbb{C}$ stetig sowie holomorph auf $B_R(0)$. Dann gilt*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{\operatorname{Re} f(\omega)}{\omega} \frac{\omega + z}{\omega - z} d\omega + i \operatorname{Im}(f(0)) \quad \text{für alle } z \in B.$$

Satz 3.38 (Hauptsatz der Löwner Theorie). *Sei $f: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $f \in S$ eine Schlitzabbildung, wobei γ in Standardparametrisierung vorliegt. Dann gilt für $f(z, t)$ die Differentialgleichung*

$$\frac{\partial f(z, t)}{\partial t} = -f(z, t) \frac{1 + \kappa(t)f(z, t)}{1 - \kappa(t)f(z, t)} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{E},$$

wobei $\kappa(t)$ in t stetig ist mit $|\kappa(t)| = 1$ für alle $t \in [0, \infty)$. Außerdem gilt auf $\mathbb{E}$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^t f(\cdot, t) = f,$$

das heißt, dass für jede Folge $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$ die Folge $(e^{t_k} f(\cdot, t_k))_{k \in \mathbb{N}}$ auf $\mathbb{E}$ kompakt gegen f konvergiert.

Beweis. Schritt 1: Wir zeigen zunächst den zweiten Teil des Satzes. Dazu werden wir zunächst die Aussage zeigen, dass $\lim_{t \rightarrow \infty} e^t g_t^{-1}(w) = w$ bezüglich kompakter Konvergenz gilt. Wir erhalten für $g(z, t)$ mit Satz 3.7 die Abschätzung

$$\frac{e^t |z|}{(1 + |z|)^2} \leq |g_t(z)| \leq \frac{e^t |z|}{(1 - |z|)^2} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{E}, t \geq 0.$$

Durch umstellen ergibt sich daraus

$$(1 - |z|)^2 \leq e^t \frac{|z|}{|g_t(z)|} \leq (1 + |z|)^2 \leq 4 \quad \text{für alle } z \in \mathbb{E} \setminus \{0\}, t \geq 0.$$

Sei $w \in \mathbb{C} \setminus (|\gamma| \cup \{0\})$. Wir setzen $z = g_t^{-1}(w)$ und erhalten

$$(1 - |g_t^{-1}(w)|)^2 \leq e^t \frac{|g_t^{-1}(w)|}{|w|} \leq (1 + |g_t^{-1}(w)|)^2 \leq 4 \quad \text{für alle } w \in \mathbb{C} \setminus (|\gamma| \cup \{0\}).$$

Insbesondere erhalten wir $|g_t^{-1}(w)| \leq 4e^{-t}|w|$ für alle $w \in \mathbb{C} \setminus |\gamma|$, denn in 0 gilt $g_t^{-1}(0) = 0$. Damit konvergiert g_t^{-1} auf $\mathbb{C} \setminus |\gamma|$ für $t \rightarrow \infty$ punktweise gegen die Nullfunktion. Daraus ergibt sich für alle $w \in \mathbb{C} \setminus (|\gamma| \cup \{0\})$

$$1 = \lim_{t \rightarrow \infty} (1 - |g_t^{-1}(w)|)^2 \leq \lim_{t \rightarrow \infty} e^t \frac{|g_t^{-1}(w)|}{|w|} \leq \lim_{t \rightarrow \infty} (1 + |g_t^{-1}(w)|)^2 = 1.$$

Das heißt, dass die Funktionenfolge $\left| e^t \frac{g_t^{-1}(w)}{w} \right|$ auf $\mathbb{C} \setminus (|\gamma| \cup \{0\})$ für $t \rightarrow \infty$ punktweise gegen 1 konvergiert. Wir definieren $h_t: \mathbb{C} \setminus |\gamma| \rightarrow \mathbb{C}$ durch $z \mapsto e^t \frac{g_t^{-1}(z)}{z}$. Wir müssen noch zeigen, dass die Singularität in 0 hebbar ist. Dazu betrachten wir für festes t die Potenzreihenentwicklung

$$h_t(w) = e^t \frac{g_t^{-1}(w)}{w} = \frac{e^t}{w} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k w^k = e^t \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{k+1} w^k.$$

Wir sehen, dass die Singularität in $w = 0$ für alle t hebbar ist durch

$$e^t \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{k+1} 0^k = e^t \alpha_1 = e^t (g_t^{-1})'(0) = \frac{e^t}{g_t'(0)} = \frac{e^t}{e^t} = 1.$$

Insgesamt haben wir gezeigt, dass $|h_t(w)| \leq 4$ für alle $w \in \mathbb{C} \setminus |\gamma|$ gilt. Daher ist die Familie $\{h_t \mid t \geq 0\}$ auf $\mathbb{C} \setminus |\gamma|$ lokal gleichmäßig beschränkt und nach dem Satz von Montel normal. Das heißt, dass für jede gegen ∞ konvergente Folge $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge $(t_{k(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ existiert, sodass bezüglich kompakter Konvergenz folgendes gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_{t_{k(n)}}(w) = G(w) \quad \text{für alle } w \in \mathbb{C} \setminus |\gamma|,$$

wobei $G(w)$ holomorph auf $\mathbb{C} \setminus |\gamma|$ ist. Wir wissen bereits, dass gilt

$$|G(w)| = 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| h_{t_{k(n)}}(w) \right| \quad \text{für alle } w \in \mathbb{C} \setminus |\gamma|$$

und nach dem Offenheitssatz folgt, dass G konstant ist. Weiterhin gilt $G \equiv 1$, denn für den Grenzwert in 0 erhalten wir

$$G(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_{t_{k(n)}}(0) = 1$$

Es konvergiert die konstante Folge der Identität $(\text{Id})_{n \in \mathbb{N}}$ auf $\mathbb{C} \setminus |\gamma|$ kompakt gegen Id . Durch Multiplikation ergibt dies auf $\mathbb{C} \setminus |\gamma|$ bezüglich kompakter Konvergenz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (h_{t_{k(n)}} \text{Id}) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{t_{k(n)}} g_{t_{k(n)}}^{-1} = \text{Id}.$$

Wir betrachten das Kompositum mit der konstanten Folge $(f)_{n \in \mathbb{N}}$. Wegen $f(\mathbb{E}) = \mathbb{C} \setminus |\gamma|$ ist die Komposition wohldefiniert und wir erhalten bezüglich kompakter Konvergenz auf $\mathbb{E}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{t_{k(n)}} g_{t_{k(n)}}^{-1} (f) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{t_{k(n)}} f(\cdot, t_{k(n)}) = f.$$

Wir wenden das Montelsche Konvergenzkriterium an, da wir nun für jede beliebige Folge mit Grenzwert ∞ eine Teilfolge $(t_{\mu})_{\mu \in \mathbb{N}}$ finden, sodass $(e^{t_{\mu}} g_{t_{\mu}}^{-1}(f))_{\mu \in \mathbb{N}}$ nach vorheriger Betrachtung auf $\mathbb{E}$ kompakt gegen f konvergiert, und erhalten damit die Behauptung

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^t f(z, t) = f(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{E}.$$

Schritt 2: Konstruktion der Funktion λ , welche sich später als $\frac{1}{\kappa}$ herausstellen wird. Wir wenden den Hilfssatz 3.35 an. Daher können wir g_t zu einem Homöomorphismus von $\overline{\mathbb{E}}$ nach $\overline{G_t} = \overline{\mathbb{C}}$ für alle $t \geq 0$ fortsetzen und wir bezeichnen die Fortsetzung wieder mit g_t . Wir definieren für feste $0 \leq s < t < \infty$ das Kurvensegment $\gamma_{s,t} = \gamma([s, t])$ und die Urbilder $B_{s,t} = g_s^{-1}(\gamma_{s,t})$ unter g_s sowie $J_{s,t} = g_t^{-1}(\gamma_{s,t})$ unter g_t . Wir definieren die Punkte $\lambda(s) := g_s^{-1}(\gamma(s)) \in B_{s,t}$, welcher für festes s unabhängig von t ist, sowie $\lambda(t) := g_t^{-1}(\gamma(t)) \in J_{s,t}$, welcher für festes t unabhängig von s ist. Da die Kurve $\gamma_{s,t}$ auf dem Rand von G_s liegt und g_s homöomorph ist, liegt ihr Urbild $B_{s,t}$ auf dem Rand des Einheitskreises. Das Bild $J_{s,t}$ ist eine Kurve, welche bis auf dem Endpunkt $\lambda(t) \in \partial \mathbb{E}$ im inneren des Einheitskreises befindet, da $\gamma_{s,t}$ bis auf den Punkt Endpunkt $\gamma(t)$ in dem Gebiet G_t liegt. Insgesamt erhalten wir eine wohldefinierte Funktion

$$\lambda: [0, \infty) \rightarrow \partial \mathbb{E}.$$

Schritt 3: Stetigkeit der Funktion λ . Dazu benötigen wir, dass gilt

$$\lim_{t \searrow s} B_{s,t} = \{ \lambda(s) \} \quad \text{und} \quad \lim_{s \nearrow t} J_{s,t} = \{ \lambda(t) \}.$$

Wir fixieren s . Nach Konstruktion gilt $\lambda(s) \in B_{s,t}$ für alle $s < t$. Es handelt sich um eine fallende Folge von Mengen, das heißt $B_{s,t_0} \supsetneq B_{s,t_1}$ für alle $s < t_0 < t_1$, denn g_s ist homöomorph und nach Konstruktion gilt $\gamma_{s,t_0} \supsetneq \gamma_{s,t_1}$ und daher $B_{s,t_0} = g_s^{-1}(\gamma_{s,t_0}) \supsetneq g_s^{-1}(\gamma_{s,t_1}) = B_{s,t_1}$. Wir zeigen, dass für alle Punkte $w \in B_{s,t} \setminus \{ \lambda(s) \}$ ein $c \in (s, t)$ existiert mit $w \notin B_{s,r}$ für alle $s < r \leq c$. Sei $w \in B_{s,t}$ beliebig, dann liegt der Punkt $g_s(w)$ auf der Kurve $\gamma_{s,t}$. Das heißt es existiert ein $d \in [s, t]$ mit $\gamma(d) = g_s(w)$. Wegen $g_s(w) \neq \lambda(s)$ folgt $s < d$. Wir wählen $c \in (s, d)$ beliebig und nach vorheriger Betrachtung liegt die Menge $B_{s,c}$ in $B_{s,t}$ und wegen $d \notin [s, c]$ liegt der Punkt $\gamma(d)$ wegen der Injektivität von γ nicht auf dem Kurvenstück $\gamma_{s,c}$. Damit ist der Punkt w nicht in $B_{s,c} = g_s^{-1}(\gamma_{s,c})$ enthalten und folglich gilt $w \notin B_{s,d}$ für alle $s < d \leq c$. Insgesamt haben wir damit $\lim_{t \searrow s} B_{s,t} = \{ \lambda(s) \}$ gezeigt. Der andere Grenzwert $\lim_{s \nearrow t} J_{s,t} = \{ \lambda(t) \}$ lässt sich analog durch Verwendung von g_s statt g_t berechnen.

Wir definieren für feste $0 \leq s < t < \infty$ die Funktionen

$$h_{s,t}: \overline{\mathbb{E}} \rightarrow \overline{\mathbb{E}}, \quad h_{s,t}(z) = g_t^{-1}(g_s(z)).$$

Diese Funktionen sind wohldefiniert, homöomorph und wegen $G_s \subset G_t$ holomorph auf $\mathbb{E}$. Nach Konstruktion gilt $h_{s,t}(B_{s,t}) = J_{s,t}$ und für das Bild von $\mathbb{E}$ erhalten wir

$$h_{s,t}(\mathbb{E}) = g_t^{-1}(g_s(\mathbb{E})) = g_t^{-1}(G_s) = g_t^{-1}(G_t \setminus \gamma_{s,t}) = \mathbb{E} \setminus g_t^{-1}(\gamma_{s,t}) = \mathbb{E} \setminus J_{s,t}.$$

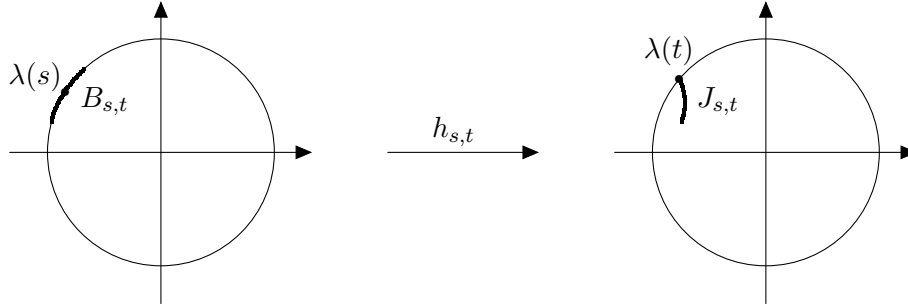


Abbildung 3.3

Die Funktion $h_{s,t}$ ist als Verkettung von schlichten Funktionen schlicht auf $\mathbb{E}$ mit $h_{s,t}(0) = 0$. Daher können wir das 1/4-Theorem 3.5 auf $h_{s,t}$ anwenden und wir folgern, dass die Scheibe $B_{\frac{r}{4}}(0)$ mit Radius $r = h'_{s,t}(0) = (g_t^{-1} \circ g_s)'(0) = e^{s-t}$ im Bild $h_{s,t}(\mathbb{E})$ enthalten ist. Also gilt $J_{s,t} \cap B_{\frac{r}{4}}(0) = \emptyset$. Wir werden $h_{s,t}$ holomorph nach $\mathbb{C} \setminus B_{s,t}$ fortsetzen. Dazu benötigen wir die geänderte Version des Schwarzen Spiegelungsprinzip 3.36. Bevor wir den Hilfssatz anwenden können, müssen wir zeigen, dass $|h_{s,t}(z)| = 1$ für alle Punkte $z \in \partial\mathbb{E} \setminus B_{s,t}$ gilt. Angenommen es gibt ein $z_0 \in \partial\mathbb{E} \setminus B_{s,t}$ mit $|h_{s,t}(z_0)| \neq 1$. Dann folgt $|h_{s,t}(z_0)| < 1$, da die Funktion $h_{s,t}$ nur Werte in $\overline{\mathbb{E}}$ besitzt. Außerdem wissen wir, dass $h_{s,t}$ homöomorph ist und z_0 auf dem Rand von $\partial\mathbb{E}$ liegt, daher muss der Bildpunkt $h_{s,t}(z_0)$ ebenfalls auf dem Rand des Bildes liegen. Das heißt $h_{s,t}(z_0) \in \partial h_{s,t}(\overline{\mathbb{E}}) = J_{s,t} \cup \partial\mathbb{E}$. Wegen $|h_{s,t}(z_0)| < 1$ erhalten wir $h_{s,t}(z_0) \in J_{s,t} \setminus \{\lambda(t)\}$ und damit liegt der Punkt z_0 auf der Kurve $B_{s,t}$. Das ist aber ein Widerspruch zur Wahl von z_0 . Also gilt $|h_{s,t}(z)| = 1$ für alle Punkte $z \in \partial\mathbb{E} \setminus B_{s,t}$ und wir können die geänderte Version des Schwarzen Spiegelungsprinzip anwenden. Wir bezeichnen mit $J_{s,t}^*$ die an dem Einheitskreis gespiegelte Kurve $J_{s,t}$. Wir erhalten dann eine schlichte und holomorphe Funktion, welche wir wieder mit $h_{s,t}$ bezeichnen

$$h_{s,t}: \mathbb{C} \setminus B_{s,t} \rightarrow \mathbb{C} \setminus (J_{s,t} \cup J_{s,t}^*), \quad h_{s,t}(z) := \begin{cases} \overline{\frac{1}{h_{s,t}(\frac{1}{\bar{z}})}} & , z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{E}} \\ h_{s,t}(z) & , z \in \overline{\mathbb{E}} \setminus B_{s,t} \end{cases}.$$

Aus $J_{s,t} \cap B_{\frac{e^{s-t}}{4}}(0) = \emptyset$ folgt, dass die gespiegelte Kurve $J_{s,t}^*$ und insbesondere auch $J_{s,t}$ in der Scheibe $B_{4e^{t-s}}(0)$ enthalten ist. Wir zeigen, dass $z \mapsto \frac{h_{s,t}(z)}{z}$ auf $\overline{\mathbb{C}} \setminus B_{s,t}$ holomorph ist. Die

einigen kritischen Punkte sind 0 und ∞ . Wegen $h_{s,t}(0) = 0$ ist die Singularität in 0 hebbbar. Wir betrachten also noch den Punkt ∞

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{h_{s,t}(z)}{z} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{h_{s,t}(\frac{1}{z})} \frac{1}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \overline{\left(\frac{\bar{z}}{h_{s,t}(\bar{z})} \right)} = \overline{\left(\frac{1}{h'_{s,t}(0)} \right)} = e^{t-s} < \infty.$$

Damit folgt die Holomorphie von $z \mapsto \frac{h_{s,t}(z)}{z}$ auf $\overline{\mathbb{C}} \setminus B_{s,t}$. Daher nimmt die Funktion $h_{s,t}$ ihr Maximum auf dem Rand an und wir erhalten wegen $J_{s,t} \cup J_{s,t}^* \subset B_{4e^{t-s}}(0)$ folgende Abschätzung

$$\left| \frac{h_{s,t}(z)}{z} \right| \leq 4e^{t-s} \quad \text{für alle } z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus B_{s,t}$$

Wir zeigen, dass $h_{s,t}(z)$ für $t \rightarrow s$ auf $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{\lambda(s)\}$ kompakt gegen die Identität konvergiert. Sei also $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine beliebige konvergente Folge mit $s < t_k < \infty$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und Grenzwert s . Wegen $\left| \frac{h_{s,t}(z)}{z} \right| \leq 4e^{t-s}$ ist die Familie $\left\{ \frac{h_{s,t_k}(z)}{z} \mid k \in \mathbb{N} \right\}$ lokal gleichmäßig beschränkt und nach dem Satz von Montel normal. Das heißt, existiert eine Teilfolge $(t_{k(n)})_{n \in \mathbb{N}}$, sodass die Folge $(\frac{h_{s,t_{k(n)}}(z)}{z})_{k \in \mathbb{N}}$ kompakte gegen eine holomorphe Funktion φ konvergiert. Dabei konvergiert die Folge kompakt auf $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{\lambda(s)\}$, denn für alle Kompakte $K \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus \{\lambda(s)\}$ existiert wegen $\lim_{t \searrow s} B_{s,t} = \{\lambda(s)\}$ ein t_0 mit $K \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus B_{s,t}$ für alle $s < t < t_0$. Für $T := \max_{k \in \mathbb{N}} \{t_k\}$ folgt

$$|\varphi(z)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{h_{s,t_{k(n)}}(z)}{z} \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} 4e^{t_{k(n)}-s} \leq 4e^{T-s} \quad \text{für alle } z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \{\lambda(s)\}.$$

Das heißt, φ ist beschränkt. Wir können nun den Satz von Liouville unter Anwendung einer Möbiustransformation benutzen. Daher ist φ eine ganze und beschränkte Funktion und wegen

$$\varphi(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h_{s,t_{k(n)}}(z)}{z} \Big|_{z=0} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{s-t_{k(n)}} = 1$$

gilt $\varphi \equiv 1$. Da wir zu jeder beliebigen Folge mit Grenzwert s eine Teilfolge finden, die diese Argumentation erfüllt, folgt mit dem Montelschen Konvergenzkriterium, dass

$$\lim_{t \searrow s} \frac{h_{s,t}(z)}{z} = 1$$

auf $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{\lambda(s)\}$ kompakt konvergiert und damit folgt insbesondere nach Multiplikation der Identität $\lim_{t \searrow s} h_{s,t}(z) = z$ bezüglich kompakter Konvergenz. Ähnlich lässt sich zeigen, dass die Funktionen $h_{s,t}^{-1}$ für $s \rightarrow t$ auf $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{\lambda(t)\}$ kompakt gegen die Identität konvergiert. Wir zeigen, dass λ rechtsstetig ist. Sei also $s \geq 0$ und $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Wegen $\lim_{t \searrow s} B_{s,t} = \{\lambda(s)\}$ existiert ein $\delta_1 > 0$, sodass für alle $s < t < s + \delta_1$ die Kurve $B_{s,t}$ in der Scheibe $B_\varepsilon(\lambda(s))$ enthalten ist. Wir wählen $z_0 \in \partial B_\varepsilon(\lambda(s))$ beliebig und erhalten $|\lambda(s) - z_0| = \varepsilon$. Wegen der kompakten und damit punktwisen Konvergenz von $h_{s,t}$ gegen die Identität existiert ein $\delta_2 > 0$, sodass $|z_0 - h_{s,t}(z_0)| < \varepsilon$ für alle $s < t < s + \delta_2$ gilt. Nach Konstruktion von δ_1 liegen die Kurven $J_{s,t}$ und $J_{s,t}^*$ im inneren des Bildes $h_{s,t}(B_\varepsilon(\lambda(s)))$ und damit insbesondere auch der Punkt $\lambda(t)$ für

alle $s < t < s + \delta_1$. Da $h_{s,t}$ kompakt gegen in die Identität konvergiert, konvergiert der Durchmesser von $h_{s,t}(\partial B_\varepsilon(\lambda(s)))$ gegen den Durchmesser von $\partial B_\varepsilon(\lambda(s))$ also 2ε . Daher existiert ein $0 < \delta_3$, sodass für alle $s < t < s + \delta_3$ der Durchmesser von $h_{s,t}(B_\varepsilon(\lambda(s)))$ weniger als 3ε beträgt. Wir erhalten die Abschätzung $|h_{s,t}(z_0) - \lambda(t)| < 3\varepsilon$. Damit können wir nun die Stetigkeit von rechts folgern, denn für $\delta = \min \{ \delta_i \mid i = 1, 2, 3 \}$ gilt

$$|\lambda(s) - \lambda(t)| \leq |\lambda(s) - z_0| + |z_0 - h_{s,t}(z_0)| + |h_{s,t}(z_0) - \lambda(t)| < 5\varepsilon \quad \text{für alle } s < t < \delta.$$

Die Stetigkeit von links lässt sich analog zeigen, indem man $h_{s,t}^{-1}$ betrachtet.

Schritt 4: Wir zeigen die Differentialgleichung. Für feste $0 \leq s < t < \infty$ definieren wir

$$\Phi_{s,t}: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \log \left(\frac{h_{s,t}(z)}{z} \right).$$

Es besitzt $h_{s,t}$ nur eine Nullstelle in $z = 0$ und somit besitzt $z \mapsto \frac{h_{s,t}(z)}{z}$ keine Nullstellen. Daher existiert eine holomorphe Logarithmusfunktion. Wir wählen den Zweig des Logarithmus mit $\Phi_{s,t}(0) = s - t$. Insgesamt folgt die Holomorphie und Wohldefiniertheit von $\Phi_{s,t}$ auf $\mathbb{E}$. Nach vorheriger Betrachtung ist $h_{s,t}$ stetig auf dem Rand $\partial\mathbb{E}$ fortsetzbar und das Bild $h_{s,t}(\partial\mathbb{E})$ unter der homöomorphen Fortsetzung liegt außerhalb der Kugel $B_{\frac{e^{s-t}}{4}}$. Daher besitzt $h_{s,t}$ keine Nullstellen auf dem Rand und es folgt, dass auch $\Phi_{s,t}$ stetig fortsetzbar ist. Damit ist $\Phi_{s,t}$ auf $\overline{\mathbb{E}}$ stetig und auf $\mathbb{E}$ holomorph. Wir wenden die Schwarzsche Integralformel 3.37 an und folgern

$$\Phi_{s,t}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{E}} \frac{\operatorname{Re}(\Phi_{s,t}(\omega))}{\omega} \frac{\omega + z}{\omega - z} d\omega + i \operatorname{Im}(\Phi_{s,t}(0)) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{E}.$$

Wir werden diese Gleichung weiter auflösen. Zum einen gilt $\operatorname{Im}(\Phi(0)) = \operatorname{Im}(s - t) = 0$ und zum anderen hatten wir bereits gezeigt, dass $\left| \frac{h_{s,t}(z)}{z} \right| = 1$ für alle $z \in \partial\mathbb{E} \setminus B_{s,t}$ gilt, damit folgt

$$\operatorname{Re}(\Phi_{s,t}(z)) = \operatorname{Re} \left[\log \left(\frac{h_{s,t}(z)}{z} \right) \right] = \ln \left| \frac{h_{s,t}(z)}{z} \right| = \ln(1) = 0 \quad \text{für alle } z \in \partial\mathbb{E} \setminus B_{s,t}.$$

Wir definieren nun $e^{i\alpha}$ und $e^{i\beta}$ als den Anfangs- und Endpunkt der Kurve $B_{s,t}$ und erhalten

$$\begin{aligned} \Phi_{s,t}(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{B_{s,t}} \frac{\operatorname{Re}(\Phi_{s,t}(\omega))}{\omega} \frac{\omega + z}{\omega - z} d\omega + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{E} \setminus B_{s,t}} \frac{\operatorname{Re}(\Phi_{s,t}(\omega))}{\omega} \frac{\omega + z}{\omega - z} d\omega + i \operatorname{Im}(\Phi_{s,t}(0)) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \operatorname{Re}(\Phi_{s,t}(e^{i\varphi})) \frac{e^{i\varphi} + z}{e^{i\varphi} - z} d\varphi \end{aligned}$$

für alle $z \in \mathbb{E}$. Speziell für $z = 0$ erhalten wir die Gleichung

$$\Phi_{s,t}(0) = s - t = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \operatorname{Re} [\Phi_{s,t}(e^{i\varphi})] d\varphi.$$

Wir werden z durch $f(z, s) = g_s^{-1}(f(z))$ ersetzen. Dies ist wohldefiniert, da $f_s(\mathbb{E}) \subset \mathbb{E}$ gilt. Damit erhalten wir unter Anwendung von $h_{s,t} \circ f_s = f_t$

$$\Phi_{s,t}(f_s(z)) = \log \frac{f_t(z)}{f_s(z)} = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \operatorname{Re} [\Phi_{s,t}(e^{i\varphi})] \frac{e^{i\varphi} + f_s(z)}{e^{i\varphi} - f_s(z)} d\varphi \quad \text{für alle } z \in \mathbb{E}.$$

Wir fixieren $z \in \mathbb{E}$ und wenden den Mittelwertsatz der Integralrechnung auf den Real- und Imaginärteil getrennt an

$$\begin{aligned} \log \frac{f_t(z)}{f_s(z)} &= \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \operatorname{Re} [\Phi_{s,t}(e^{i\varphi})] \left[\operatorname{Re} \left(\frac{e^{i\varphi} + f_s(z)}{e^{i\varphi} - f_s(z)} \right) + i \operatorname{Im} \left(\frac{e^{i\varphi} + f_s(z)}{e^{i\varphi} - f_s(z)} \right) \right] d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \operatorname{Re}(\Phi_{s,t}(\varphi)) d\varphi \left[\operatorname{Re} \left(\frac{e^{i\sigma} + f_s(z)}{e^{i\sigma} - f_s(z)} \right) + i \operatorname{Im} \left(\frac{e^{i\tau} + f_s(z)}{e^{i\tau} - f_s(z)} \right) \right] \\ &= (s - t) \left[\operatorname{Re} \left(\frac{e^{i\sigma} + f_s(z)}{e^{i\sigma} - f_s(z)} \right) + i \operatorname{Im} \left(\frac{e^{i\tau} + f_s(z)}{e^{i\tau} - f_s(z)} \right) \right], \end{aligned}$$

wobei $\sigma, \tau \in [\alpha, \beta]$ gilt und diese von s und t abhängig sind. Damit liegen die Punkte $e^{i\sigma}$ und $e^{i\tau}$ auf der Kurve $B_{s,t}$. Wir wollen nach Division von $(t - s)$ den Grenzwert $t \rightarrow s$ bestimmen. Auf der linken Seite erhalten wir die logarithmische Ableitung und für die rechte Seite folgern wir $e^{i\sigma}, e^{i\tau} \xrightarrow{t \rightarrow s} \lambda(s)$, da die Kurve $B_{s,t}$ für $t \rightarrow s$ zu dem Punkt $\{\lambda(s)\}$ zusammenschrumpft. Insgesamt erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial s} \log(f_s(z)) = \frac{\frac{\partial}{\partial s} f_s(z)}{f_s(z)} = - \lim_{t \searrow s} \left[\operatorname{Re} \left(\frac{e^{i\sigma} + f_s(z)}{e^{i\sigma} - f_s(z)} \right) + i \operatorname{Im} \left(\frac{e^{i\tau} + f_s(z)}{e^{i\tau} - f_s(z)} \right) \right] = - \frac{\lambda(s) + f_s(z)}{\lambda(s) - f_s(s)}.$$

Definieren wir $\kappa(t) = \frac{1}{\lambda(t)}$ so folgt die gesuchte Gleichung und es ist κ stetig, da $|\lambda|$ konstant 1 und stetig ist. Wir haben damit gezeigt, dass für $t \rightarrow s$ die Differentialgleichung für alle $z \in \mathbb{E}$ erfüllt wird. Mit dem gleichen Argument lässt sich zeigen, dass die Differentialgleichung für $s \rightarrow t$ erfüllt wird, indem man berücksichtigt, dass für $s \rightarrow t$ die Kurve $B_{s,t}$ gegen $\lambda(t)$ konvergiert. Dies ergibt sich allerdings aus der Stetigkeit von λ . $\square$

Bemerkung 3.39. Wir haben gezeigt, dass für jede Schlitzabbildung $f \in S$ eine stetige Funktion $\kappa: [0, \infty) \rightarrow \partial\mathbb{E}$ existiert, sodass $\lim_{t \rightarrow \infty} e^t f(z, t)$ kompakt gegen f konvergiert, wobei $f(z, t)$ Lösungen der Löwner-Differentialgleichungen in Abhängigkeit von κ sind. Außerdem bildet jede Funktion $f(z, t)$ den Einheitskreis biholomorph auf $\mathbb{E} \setminus |J|$ ab, wobei J eine offene Jordankurve in $\mathbb{E}$ ist, welche einen Endpunkt auf dem Rand des Einheitskreises besitzt.

Man könnte sich jetzt die Frage stellen, ob für jede stetige Funktion $\kappa: [0, \infty) \rightarrow \partial\mathbb{E}$ die Lösungen $f(z, t)$ einen Bildbereich besitzt, welcher einem geschlitzten Einheitskreis entspricht. Allerdings ist dies nicht der Fall. Es muss sogar die resultierende Grenzfunktion $\lim_{t \rightarrow \infty} e^t f(z, t)$ im Allgemeinen keine Schlitzabbildung sein. Es ist nicht bekannt unter welchen Bedingungen die Funktion κ derartige Lösungen $f(z, t)$ erzeugt, sodass das Bild ein geschlitzter Einheitskreis ist und die Grenzfunktion $f \in S$ ein Schlitzgebiet ist.

Wir geben ein explizites Beispiel für eine stetige Funktion $\kappa(t) = [e^{it} + i\sqrt{1 - e^{-2t}}]^3$ an dessen Bild kein geschlitzter Einheitskreis ist.

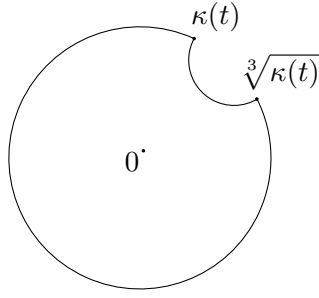


Abbildung 3.4

Bekannt ist aber, unter welchen Bedingungen die resultierende Grenzfunktion f in S liegt. Unter anderem genügt es bereits, dass die Funktion $\kappa: [0, \infty) \rightarrow \partial\mathbb{E}$ stetig ist. Wir werden diese Aussage für nächsten Satz benötigen und verweisen an dieser Stelle für die Verallgemeinerung der Aussage in unseren Ausblick Satz 5.1 oder für eine detaillierte Herleitung auf [Hay].

Korollar 3.40. *Sei $f \in S$. Dann gilt*

$$\left| \arg \frac{f(z)}{z} \right| \leq \ln \left[\frac{1 + |z|}{1 - |z|} \right] \quad \text{für alle } z \in \mathbb{E},$$

wobei wir den Zweig des Logarithmus so wählen, dass $\arg \frac{f(z)}{z}|_{z=0} = 0$ gilt. Diese Ungleichung ist scharf für alle $z \in \mathbb{E}$.

Beweis. Da die Menge der Schlitzabbildungen dicht in S liegt, genügt es nach Bemerkung 3.24 diese Abschätzung für Schlitzabbildungen zu zeigen. Wir können also ohne Einschränkung annehmen, dass f eine Schlitzabbildung ist. Nach dem Hauptsatz der Löwnertheorie existiert eine stetige Funktion $\kappa(t): [0, \infty) \rightarrow \partial\mathbb{E}$, sodass gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^t f(z, t) = f(z) \quad \text{mit} \quad \frac{\partial f(z, t)}{\partial t} = -f(z, t) \frac{1 + \kappa(t)f(z, t)}{1 - \kappa(t)f(z, t)} \quad \text{für alle } t \in [0, \infty).$$

Wir wählen $z \in \mathbb{E}$ beliebig. Wir hatten im Beweis der Löwner-Theorie gesehen, dass gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} \log f(z, t) = \frac{\frac{\partial}{\partial t} f(z, t)}{f(z, t)} = -\frac{1 + \kappa(t)f(z, t)}{1 - \kappa(t)f(z, t)} \quad \text{für alle } t \in [0, \infty).$$

Wir teilen diese Gleichung nun in Real- und Imaginärteil auf und erhalten für den Realteil

$$\operatorname{Re} \frac{\partial}{\partial t} \log f(z, t) = \frac{\partial}{\partial t} |f(z, t)| = -\frac{1 - |f(z, t)|^2}{|1 - \kappa(t)f(z, t)|^2} \quad \text{für alle } t \in [0, \infty)$$

sowie für den Imaginärteil

$$\operatorname{Im} \frac{\partial}{\partial t} \log f(z, t) = \frac{\partial}{\partial t} \arg f(z, t) = -\frac{2 \operatorname{Im}[\kappa(t)f(z, t)]}{|1 - \kappa(t)f(z, t)|^2} \quad \text{für alle } t \in [0, \infty).$$

Wir wenden für beliebiges $t \in [0, \infty)$ den Hauptsatz der Integralrechnung an und erhalten

$$\arg \frac{f(z, t)}{z} = \int_0^t \frac{\partial}{\partial s} \arg f(z, s) ds.$$

Dies werden wir in unserer nächsten Rechnung verwenden

$$\left| \arg \frac{e^t f(z, t)}{z} \right| = \left| \arg \frac{f(z, t)}{z} \right| = \left| \int_0^t \frac{\partial}{\partial s} \arg f(z, s) ds \right|.$$

Wir setzen den Imaginärteil ein und erhalten

$$\left| \int_0^t \frac{\partial}{\partial s} \arg f(z, s) ds \right| = \left| \int_0^t \frac{-2 \operatorname{Im}[\kappa(s) f(z, s)]}{|1 - \kappa(s) f(z, s)|^2} ds \right| \leq \int_0^t \frac{2 |f(z, s)|}{|1 - \kappa(s) f(z, s)|^2} ds.$$

Im nächsten Schritt führen wir eine 1-Ergänzung mit dem Realteil durch und substituieren

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{2 |f(z, s)|}{|1 - \kappa(s) f(z, s)|^2} ds &= \int_0^t \frac{2 |f(z, s)|}{|1 - \kappa(s) f(z, s)|^2} \frac{|1 - \kappa(s) f(z, s)|^2}{|f(z, s)| (1 - |f(z, s)|^2)} \left(\frac{\partial}{\partial s} |f(z, s)| \right) ds \\ &= \int_0^t \frac{2}{1 - |f(z, s)|^2} \left(\frac{\partial}{\partial s} |f(z, s)| \right) ds = \int_{|f(z, 0)|}^{|f(z, t)|} \frac{-2}{1 - x^2} dx \\ &= \ln \left[\frac{1 + |f(z, 0)|}{1 - |f(z, 0)|} \right] - \ln \left[\frac{1 + |f(z, t)|}{1 - |f(z, t)|} \right] \leq \ln \left[\frac{1 + |z|}{1 - |z|} \right], \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt verwendet haben, dass $f(z, 0) = z$ und $|f(z, t)| < 1$ für alle $t \in [0, \infty)$ und $z \in \mathbb{E}$ gilt. Insgesamt erhalten wir die Behauptung, denn es gilt

$$\left| \arg \frac{f(z)}{z} \right| = \left| \arg \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^t f(z, t)}{z} \right| = \lim_{t \rightarrow \infty} \left| \arg \frac{f(z, t)}{z} \right| \leq \ln \left[\frac{1 + |z|}{1 - |z|} \right].$$

Wir zeigen, dass die Abschätzung nach oben für alle $z_0 \in \mathbb{E}$ scharf ist. Für $z_0 = 0$ ist dies offensichtlich der Fall, sei also $z_0 \neq 0$. Dazu müssen wir eine Abbildung $f \in S$ konstruieren, sodass gilt

$$\arg \frac{f(z_0)}{z_0} = \ln \left[\frac{1 + |z_0|}{1 - |z_0|} \right].$$

Unser Ziel ist es eine stetige Funktion κ zu konstruieren, um dann mit der Bemerkung 3.39 zu folgern, dass f in S liegt. Das heißt, wir suchen Funktion $f(z, t)$, sodass für z_0 gilt

$$\arg \frac{f(z_0)}{z_0} = \lim_{t \rightarrow \infty} \arg \frac{e^t f(z_0, t)}{z_0} = \ln \left[\frac{1 + |z_0|}{1 - |z_0|} \right].$$

Wir wollen notwendige Eigenschaften betrachten, damit ein solches κ überhaupt existieren kann. Wir erhalten aus dem ersten Teil des Beweises eine notwendige Bedingung für Gleichheit

$$\operatorname{Im}[\kappa(t) f(z_0, t)] = -|f(z_0, t)| \quad \text{für alle } t \in [0, \infty).$$

Folglich gilt für den Realteil die Bedingung $\operatorname{Re}[\kappa(t)f(z_0, t)] = 0$ für alle $t \in [0, \infty)$. Wir setzen diese zusätzlichen Informationen in die Gleichungen für den Real- und Imaginärteil der Differentialgleichung ein und erhalten für den Realteil

$$\frac{\partial}{\partial t} |f(z_0, t)| = -|f(z_0, t)| \frac{1 - |f(z_0, t)|^2}{1 + |f(z_0, t)|^2} \quad \text{für alle } t \in [0, \infty)$$

sowie für den Imaginärteil

$$\frac{\partial}{\partial t} \arg f(z, t) = \frac{-2|f(z_0, t)|}{1 + |f(z_0, t)|^2} \quad \text{für alle } t \in [0, \infty).$$

Wir berechnen folgendes Integral für festes t durch 1-Ergänzung und Substitution

$$-\int_0^t ds = \int_0^t \frac{1 + |f(z_0, s)|}{|f(z_0, s)| (1 - |f(z_0, s)|^2)} \left(\frac{\partial}{\partial s} |f(z_0, s)| \right) ds = \int_{|f(z_0, 0)|}^{|f(z_0, t)|} \frac{1 + x^2}{x(1 - x^2)} dx.$$

Durch Verwendung von $f(z_0, 0) = z_0$ und weiteres Ausrechnen der Integrale ergibt dies

$$\frac{|f(z_0, t)|}{1 - |f(z_0, t)|^2} = e^{-t} \frac{|z_0|}{1 - |z_0|^2} \quad \text{für alle } t \in [0, \infty).$$

Durch diese Gleichung wird $|f(z_0, t)|$ für alle $t \in [0, \infty)$ eindeutig bestimmt, da die Funktion $x \mapsto \frac{x}{1-x^2}$ das Intervall $[0, 1)$ bijektiv auf $[0, \infty)$ abbildet. Wir wollen nun das Argument der Funktion $f(z_0, t)$ bestimmen. Wie zuvor erhalten wir durch 1-Ergänzung und Substitution

$$\arg \frac{f(z_0, t)}{z_0} = \int_0^t \frac{\partial}{\partial s} \arg f(z_0, s) ds = \log \left[\frac{1 + |z_0|}{1 - |z_0|} \right] - \log \left[\frac{1 + |f(z_0, t)|}{1 - |f(z_0, t)|} \right].$$

Durch diese Gleichung wird das Argument von $f(z_0, t)$ und folglich ganz $f(z_0, t)$ eindeutig für alle $t \in [0, \infty)$ bestimmt. Wegen $\operatorname{Re}[\kappa(t)f(z_0, t)] = 0$ und $\operatorname{Im}[\kappa(t)f(z_0, t)] = -|f(z_0, t)|$ für alle $t \in [0, \infty)$ ist auch die gesuchte Funktion κ bestimmt durch

$$\kappa(t) = \frac{-i|f(z_0, t)|}{f(z_0, t)} \quad \text{für alle } t \in [0, \infty).$$

Nach Konstruktion ist die Funktion $f(z_0, t)$ stetig. Daher ist κ stetig und nimmt nur Werte auf dem Rand des Einheitskreises an. Wir können nun die Bemerkung 3.39 anwenden und erhalten Funktionen $f(z, t)$ mit $\lim_{t \rightarrow \infty} e^t f(z, t) = f(z)$ für eine Funktion f in S . Nach Konstruktion besitzt κ für z_0 gerade die Lösungen $f(z_0, t)$ und somit besitzt f die gewünschte Eigenschaft, denn wie oben erhalten wir unter Verwendung von $\lim_{t \rightarrow \infty} f(z, t) = 0$ für alle $z \in \mathbb{E}$

$$\arg \frac{f(z_0)}{z_0} = \lim_{t \rightarrow \infty} \arg \frac{f(z_0, t)}{z_0} = \lim_{t \rightarrow \infty} \log \left[\frac{1 + |z_0|}{1 - |z_0|} \right] - \log \left[\frac{1 + |f(z_0, t)|}{1 - |f(z_0, t)|} \right] = \log \left[\frac{1 + |z_0|}{1 - |z_0|} \right].$$

Insgesamt haben wir damit gezeigt, dass die Grenze scharf ist. $\square$

Korollar 3.41. *Sei $f \in S$. Dann gilt*

$$\left| \arg \frac{zf'(z)}{f(z)} \right| \leq \ln \left[\frac{1+|z|}{1-|z|} \right] \quad \text{für alle } z \in \mathbb{E},$$

wobei wir den Zweig des Logarithmus so wählen, dass $\arg \frac{zf'(z)}{f(z)}|_{z=0} = 0$ gilt. Diese Ungleichung ist scharf für alle $z \in \mathbb{E}$.

Beweis. Sei $f \in S$ beliebig. Für $z_0 = 0$ erhalten wir Gleichheit, sei daher $z_0 \in \mathbb{E} \setminus \{0\}$ beliebig. Wir betrachten unter Verwendung von Proposition 3.2 (iii) die Funktion $g \in S$ mit

$$g: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{f\left(\frac{z+z_0}{1+\overline{z_0}z}\right) - f(z_0)}{(1-|z_0|)^2 f'(z_0)}.$$

Nach Konstruktion gilt

$$\frac{g(-z_0)}{-z_0} = \frac{f(z_0)}{z_0 f'(z_0)} \frac{1}{(1-|z_0|)^2}.$$

Unter Verwendung von Korollar 3.40 erhalten wir

$$\ln \left[\frac{1+|z_0|}{1-|z_0|} \right] \geq \left| \arg \frac{g(z_0)}{-z_0} \right| = \left| \arg \left(\frac{f(z_0)}{z_0 f'(z_0)} \frac{1}{(1-|z_0|)^2} \right) \right| = \left| -\arg \frac{z_0 f'(z_0)}{f(z_0)} \right| = \left| \arg \frac{z_0 f'(z_0)}{f(z_0)} \right|$$

Mit dem vorherigen Korollar 3.40 erhalten wir auch, dass diese Grenze scharf ist. $\square$

4. Anwendung: Sternförmige und konvexe Funktionen

In diesem Kapitel werden wir zwei weitere Teilfamilien der Familie S betrachten. Wir werden Funktionen mit sternförmigen und konvexen Bildbereich betrachten und werden sehen, dass für die sternförmigen Funktionen die gleichen Abschätzungen gelten wie für die Familie S selbst, da die Koebe-Funktion ein sternförmiges Bild $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -\frac{1}{4}]$ besitzt. Aber für die konvexen Funktionen werden wir schärfere Abschätzungen herleiten können. Doch zuvor müssen wir analytische Charakterisierungen für diese Funktionen herleiten.

Definition 4.1. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Dann heißt G

- (i) *sternförmig mit Zentrum* $\omega \in G$, falls die Verbindungsstrecken $\{(1-t)\omega + tz \mid t \in [0, 1]\}$ für alle $z \in G$ vollständig in G liegen.
- (ii) *konvex*, falls die Verbindungsstrecken $\{(1-t)\omega + tz \mid t \in [0, 1]\}$ für alle $\omega, z \in G$ vollständig in G liegen. Mit anderen Worten ist G sternförmig mit jedem Zentrum $\omega \in G$.

Definition 4.2. Seien $r \in (0, 1]$ und $f \in \mathcal{O}(B_r(0))$.

- (i) Die Funktion f heißt *sternförmig auf* $B_r(0)$ mit Zentrum $z_0 \in B_r(0)$, falls f schlicht und das Bild $f(B_r(0))$ sternförmig mit Zentrum $f(z_0)$ ist.

Notation: $S^* := \{f \in S \mid f \text{ ist sternförmig mit Zentrum } 0\} \subset S$.

- (ii) Die Funktion f heißt *konvex auf* $B_r(0)$, falls f schlicht und das Bild $f(B_r(0))$ konvex ist.

Notation: $S_k := \{f \in S \mid f \text{ ist konvex}\} \subset S^* \subset S$.

Wir werden zunächst zeigen, dass die sternförmige und konvexe Funktionen auch nach Einschränkung auf kleiner Scheiben weiterhin sternförmig und konvex sind.

Lemma 4.3. Seien $0 < r < s \leq 1$ und $f \in \mathcal{O}(B_s(0))$ mit $f(0) = 0$ sei sternförmig auf $B_s(0)$ mit Zentrum 0. Dann ist die Menge $f(B_r(0))$ sternförmig mit Zentrum 0.

Beweis. Wir nehmen ohne Einschränkung an es gelte $s = 1$. Ansonsten betrachte wir $\tilde{r} := \frac{r}{s}$ und $\tilde{f}: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $z \mapsto f(sz)$. Die Funktion $\tilde{f}$ ist sternförmig auf $\mathbb{E}$ mit Zentrum 0 und es gilt $f(B_r(0)) = \tilde{f}(B_{\tilde{r}}(0))$. Sei $z_1 \in B_r(0) \setminus \{0\}$ und $t \in (0, 1)$ beliebig aber fest. Da f sternförmig und somit definitionsgemäß schlicht ist, existiert eine Umkehrfunktion f^{-1} . Somit folgt, dass es genau ein $z_0 \in \mathbb{E}$ gibt mit

$$f(z_0) = (1-t)0 + tf(z_1) = tf(z_1).$$

Wir müssen zeigen, dass z_0 bereits in $B_r(0)$ liegt. Dazu definieren wir

$$g(z) := f^{-1}(tf(z)).$$

Die Funktion g ist wohldefiniert und holomorph auf $\mathbb{E}$, denn $tf(z)$ liegt für alle $z \in \mathbb{E}$ im Bild $f(\mathbb{E})$, da f sternförmig mit Zentrum 0 ist. Weiterhin gilt für z_1

$$g(z_1) = f^{-1}(tf(z_1)) = z_0.$$

Wegen $g(0) = 0$ und $|g(z)| < 1$ für alle $z \in \mathbb{E}$ folgt mit dem Lemma von Schwarz $|g(z)| \leq |z|$ für alle $z \in \mathbb{E}$. Wir setzen z_1 ein und erhalten $|g(z_1)| = |z_0| \leq |z_1| < r$. Also liegt z_0 in $B_r(0)$ und somit ist die Menge $f(B_r(0))$ sternförmig mit Zentrum 0. $\square$

Lemma 4.4. *Seien $0 < r < s \leq 1$ und $f \in \mathcal{O}(B_s(0))$ mit $f(0) = 0$ sei konvex auf $B_s(0)$. Dann ist die Menge $f(B_r(0))$ konvex.*

Beweis. Wir nehmen wie in Lemma 4.3 ohne Einschränkung an es gelte $s = 1$. Wir wählen zwei verschiedene Punkte $z_1, z_2 \in B_r(0)$ mit $|z_1| \leq |z_2|$ und $z_2 \neq 0$. Es sei $t \in (0, 1)$ beliebig. Wir wissen, da f konvex und definitionsgemäß schlicht ist, dass die Umkehrabbildung f^{-1} existiert. Also gibt es genau ein $z_0 \in \mathbb{E}$ mit

$$f(z_0) = (1 - t)f(z_1) + tf(z_2).$$

Wir müssen zeigen, dass z_0 in $B_r(0)$ liegt. Wir definieren die Funktion

$$g : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}, \quad z \mapsto f^{-1} \left((1 - t)f\left(\frac{z_1}{z_2}z\right) + tf(z) \right).$$

Es ist g wohldefiniert und holomorph, da f konvex ist. Weiterhin gilt für z_2

$$g(z_2) = f^{-1}((1 - t)f(z_1) + tf(z_2)) = f^{-1}(f(z_0)) = z_0.$$

Wegen $g(0) = 0$ und $|g(z)| \leq 1$ folgt mit dem Lemma von Schwarz $|g(z)| \leq |z|$ für alle $z \in \mathbb{E}$. Für z_2 erhalten wir somit $|g(z_2)| = |z_0| \leq |z_2| < r$. Daher liegt z_0 in $B_r(0)$ und die Menge $f(B_r(0))$ ist konvex. $\square$

Wir werden nun analytische Kriterien herleiten, um sternförmige und konvexe Funktionen zu charakterisieren. Dabei werden wir feststellen, dass die Familien der sternförmigen und der konvexe Funktionen eng mit der Familie der holomorphen Funktionen auf dem Einheitskreis mit positiven Realteil verwandt sind.

Satz 4.5. *Sei $f \in \mathcal{O}(\mathbb{E})$ mit $f(0) = 0$. Dann sind äquivalent:*

- (i) *Es ist f sternförmig auf $\mathbb{E}$ mit Zentrum 0.*
- (ii) *Es gilt $f'(0) \neq 0$ und $z \mapsto \frac{zf'(z)}{f(z)}$ ist auf $\mathbb{E}$ holomorph fortsetzbar mit*

$$\operatorname{Re} \left[\frac{zf'(z)}{f(z)} \right] > 0 \quad \text{für alle } z \in \mathbb{E}.$$

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Es sei f sternförmig auf $\mathbb{E}$ mit Zentrum 0, dann ist f definitionsgemäß schlicht. Also gilt $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{E}$ und wegen $f(0) = 0$ folgt aus der Injektivität $f(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{E} \setminus \{0\}$. Es besitzt f in 0 eine einfache Nullstelle, daher ist die Singularität der Funktion $z \mapsto \frac{zf'(z)}{f(z)}$ in 0 hebbar mit dem Wert $\frac{f'(0)}{f''(0)} = 1$.

Wir zeigen zunächst die schwächere Ungleichung

$$\operatorname{Re} \left[\frac{zf'(z)}{f(z)} \right] \geq 0 \quad \text{für alle } z \in \mathbb{E}.$$

Wir definieren die Funktion

$$h: [0, \infty) \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}, \quad (t, z) \mapsto f^{-1}(e^{-t}f(z)).$$

Für festes $t \in [0, \infty)$ ist $h_t := h(t, \cdot): \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ mit $z \mapsto h_t(z)$ wohldefiniert und holomorph, denn für alle $z \in \mathbb{E}$ liegt die Menge $\{e^{-t}f(z) \mid t \in [0, \infty)\}$ vollständig in $f(\mathbb{E})$, da f nach Voraussetzung sternförmig mit Zentrum 0 ist. Die Funktion $h(\cdot, z): [0, \infty) \rightarrow \mathbb{E}$ mit $t \mapsto h(t, z)$ ist für festes $z \in \mathbb{E}$ wohldefiniert und beliebig oft differenzierbar. Wir zeigen, dass $|h_t(z_0)|$ für festes $z_0 \in \mathbb{E}$ monoton fallend ist. In $z_0 = 0$ ist wegen $h_t(0) = f^{-1}(0) = 0$ für alle $t \in [0, \infty)$ nichts zu zeigen. Sei $z_0 \in \mathbb{E} \setminus \{0\}$ beliebig. Wir müssen zeigen, dass folgendes gilt

$$|h_{t_1}(z_0)| \geq |h_{t_2}(z_0)| \quad \text{für } 0 \leq t_1 < t_2 < \infty.$$

Der Punkt $e^{-t_1}f(z_0)$ liegt im Bild $f(\mathbb{E})$, da f sternförmig ist. Wegen der Injektivität von f existiert ein eindeutiges $w_1 \in \mathbb{E}$ mit $f(w_1) = e^{-t_1}f(z_0)$. Mit selber Argumentation erhalten wir ein eindeutiges $w_2 \in \mathbb{E}$ mit $f(w_2) = e^{-t_2}f(z_0)$. Damit müssen wir nur noch zeigen, dass gilt

$$|h_{t_1}(z_0)| = |f^{-1}(f(w_1))| = |w_1| \geq |w_2| = |f^{-1}(f(w_2))| = |h_{t_2}(z_0)|.$$

Wir betrachten die Funktion $h_{t_2-t_1}: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$. Wegen $t_2 - t_1 > 0$ ist die Funktion $h_{t_2-t_1}$ nach Konstruktion holomorph mit $h_{t_2-t_1}(0) = 0$. Daher können wir das Lemma von Schwarz anwenden. Wir erhalten $|h_{t_2-t_1}(z)| \leq |z|$ für alle $z \in \mathbb{E}$. Wir setzen w_1 ein und erhalten die Behauptung

$$|w_1| \geq |h_{t_2-t_1}(w_1)| = |f^{-1}(e^{-t_2+t_1}f(w_1))| = |f^{-1}f(w_2)| = |w_2|.$$

Wir haben also gezeigt, dass $|h_t(z)|$ monoton fallend ist. Folglich ist auch $|h_t(z)|^2$ monoton fallend, da keine negativen Werte angenommen werden können. Wir werden damit nun die schwächere Ungleichung herleiten. Sei $z_0 \in \mathbb{E} \setminus \{0\}$ beliebig. Da $h(\cdot, z_0)$ differenzierbar ist, erhalten wir nach vorheriger Überlegung $\frac{\partial}{\partial t} |h_t(z_0)|^2 \leq 0$ für alle $t \in (0, \infty)$. Wir berechnen weiter

$$\begin{aligned} 0 &\geq \frac{\partial}{\partial t} \left(h_t(z_0) \overline{h_t(z_0)} \right) = \frac{\partial h_t}{\partial t}(z_0) \overline{h_t(z_0)} + \frac{\partial \overline{h_t}}{\partial t}(z_0) h_t(z_0) \\ &= 2 \operatorname{Re} \left[\overline{h_t(z_0)} \frac{\partial}{\partial t} (f^{-1}(e^{-t}f(z_0))) \right] = 2 \operatorname{Re} \left[\overline{h_t(z_0)} \frac{-f(h_t(z_0))}{f'(h_t(z_0))} \right]. \end{aligned}$$

Da $h_t(z_0) \neq 0$ ist, folgt $2|h_t(z_0)|^2 > 0$. Nach Division von $-2|h_t(z_0)|^2$ erhalten wir

$$0 \leq \operatorname{Re} \left[\frac{f(h_t(z_0))}{h_t(z_0) f'(h_t(z_0))} \right] \quad \text{für } t \in (0, \infty).$$

Es konvergiert h_t für $t \rightarrow 0$ punktweise gegen die Identität. Wir erhalten daher den Grenzwert

$$\operatorname{Re} \left[\frac{f(z_0)}{z_0 f'(z_0)} \right] \geq 0 \quad \text{für alle } z \in \mathbb{E} \setminus \{0\}$$

und da $z_0 \in \mathbb{E} \setminus \{0\}$ beliebig war, erhalten wir

$$\operatorname{Re} \left[\frac{f(z)}{z f'(z)} \right] \geq 0 \quad \text{für alle } z \in \mathbb{E} \setminus \{0\}.$$

Wir wissen bereits, dass $z \mapsto \frac{zf'(z)}{f(z)}$ auf $\mathbb{E}$ holomorph fortsetzbar ist, daher ist der Realteil dieser Funktion auf ganz $\mathbb{E}$ wohldefiniert und wir können den Kehrwert bilden

$$\operatorname{Re} \left[\frac{z f'(z)}{f(z)} \right] \geq 0 \quad \text{für alle } z \in \mathbb{E} \setminus \{0\}.$$

Im Fall von $z = 0$ erhalten wir nach vorheriger Betrachtung

$$\operatorname{Re} \left[\frac{z f'(z)}{f(z)} \Big|_{z=0} \right] = 1.$$

Insgesamt haben wir damit die schwächere Ungleichung gezeigt. Der Realteil einer holomorphen Funktion ist harmonisch, daher ist $z \mapsto \operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)}$ eine harmonische Funktion der Form $\mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$. Nach dem Maximumsprinzip für harmonische Funktionen [Lor] folgt nun entweder

$$\operatorname{Re} \left[\frac{z f'(z)}{f(z)} \right] > 0 \quad \text{oder} \quad \operatorname{Re} \left[\frac{z f'(z)}{f(z)} \right] \equiv 0 \quad \text{für alle } z \in \mathbb{E}.$$

Der zweite Fall ist wegen $\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)}|_{z=0} = 1$ allerdings nicht möglich.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Wir zeigen zunächst, dass $f(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{E} \setminus \{0\}$ gilt. Wir nehmen dazu an $z_0 \in \mathbb{E} \setminus \{0\}$ sei eine Nullstelle von f mit Vielfachheit $k_1 > 0$. Folglich besitzt f' eine Nullstelle der Vielfachheit $k_2 = k_1 - 1$. Weiterhin muss f' in z_0 ebenfalls eine Nullstelle mit Vielfachheit $k_2 \geq k_1$ besitzen, da $\frac{zf'(z)}{f(z)}$ in z_0 holomorph fortsetzbar ist. Das ist ein Widerspruch, da $k_2 = k_1 - 1 < k_1$ gilt. Daher besitzt f nur in $z = 0$ eine Nullstelle. Wir zeigen, dass $f|_{B_r(0)}$ für alle $r \in (0, 1)$ injektiv ist. Wir definieren die Null- und Polstellen zählende Funktion bezüglich $z \mapsto f(z) - f(a)$ in Abhängigkeit von $a \in B_r(0)$

$$N : B_r(0) \rightarrow \mathbb{Z}, \quad z \mapsto \frac{1}{2\pi i} \int_{|\omega|=r} \frac{f'(\omega)}{f(\omega) - f(z)} d\omega.$$

Die Funktion N ist holomorph und somit lokal konstant. Da für alle $a \in B_r(0)$ die holomorphe Funktion $z \mapsto f(z) - f(a)$ keine Polstellen auf $\mathbb{E}$ besitzt, zählt $N(a)$ genau die Nullstellen von $z \mapsto f(z) - f(a)$. Da f selbst genau eine Nullstelle in 0 besitzt folgt $N(0) = 1$ und daher $N \equiv 1$. Das bedeutet, dass jeder Wert von f genau einmal angenommen wird. Also ist f schlicht auf $B_r(0)$. Da $r \in (0, 1)$ beliebig war, ist f auf ganz $\mathbb{E}$ schlicht.

Wir zeigen, dass $f(\mathbb{E})$ sternförmig mit Zentrum 0 ist. Es genügt zu zeigen, dass $f(B_r(0))$ für alle $0 < r < 1$ sternförmig mit Zentrum 0 ist, denn dann ist $f(\mathbb{E})$ auch sternförmig mit Zentrum 0 wegen

$$f(\mathbb{E}) = \bigcup_{0 < r < 1} f(B_r(0)).$$

Sei $r \in (0, 1)$ beliebig aber fest. Dann ist $f(B_r(0))$ offen, da f injektiv ist. Wir nehmen an, es sei $f(B_r(0))$ nicht sternförmig mit Zentrum 0. Dann gibt es ein $p \in f(B_r(0))$ mit $[0, p] \not\subset f(B_r(0))$. Somit existiert ein

$$c_1 \in [0, p] \cap \partial f(B_r(0)) \quad \text{mit } c_1 = \mu_1 p \quad \text{für } 0 < \mu_1 < 1.$$

Außerdem gibt es wegen der Beschränktheit von $f(B_r(0))$ ein

$$c_2 := \mu_2 p = \max \{ \lambda p \mid \lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0} \} \cap \partial f(B_r(0)),$$

wobei $\mu_2 > 1$ gilt. Wir erhalten damit $0 < \mu_1 < 1 < \mu_2$ und folglich $c_1 \neq c_2$. Da f auf $\overline{B_r(0)}$ homöomorph ist, gilt $\partial f(B_r(0)) = f(\partial B_r(0))$. Wir betrachten die folgende Parametrisierung des Randes von $f(B_r(0))$

$$\gamma: [\beta, \beta + 2\pi] \rightarrow \partial f(B_r(0)), \quad t \mapsto f(re^{it}),$$

wobei wir $\beta \in \mathbb{R}$ so wählen, dass $d := f(re^{i\beta}) \neq c_1, c_2$ gilt. Wegen der Injektivität von f können wir Korollar 2.21 anwenden und erhalten die Zerlegung $\mathbb{C} = f(B_r(0)) \dot{\cup} |\gamma| \dot{\cup} H_2$, wobei H_2 unbeschränkt ist. Wir konstruieren nun eine stetige Kurve von 0 nach ∞ , welche $|\gamma|$ nur im Punkt d schneidet. Wir betrachten die Kurve

$$\tau_1: [0, \frac{1+r}{2}] \rightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto f(te^{i\beta}).$$

Aus der Injektivität folgt $|\tau_1| \cap |\gamma| = \{d\}$. Der Endpunkt a der Kurve τ_1 liegt nicht in $f(\overline{B_r(0)})$ und daher in H_2 . Somit existiert eine stetige Kurve τ_2 von a nach ∞ .

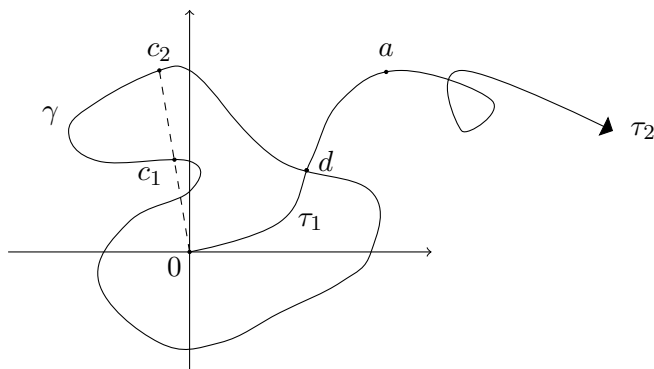


Abbildung 4.1

Wir definieren die stetige Kurve $\tau = \tau_1 + \tau_2$ von 0 nach ∞ und nach Konstruktion gilt $|\tau| \cap |\gamma| = \{d\}$. Nach Lemma 2.9 sind alle Komponenten von $\mathbb{C} \setminus |\tau|$ einfach zusammenhängend. Da die Menge $|\gamma| \setminus \{d\}$ zusammenhängend ist, liegt $|\gamma| \setminus \{d\}$ in genau einer dieser Komponenten G . Auf G existiert ein holomorpher Logarithmus $\log$ und eine Argumentfunktion $\arg = \text{Im} \circ \log$. Wir definieren die Funktion

$$h : (\beta, \beta + 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \arg f(re^{it}).$$

Nach Voraussetzung gilt $\text{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} > 0$ für alle $z \in \mathbb{E}$. Wir erhalten daher für alle $t \in (\beta, \beta + 2\pi)$

$$0 < \text{Re} \frac{re^{it} f'(re^{it})}{f(re^{it})} = \frac{\partial}{\partial t} \text{Im} \log f(re^{it}) = \frac{\partial}{\partial t} \arg f(re^{it}) = \frac{\partial}{\partial t} h(t),$$

das heißt h ist streng monoton wachsend. Da h eine stetige und monoton wachsende Funktion ist, können wir die Gesamtänderung von h durch das uneigentliche Integral berechnen

$$\int_{\beta}^{\beta+2\pi} \frac{\partial}{\partial t} h(t) dt = \int_{\beta}^{\beta+2\pi} \text{Re} \frac{re^{it} f'(re^{it})}{f(re^{it})} dt = \text{Im} \int_{|z|=r} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \text{Im} [2\pi i N(0)] = 2\pi.$$

Das heißt, dass die Funktion h eine Abbildung der Form $h : (\beta, \beta + 2\pi) \rightarrow (\alpha, \alpha + 2\pi)$ für ein passendes $\alpha \in \mathbb{R}$ ist. Da die Punkte c_1 und c_2 auf der Kurve $|\gamma|_{(\beta, \beta+2\pi)}$ liegen, existieren $\theta_1, \theta_2 \in (\beta, \beta + 2\pi)$ mit $\theta_1 \leq \theta_2$ sowie $c_1 = f(re^{i\theta_1})$ und $c_2 = f(re^{i\theta_2})$. Wegen $c_1 \neq c_2$ und der Injektivität von f folgt $\theta_1 \neq \theta_2$. Damit erhalten wir aus der strengen Monotonie von h

$$h(\theta_1) = \arg f(re^{i\theta_1}) < \arg f(re^{i\theta_2}) = h(\theta_2).$$

Wir wissen, dass die Punkte $c_1 = \mu_1 p$ und $c_2 = \mu_2 p$ auf einer Halbgerade $[0, \infty)$ liegen. Wir wollen zeigen, dass gilt

$$\arg c_2 - \arg c_1 = h(\theta_2) - h(\theta_1) = 2\pi k \quad \text{für ein } k \in \mathbb{Z}.$$

Wir betrachten dazu

$$\begin{aligned} \exp(i(\arg c_2 - \arg c_1)) &= \frac{\exp(i \arg c_2)}{\exp(i \arg c_1)} = \frac{\exp(i \text{Im} \log c_2)}{\exp(i \text{Im} \log c_1)} \\ &= \frac{\exp(i \text{Im} \log c_2 + \text{Re} \log c_2 - \text{Re} \log c_2)}{\exp(i \text{Im} \log c_1 + \text{Re} \log c_1 - \text{Re} \log c_1)} \\ &= \frac{\frac{c_2}{|c_2|}}{\frac{c_1}{|c_1|}} = \frac{\mu_1 p}{|\mu_1 p|} \frac{|\mu_2 p|}{\mu_2 p} = 1, \end{aligned}$$

wobei wir $\mu_1, \mu_2 > 0$ verwendet haben. Wir haben also gezeigt, dass $\arg c_2 - \arg c_1 = 2\pi k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ ist. Das Bild von h liegt im Intervall $(\alpha, \alpha + 2\pi)$, daher muss $k = 0$ gelten. Das heißt aber, dass $h(\theta_2) = h(\theta_1)$ und folglich wegen der strengen Monotonie $\theta_2 = \theta_1$ gilt. Damit erhalten wir $c_1 = c_2$ also einen Widerspruch. Also sind die Mengen $f(B_r(0))$ sternförmig mit Zentrum 0. $\square$

Für die Charakterisierung der konvexen Funktionen werden wir einige differentialgeometrische Eigenschaften und Größen verwenden und benötigen.

Definition 4.6. Sei $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Kurve. Dann besitzt γ in $t_0 \in [a, b]$ eine *stützende Hyperebene*, falls ein $v \in \mathbb{C}^*$ existiert, sodass entweder

$$\langle \gamma(t) - \gamma(t_0), v \rangle \geq 0 \quad \text{für alle } t \in [a, b]$$

oder

$$\langle \gamma(t) - \gamma(t_0), v \rangle \leq 0 \quad \text{für alle } t \in [a, b]$$

erfüllt ist. Anschaulich bedeutet das, dass die Kurve komplett auf einer Seite der Hyperebene liegt.

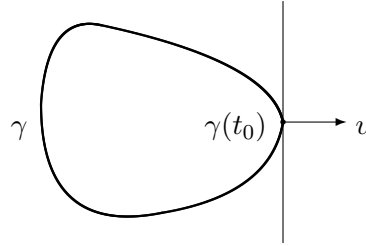


Abbildung 4.2

Satz 4.7. Sei $f \in \mathcal{O}(\mathbb{E})$ mit $f(0) = 0$. Dann sind äquivalent:

(i) Es ist f konvex auf $\mathbb{E}$.

(ii) Es gilt $f'(0) \neq 0$ und $1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}$ ist auf $\mathbb{E}$ holomorph fortsetzbar mit

$$\operatorname{Re} \left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right] > 0 \quad \text{für alle } z \in \mathbb{E}.$$

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Es sei f konvex und damit schlicht auf $\mathbb{E}$. Somit folgt die Existenz einer Umkehrfunktion f^{-1} und insbesondere folgt, dass f' keine Nullstellen besitzt. Also ist $1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}$ holomorph auf $\mathbb{E}$. Wir definieren die Funktion

$$g: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto f^{-1} \left(\frac{f(\sqrt{z}) + f(-\sqrt{z})}{2} \right),$$

wobei wir $\sqrt{z}$ nicht als Wurzel-Funktion verstehen, sondern als einen Punkt ω , sodass $\omega^2 = z$ gilt und für $z = 0$ setzen wir $\sqrt{z} = 0$. Wir betrachten zunächst $h: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $z \mapsto \frac{f(\sqrt{z}) + f(-\sqrt{z})}{2}$. Die Funktion h ist wohldefiniert, denn zum einen unterscheiden sich die Quadratwurzeln eines Punktes nur durch ein Vorzeichen und somit ist h unabhängig von der Wahl der Quadratwurzeln und zum anderen liegen die Quadratwurzeln von Punkten in $\mathbb{E}$ wieder in $\mathbb{E}$. Die Wohldefiniertheit von g folgt nun aus der Konvexität des Bildes von f , denn zu zwei beliebigen Punkten $z, \omega \in f(\mathbb{E})$ liegt auch der Mittelpunkt der Strecke $\frac{z+\omega}{2}$ in $f(\mathbb{E})$. Wir wollen zeigen, dass g holomorph ist. Dazu sei die Potenzreihenentwicklung von f gegen durch $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ mit Konvergenzradius

$R \geq 1$. Wir zeigen zunächst, dass h eine Potenzreihenentwicklung im Nullpunkt besitzt mit Konvergenzradius 1

$$h(z) = \frac{f(\sqrt{z}) + f(-\sqrt{z})}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k [(\sqrt{z})^k + (-\sqrt{z})^k] = \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} z^k.$$

Wir sehen an dieser Stelle, dass $h'(0) = a_2 = \frac{f''(0)}{2}$ gilt. Wir berechnen den Konvergenzradius mit der Formel von Cauchy-Hadamard. Für eine beliebige Teilfolge $(b_{n(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ von $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gilt $\limsup_{k \rightarrow \infty} b_{n(k)} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n$. Damit und wegen der Stetigkeit von $x \mapsto x^2$ erhalten wir

$$1 \leq R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \leq \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{|a_{2n}|}} \leq \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_{2n}|}}.$$

Also besitzt h eine Potenzreihenentwicklung mit Konvergenzradius 1 und folglich ist h holomorph auf $\mathbb{E}$. Insgesamt folgt die Holomorphie von g , da es eine Verkettung von holomorphen Funktionen ist. Nach Konstruktion unserer Funktion g gilt $g(\mathbb{E}) \subset \mathbb{E}$ und $g(0) = 0$. Mit dem Lemma von Schwarz erhalten wir $|g'(0)| \leq 1$. Durch Einsetzen von $g = f^{-1} \circ h$ erhalten wir

$$g'(0) = (f^{-1})'(h(0)) h'(0) = \frac{f''(0)}{2f'(0)}.$$

Wir haben also $\left| \frac{f''(0)}{f'(0)} \right| \leq 2$ gezeigt. Es sei $c \in \mathbb{E}$. Wir definieren nun die Funktion

$$F_c: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{C}, \quad F_c(z) = f\left(\frac{z+c}{1+\bar{c}z}\right) - f(c).$$

Die Funktion F_c besitzt das gleiche Bild wie f nur um $f(c)$ verschoben, da F_c durch die Verkettung eines Automorphismus des Einheitskreises entstanden ist. Daher ist das Bild $F_c(\mathbb{E})$ konvex. Außerdem ist F_c holomorph, schlicht und erfüllt $F_c(0) = 0$. Mit derselben Argumentation wie oben erhalten wir für F_c

$$\frac{F_c''(0)}{F_c'(0)} = \frac{f''(c)}{f'(c)}(1 - |c|^2) - 2\bar{c} \leq 2.$$

Da $c \in \mathbb{E}$ beliebig war erhalten wir nach umformen

$$\left| \frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{2|z|^2}{1-|z|^2} \right| \leq \frac{2|z|}{1-|z|^2} \text{ für alle } z \in \mathbb{E}.$$

Wir werden daraus nun $\operatorname{Re} \frac{zf''(z)}{f'(z)} > -1$ folgern. Sei $z \in \mathbb{E}$ beliebig aber fest. Wegen $|w| \geq \operatorname{Re} w$ für alle $w \in \mathbb{C}$ erhalten wir

$$\frac{2|z|}{1-|z|^2} \geq \left| \frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{2|z|^2}{1-|z|^2} \right| \geq \operatorname{Re} \left[\frac{2|z|^2}{1-|z|^2} - \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right] = \frac{2|z|^2}{1-|z|^2} - \operatorname{Re} \frac{zf''(z)}{f'(z)}.$$

Das ist äquivalent zu

$$-\operatorname{Re} \frac{zf''(z)}{f'(z)} \leq \frac{2|z|}{1-|z|^2} - \frac{2|z|^2}{1-|z|^2} = \frac{2|z|}{1+|z|} \stackrel{|z| \leq 1}{\leq} \frac{1+|z|}{1+|z|} = 1.$$

Da $z \in \mathbb{E}$ beliebig war, folgt die Behauptung.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Wegen $f(\mathbb{E}) = \bigcup_{0 < r < 1} \overline{f(B_r(0))}$ genügt es zu zeigen, dass $\overline{f(B_r(0))}$ für alle $0 < r < 1$ konvex ist. Sei dazu $0 < r < 1$ beliebig aber fest. Wir betrachten die geschlossene Kurve

$$\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto f(re^{it})$$

und werden zeigen, dass diese Kurve in allen Punkten $[0, 2\pi]$ eine stützende Hyperebene besitzt. Aus diesem Grund benötigen wir einige differentialgeometrische Größen. Wir definieren die Funktion

$$\kappa(t) := \frac{\det(\gamma'(t) \quad \gamma''(t))}{|\gamma'(t)|^3} \quad \text{für alle } t \in [0, 2\pi].$$

Wir zeigen die Wohldefiniertheit von κ . Wir wissen, dass γ beliebig oft differenzierbar ist und wir müssen noch zeigen, dass $\gamma'(t) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{E}$ ist. Dazu müssen wir zeigen, dass f' keine Nullstellen besitzt. Für $z = 0$ gilt dies nach Voraussetzung. Sei $z \in \mathbb{E} \setminus \{0\}$ beliebig aber fest. Wir nehmen dazu an z sei eine Nullstelle von f' mit Vielfachheit $k_1 > 0$. Folglich besitzt f'' in z eine Nullstelle der Vielfachheit $k_2 = k_1 - 1$. Weiterhin muss f'' in z_0 ebenfalls eine Nullstelle mit Vielfachheit $k_2 \geq k_1$ haben, da $1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}$ in z holomorph fortsetzbar ist. Das ist ein Widerspruch, da $k_2 = k_1 - 1 < k_1$ gilt. Daher besitzt f' keine Nullstellen. Die Funktion κ stimmt mit dem differentialgeometrischen Begriff der (orientierte) Krümmung von γ überein.

Wir definieren außerdem für $0 \leq \tau_0 \leq \tau_1 \leq 2\pi$

$$k(\tau_0, \tau_1) := \int_{\tau_0}^{\tau_1} \kappa(t) |\gamma'(t)| dt.$$

Diese Größe entspricht der Totalkrümmung der Kurve γ auf dem Intervall $[\tau_0, \tau_1]$ und ist anschaulich ein Indikator, um welchen Winkel sich die Kurventangente auf diesem Abschnitt dreht. Wir werden nun einige Eigenschaften herleiten, die sich aus der gegebenen Ungleichung $\operatorname{Re}(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)})$ für alle $z \in \mathbb{E}$ und der Totalkrümmung $k(\tau_0, \tau_1)$ ergeben.

Behauptung (1): Es gilt $\operatorname{Re} \left[1 + \frac{re^{it} f''(re^{it})}{f'(re^{it})} \right] = \kappa(t) |\gamma'(t)|$ für alle $t \in [0, 2\pi]$.

Wir berechnen zunächst die Ableitungen von γ

$$\gamma'(t) = ire^{it} f'(re^{it})$$

und

$$\gamma''(t) = i^2 re^{it} f'(re^{it}) + (ire^{it})^2 f''(re^{it}).$$

Damit folgt die Behauptung, denn es gilt

$$\begin{aligned} 0 < \operatorname{Re} \left(1 + \frac{re^{it} f''(re^{it})}{f'(re^{it})} \right) &= \operatorname{Im} \left(\frac{i^2 re^{it} f'(re^{it}) + (re^{it})^2 f''(re^{it})}{ire^{it} f'(re^{it})} \right) = \operatorname{Im} \left(\frac{\gamma''(t)}{\gamma'(t)} \right) \\ &= \operatorname{Im} \left(\frac{\overline{\gamma'(t)} \gamma''(t)}{|\gamma'(t)|^2} \right) = \frac{-\operatorname{Im} \gamma'(t) \overline{\gamma''(t)}}{|\gamma'(t)|^2} = \frac{\det \begin{pmatrix} \gamma'(t) & \gamma''(t) \end{pmatrix}}{|\gamma'(t)|^2} = \kappa(t) |\gamma'(t)|. \end{aligned}$$

Damit folgt auch $\kappa(t) > 0$ für alle $t \in [0, 2\pi]$.

Behauptung (2): Es gilt $k(0, 2\pi) = 2\pi$, das heißt die Kurve besitzt Windungszahl 1. Wir berechnen

$$\begin{aligned} k(0, 2\pi) &= \int_0^{2\pi} \kappa(t) |\gamma'(t)| dt \stackrel{(1)}{=} \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} 1 + \frac{re^{it} f''(re^{it})}{f'(re^{it})} \\ &= 2\pi - \operatorname{Re} i \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it} f''(re^{it})}{f'(re^{it})} dt = 2\pi - \underbrace{\operatorname{Re} i \int_0^{2\pi} \frac{f''(z)}{f'(z)} dz}_{=0} = 2\pi, \end{aligned}$$

denn $z \mapsto \frac{f''(z)}{f'(z)}$ ist holomorph auf $\mathbb{E}$, da f' keine Nullstellen besitzt.

Behauptung (3): Für alle $0 \leq \tau < 2\pi$ ist $k(\tau, t)$ in $t \in [\tau, 2\pi]$ streng monoton wachsend. Dies folgt direkt aus der Voraussetzung, denn es gilt

$$k(\tau, t) = \int_\tau^t \kappa(s) |\gamma'(s)| ds \stackrel{(1)}{=} \int_\tau^t \underbrace{\operatorname{Re} \left(1 + \frac{re^{it} f''(re^{it})}{f'(re^{it})} \right)}_{>0} ds.$$

Behauptung (4): Es gilt $0 \leq k(\tau_0, \tau_1) \leq 2\pi$ für alle $0 \leq \tau_0 \leq \tau_1 \leq 2\pi$. Dies ist eine Folgerung aus $k(0, 0) = 0$ und den Eigenschaften (1) und (2).

Behauptung (5): Es gilt für alle $0 \leq \tau_0 \leq \tau_1 < 2\pi$

$$\exp(ik(\tau_0, \tau_1)) = \frac{\gamma'(\tau_1)}{|\gamma'(\tau_1)|} \frac{|\gamma'(\tau_0)|}{\gamma'(\tau_0)}.$$

Dazu berechnen wir

$$\begin{aligned} \exp(ik(\tau_0, \tau_1)) &\stackrel{(3)}{=} \exp \left[i \int_{\tau_0}^{\tau_1} \operatorname{Re} \left(1 + \frac{re^{it} f''(re^{it})}{f'(re^{it})} \right) dt \right] \\ &= \exp \left[i(\tau_1 - \tau_0) + i \operatorname{Re} \left(-i \int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{ire^{it} f''(re^{it})}{f'(re^{it})} dt \right) \right] \\ &= \exp(i(\tau_1 - \tau_0)) \exp \left[i \operatorname{Re} \left(-i \int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{f''(z)}{f'(z)} dz \right) \right], \end{aligned}$$

wobei ν die Kreislinie re^{it} von τ_0 bis τ_1 sei. Wegen $0 \leq \tau_0 \leq \tau_1 < 2\pi$ ist die Kurve ν nicht geschlossen und wir finden Logarithmus $\log$ auf einem einfach zusammenhängendem Gebiet G mit $|\nu| \subset G$. Wegen $(\log \circ f')' = \frac{f''}{f'}$ können wir unsere Rechnung fortsetzen mit

$$\begin{aligned} \exp(i k(\tau_0, \tau_1)) &= \frac{e^{i\tau_1}}{e^{i\tau_0}} \exp \left[i \operatorname{Re} \left(-i(\log f'(re^{i\tau_1}) - \log f'(re^{i\tau_0})) \right) \right] \\ &= \frac{e^{i\tau_1}}{e^{i\tau_0}} \exp \left[i \operatorname{Im} \left(\log \frac{f'(re^{i\tau_1})}{f'(re^{i\tau_0})} \right) \right] \\ &= \frac{e^{i\tau_1}}{e^{i\tau_0}} \exp \left[\log \frac{f'(re^{i\tau_1})}{f'(re^{i\tau_0})} \right] \exp \left[-\operatorname{Re} \left(\log \frac{f'(re^{i\tau_1})}{f'(re^{i\tau_0})} \right) \right] \\ &= \frac{e^{i\tau_1}}{e^{i\tau_0}} \frac{f'(re^{i\tau_1})}{f'(re^{i\tau_0})} \left| \exp \left(-\log \frac{f'(re^{i\tau_1})}{f'(re^{i\tau_0})} \right) \right|, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt verwendet haben, dass $|\exp(w)| = \exp(\operatorname{Re}(w))$ für alle $w \in \mathbb{C}$ gilt. Wir erhalten mit $|e^{i\tau_0}| = 1 = |e^{i\tau_1}|$ die Behauptung, denn es gilt

$$\exp(i k(\tau_0, \tau_1)) = \frac{ire^{i\tau_1} f'(re^{i\tau_1})}{ire^{i\tau_0} f'(re^{i\tau_0})} \frac{|ire^{i\tau_0} f'(re^{i\tau_0})|}{|ire^{i\tau_1} f'(re^{i\tau_1})|} = \frac{\gamma'(\tau_1)}{\gamma'(\tau_0)} \frac{|\gamma'(\tau_0)|}{|\gamma'(\tau_1)|}.$$

Wir haben nun die Vorbereitungen abgeschlossen und kommen zum eigentlichen Beweis. Wir werden zunächst zeigen, dass γ in jedem Punkt $t \in [0, 2\pi]$ eine stützende Hyperebene besitzt. Wir nehmen an γ besitzt in $t_0 \in [0, 2\pi]$ keine stützende Hyperebene. Wir wählen $v \in \gamma'(t_0)^\perp \setminus \{0\}$ beliebig und definieren die Funktion

$$\varphi: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \langle \gamma(t) - \gamma(t_0), v \rangle.$$

Da γ in t_0 keine stützende Hyperebene besitzt, nimmt φ sowohl positive als auch negative Werte an. Anschaulich sind wir in folgender Situation:

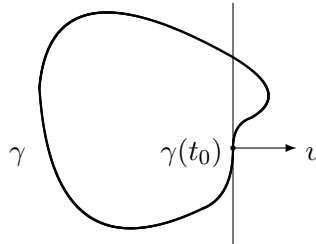


Abbildung 4.2

Da das Intervall $[0, 2\pi]$ kompakt und die Funktion φ stetig ist, nimmt φ sein absolutes Minimum in $t_1 \in [0, 2\pi]$ und sein absolutes Maximum in $t_2 \in [0, 2\pi]$ an. Es gilt also

$$\varphi(t_1) < \underbrace{\varphi(t_0)}_{=0} < \varphi(t_2).$$

Aus $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$ folgt auch $\varphi(0) = \varphi(2\pi)$ und somit können wir ohne Einschränkung $t_i \neq 2\pi$ für $i = 0, 1, 2$ annehmen, das heißt es gilt $t_0, t_1, t_2 \in [0, 2\pi)$ und sind paarweise verschieden. Wir setzen die Funktion φ glatt auf ganz $\mathbb{R}$ fort, indem wir sie periodisch fortsetzen. Dies hat zur Folge, dass φ in t_1 und t_2 nun lokale Extrema besitzt und somit gilt $\varphi'(t_1) = 0$ und $\varphi'(t_2) = 0$. Wegen $\varphi'(t) = \langle \gamma'(t), v \rangle$ folgt daher, dass $\gamma'(t_1)$ und $\gamma'(t_2)$ senkrecht zu v liegen. Da wir v selbst senkrecht zu $\gamma'(t_0)$ gewählt hatten, folgt $\gamma'(t_1), \gamma'(t_2) \in \text{Span}(\gamma'(t_0))$. Somit folgt

$$\frac{\gamma'(t_1)}{|\gamma'(t_1)|} = \pm \frac{\gamma'(t_0)}{|\gamma'(t_0)|} \quad \text{und} \quad \frac{\gamma'(t_2)}{|\gamma'(t_2)|} = \pm \frac{\gamma'(t_0)}{|\gamma'(t_0)|}.$$

Wir haben also drei Vektoren, die sich nur um ein Vorzeichen unterscheiden können. Somit sind mindestens zwei dieser Vektoren gleich. Wir finden also $s_0, s_1 \in \{t_0, t_1, t_2\}$ mit $s_0 < s_1$ und

$$\frac{\gamma'(s_0)}{|\gamma'(s_0)|} = \frac{\gamma'(s_1)}{|\gamma'(s_1)|}.$$

Anschaulich sind wir in der Situation:

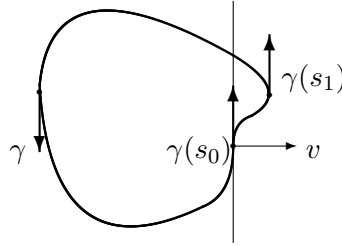


Abbildung 4.3

Mit Behauptung (5) folgt

$$\exp(ik(s_0, s_1)) = \frac{\gamma'(s_1)}{|\gamma'(s_1)|} \frac{|\gamma'(s_0)|}{\gamma'(s_0)} = 1,$$

das heißt $k(s_0, s_1) \in 2\pi\mathbb{Z}$. Dies können wir wegen Behauptung (3) weiter einschränken zu $k(s_0, s_1) \in \{0, 2\pi\}$. Wir betrachten den Fall $k(s_0, s_1) = 2\pi$ und folgern

$$2\pi \stackrel{(3)}{\leq} k(s_0, t) \stackrel{(4)}{\leq} 2\pi \quad \text{für alle } t \in [s_1, 2\pi].$$

Somit folgt $k(s_0, t) = 2\pi$ für alle $t \in [s_1, 2\pi]$. Wegen $s_1 < 2\pi$ widerspricht das jedoch der strengen Monotonie in (3). Anschaulich bedeutet dieser Fall, dass die Kurve ihre vollständige Umdrehung zwischen s_0 und s_1 aufgebraucht hat und somit muss der Rest der Kurve eine Gerade sein muss. Dies ist aber nicht möglich, da sich die Kurve überall krümmt wegen $\kappa(t) > 0$.

Wir betrachten den Fall $k(s_0, s_1) = 0$. Dies führt direkt mit (3) wegen der strengen Monotonie und $s_0 < s_1$ zum Widerspruch, denn

$$0 = k(s_0, s_0) \stackrel{(3)}{<} k(s_0, s_1) = 0.$$

Anschaulich bedeutet dieser Fall, dass die Kurve zwischen s_0 und s_1 eine Gerade ist. Damit haben wir gezeigt, dass γ in allen Punkten $t \in [0, 2\pi]$ eine stützende Hyperebene besitzt, da sich in jedem Fall ein Widerspruch ergibt.

Wir werden nun die Injektivität folgern und nehmen dazu an, es sei f nicht injektiv auf $\partial B_r(0)$. Dann existieren zwei Punkte $0 \leq t_0 < t_1 < 2\pi$ mit $\gamma(t_0) = \gamma(t_1)$. Wir wissen bereits, dass γ in t_0 eine stützende Hyperebene besitzt, das heißt es existiert ein $v \in \mathbb{C}^*$ mit

$$\varphi(t) := \langle \gamma(t) - \gamma(t_0), v \rangle \geq 0 \quad \text{für alle } t \in [0, 2\pi].$$

Wir betrachten ohne Einschränkung den Fall $\leq$, denn der andere Fall lässt sich analog beweisen. Wegen $\gamma(t_0) = \gamma(t_1)$ folgt $\varphi(t_0) = 0 = \varphi(t_1)$. In beiden Punkten hat φ ein globales Maximum. Wie zuvor setzen wir φ glatt auf ganz $\mathbb{R}$ fort und erhalten erneut lokale Extrema, das heißt es gilt $\varphi'(t_0) = 0 = \varphi'(t_1)$. Wegen der Kompaktheit von $[0, 2\pi]$ nimmt φ sein Minimum in einem weiteren Punkt $t_2 \in [0, 2\pi)$ an und es gilt $\varphi'(t_2) = 0$. Es kann φ nicht konstant 0 sein, denn sonst würde die Kurve γ komplett innerhalb einer geraden verlaufen. Dann muss f aber konstant sein und dies ist ein Widerspruch, da f' keine Nullstellen besitzt. Folglich gilt für das Minimum $\varphi(t_2) < 0$ und somit auch $t_2 \neq t_0$ und $t_2 \neq t_1$. Wegen $\varphi'(t) = \langle \gamma'(t), v \rangle$ erhalten wir wieder drei Vektoren $\gamma'(t_i)$ für $i = 0, 1, 2$, welche senkrecht zu v stehen. Daher erhalten wir wie zuvor

$$\frac{\gamma'(t_1)}{|\gamma'(t_1)|} = \pm \frac{\gamma'(t_0)}{|\gamma'(t_0)|} \quad \text{und} \quad \frac{\gamma'(t_2)}{|\gamma'(t_2)|} = \pm \frac{\gamma'(t_0)}{|\gamma'(t_0)|}.$$

Das heißt wir haben drei Vektoren, die sich nur durch ein Vorzeichen unterscheiden. Wir finden also wieder $s_0, s_1 \in \{t_0, t_1, t_2\}$ mit $0 \leq s_0 < s_1 < 2\pi$, sodass gilt

$$\frac{\gamma'(s_0)}{|\gamma'(s_0)|} = \frac{\gamma'(s_1)}{|\gamma'(s_1)|}.$$

Wir erhalten nun mit demselben Argument wie zuvor bei der Behauptung, dass γ in jedem Punkt eine stützende Hyperebene besitzt einen Widerspruch. Folglich muss f auf $\partial B_r(0)$ injektiv sein. Mit Korollar 2.21 folgt, dass f injektiv auf ganz $\overline{B_r(0)}$ ist. Da $0 < r < 1$ beliebig ist, folgt, dass f auf ganz $\mathbb{E}$ injektiv ist.

Als nächstes wollen wir zeigen, dass $\overline{f(B_r(0))}$ konvex ist. Dazu führen wir zunächst weitere Notationen ein. Wir bezeichnen in $t \in [0, 2\pi]$ den Vektor $v(t) \in \mathbb{C}^*$ einer stützenden Hyperebene von γ . Außerdem definieren wir die Halbräume

$$H_t^{\leq} := \{w \in \mathbb{C} \mid \langle w - \gamma(t), v(t) \rangle \leq 0\}$$

und führen eine entsprechende Notation für $H_t^{\geq}, H_t^<, H_t^>$ und $H_t^=$ ein. Außerdem wissen wir, dass diese Hyperebenen stützend sind, das heißt die folgende Definition ist wohldefiniert

$$H_t := \begin{cases} H_t^{\leq} & , \text{ falls } |\gamma| \subset H_t^{\leq} \\ H_t^{\geq} & , \text{ falls } |\gamma| \subset H_t^{\geq} \end{cases}.$$

Die Mengen H_t sind konvex und nach Konstruktion gilt

$$|\gamma| \subset \bigcap_{t \in [0, 2\pi]} H_t =: A.$$

Der Schnitt von konvexen Mengen ist konvex und wir werden zeigen, dass $A = \overline{f(B_r(0))}$ gilt. Zunächst erhalten wir, weil f injektiv und damit homöomorph ist, dass $\overline{f(B_r(0))} = f(\overline{B_r(0)})$ und $|\gamma| = \partial f(B_r(0))$ gilt. Sei nun $t \in [0, 2\pi]$ beliebig aber fest und es gelte ohne Einschränkung $H_t = H_t^{\leq}$. Wir definieren die Funktion

$$g: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}, \quad z \mapsto \langle f(z) - \gamma(t), v(t) \rangle.$$

Für $z \in \partial B_r(0)$ erhalten wir $g(z) \leq 0$ und wegen

$$g(z) = \langle f(z) - \gamma(t), v(t) \rangle = \operatorname{Re} \left((f(z) - \gamma(t)) \overline{v(t)} \right)$$

ist g der Realteil einer auf $\mathbb{E}$ holomorphen Funktion und daher harmonisch. Weiterhin ist die Menge $\overline{B_r(0)} \subset \mathbb{E}$ kompakt und somit existiert ein $p \in \overline{B_r(0)}$

$$M := g(p) = \max \left\{ g(z) \mid z \in \overline{B_r(0)} \right\}.$$

Angenommen p liegt im inneren von $B_r(0)$, dann ist g als harmonische Funktion wegen des Maximumsprinzips auf $B_r(0)$ konstant und es folgt, dass auch f konstant wäre. Damit folgt $p \in \partial B_r(0) = |\gamma|$ und es folgt für alle $z \in \overline{B_r(0)}$

$$g(z) \leq M = g(p) \leq 0.$$

Also erhalten wir

$$\langle f(z) - \gamma(t), v(t) \rangle \leq 0 \quad \text{für alle } z \in \overline{B_r(0)}$$

und es folgt $\overline{f(B_r(0))} \subset H_t$. Da nun $t \in [0, 2\pi]$ beliebig war, folgt $\overline{f(B_r(0))} \subset A$.

Wir zeigen $\overline{f(B_r(0))} \supset A$. Sei dazu $x \in \mathbb{C} \setminus \overline{f(B_r(0))}$. Es genügt $x \notin H_t$ für ein $t \in [0, 2\pi]$ zu zeigen. Wir wählen nun einen beliebigen Punkt $y \in f(B_r(0))$. Nach Konstruktion gilt $[x, y] \cap \gamma \neq \emptyset$. Das heißt, es existiert ein Punkt $p \in [x, y] \cap \gamma$. Daher gibt es ein $t_0 \in [0, 2\pi]$ mit $p = \gamma(t_0)$. Wir nehmen wieder ohne Einschränkung an es gelte $H_{t_0} = H_{t_0}^{\leq}$ und erhalten zwei Fälle:

Fall 1: Es gilt $x \in H_{t_0}^<$. Wegen $y \in f(B_r(0))$ gilt auch $y \in H_{t_0}^<$, da f sonst konstant wäre. Da aber $H_{t_0}^<$ konvex ist, folgt schließlich $[x, y] \subset H_{t_0}^<$. Wegen $p = \gamma(t_0)$ gilt jedoch $p \in H_{t_0}^=$ und $p \in [x, y]$ also ein Widerspruch.

Fall 2: Es gilt $x \in H_{t_0}^=$. Wegen $p \in H_{t_0}^=$ und da die Gerade $H_{t_0}^=$ konvex ist, folgt $[x, p] \subset H_{t_0}^=$. Damit muss aber auch schon die ganze Gerade $[x, y] \supset [x, p]$ in $H_{t_0}^=$ enthalten sein. Wegen $y \in H_{t_0}^<$ ist dies ein Widerspruch. In jedem Fall ergibt sich ein Widerspruch, also haben wir $x \in H_{t_0}^>$ und somit insbesondere $x \notin H_{t_0}^{\leq}$ gezeigt. Damit folgt die Behauptung, denn $\overline{f(B_r(0))}$ ist konvex. □

Satz 4.8 (Satz von Alexander). *Sei $f \in S$. Dann sind äquivalent:*

- (i) *Die Funktion ist $f \in S_k$ konver.*
- (ii) *Die Funktion $g: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $z \mapsto zf'(z)$ ist sternförmig mit Zentrum 0, das heißt $g \in S^*$.*

Beweis. Die Funktion g ist holomorph auf $\mathbb{E}$ und es gilt

$$\frac{zg'(z)}{g(z)} = \frac{zf'(z) + zf''(z)}{zf'(z)} = 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{E},$$

da die Singularitäten in 0 hebbar sind. Wir erhalten somit, dass $\operatorname{Re} \left[\frac{zg'(z)}{g(z)} \right] > 0$ genau dann gilt, wenn $\operatorname{Re} \left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right] > 0$ gilt. Nach Satz 4.5 und Satz 4.7 folgt somit die Behauptung. $\square$

Im folgenden werden wir Abschätzungen für die beiden Familien untersuchen. Die Koebe-Funktion besitzt das Bild $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -\frac{1}{4}]$. Das heißt k ist eine sternförmige Funktion und war oft eine Grenzfunktion für entsprechende Abschätzungen. Daher liegt es nahe, dass wir für die sternförmigen Funktionen keine besseren Abschätzungen finden werden.

Satz 4.9. *Sei $f \in S^*$. Dann gelten für alle $z \in \mathbb{E}$ die Abschätzungen*

$$\frac{1 - |z|}{(1 + |z|)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1 + |z|}{(1 - |z|)^3}$$

und

$$\frac{|z|}{(1 + |z|)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{|z|}{(1 - |z|)^2}$$

Diese Abschätzungen sind scharf und Gleichheit gilt für passende Rotation der Koebe-Funktion.

Beweis. Der Satz ist eine Folgerung aus $S^* \subset S$ und dem Koebschen Verzerrungssatz 3.7. Weiterhin ist die Koebe-Funktion $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ sternförmig mit Zentrum 0 und mit Bemerkung 3.8 folgt die Exaktheit der Abschätzung. Daher sind die Grenzen für S^* scharf und es gibt keine besseren Abschätzungen. $\square$

Satz 4.10. *Sei $f \in S_k$. Dann gelten für alle $z \in \mathbb{E}$ die Abschätzungen*

$$\frac{1}{(1 + |z|)^2} \leq |f'(z)| \leq \frac{1}{(1 - |z|)^2}$$

und

$$\frac{|z|}{1 + |z|} \leq |f(z)| \leq \frac{|z|}{1 - |z|}.$$

Diese Abschätzungen sind scharf. Gleichheit in einem Punkt $z_0 \in \mathbb{E} \setminus \{0\}$ erhalten wir für $f(z) = \frac{z}{1-\lambda z}$ mit einem passendem $\lambda \in \partial\mathbb{E}$.

Beweis. (i) Sei $f \in S_k$. Dann gilt nach Satz 4.8, dass $z \mapsto zf'(z)$ auf $\mathbb{E}$ eine sternförmige Funktion mit Zentrum 0 ist. Mit Satz 4.9 erhalten wir die Abschätzung für alle $w = re^{i\varphi} \in \mathbb{E}$

$$\frac{r}{(1+r)^2} \leq |wf'(w)| = r|f'(w)| \leq \frac{r}{(1-r)^2}.$$

(ii) Sei $f \in S_k$. Wir zeigen zunächst $|f(z)| \leq \frac{|z|}{1-|z|}$ für alle $z \in \mathbb{E}$. Sei $w = re^{i\varphi} \in \mathbb{E}$. Wir können mit (i) und dem Hauptsatz der Integralrechnung die Behauptung folgern

$$|f(w)| = \left| \int_0^r f'(te^{i\varphi})e^{i\varphi} dt \right| \leq \int_0^r |f'(te^{i\varphi})| dt \leq \int_0^r \frac{1}{(1-t)^2} dt = \frac{r}{1-r}.$$

Wir zeigen nun $\frac{|z|}{1+|z|} \leq |f(z)|$ für alle $z \in \mathbb{E}$. Sei $w = re^{i\varphi} \in \mathbb{E}$. Nach Rotation können wir ohne Einschränkung $f(w) \in \mathbb{R}^+$ annehmen. Die gerade Strecke $[0, f(w)]$ ist vollständig in $f(\mathbb{E})$ enthalten, da $f(\mathbb{E})$ konvex ist. Wir definieren das Urbild der Strecke $[0, f(w)]$ unter f

$$\gamma: [0, f(w)] \rightarrow \mathbb{E}, \quad t \mapsto f^{-1}(t).$$

Diese Kurve ist wohldefiniert und stetig differenzierbar. Nach Konstruktion gilt $f(\gamma(t)) = t$ für alle $t \in [0, f(w)]$. Daraus erhalten wir $f'(\gamma(t))\gamma'(t) = 1$ und folglich gilt $|f'(\gamma(t))\gamma'(t)| = 1$ für alle $t \in [0, f(w)]$. Wir wenden den Hauptsatz der Integralrechnung an

$$f(w) = \int_0^{f(w)} f'(\gamma(t))\gamma'(t) dt = \int_0^{f(w)} |f'(\gamma(t))\gamma'(t)| dt = \int_\gamma |f'(\zeta)| |d\zeta|.$$

Damit erhalten wir unter Anwendung der Abschätzung des ersten Teils die Behauptung

$$|f(w)| = \int_\gamma |f'(\zeta)| |d\zeta| \geq \int_0^w \frac{1}{(1+|r|)^2} dr = \frac{|w|}{(1+|w|)^2}.$$

Die Grenzen sind genau dann scharf, wenn $z \mapsto zf'(z)$ eine Rotation der Koebe-Funktion ist. Das ist genau dann der Fall, falls $f(z) = \frac{z}{1-\lambda z}$ für $\lambda \in \partial\mathbb{E}$ gilt. $\square$

Satz 4.11. Sei $f \in S_k$. Dann gilt $B_{\frac{1}{2}}(0) \subset f(\mathbb{E})$.

Beweis. Sei $f \in K$ und $\omega \in B_{\frac{1}{2}}(0)$ beliebig aber fest. Nach Satz 4.10 gilt $\frac{|z|}{1+|z|} \leq |f(z)|$ für alle $z \in \mathbb{E}$. Wir erhalten damit den Grenzwert

$$\lim_{|z| \rightarrow 1} \frac{|z|}{1+|z|} = \frac{1}{2}.$$

Daher existiert ein $r \in (0, 1)$ mit $|\omega| < \frac{r}{1+r} < \frac{1}{2}$. Somit gilt $|\omega| < \frac{r}{1+r} \leq \frac{|z|}{1+|z|}$ für alle $|z| = r$. Folglich liegt ω im inneren der geschlossenen Jordankurve $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $t \mapsto f(re^{it})$. Nach Korollar 2.21 bildet f die Scheibe $B_r(0)$ auf das innere der Jordankurve ab. Also gilt $\omega \in f(\mathbb{E})$. Die Grenze ist scharf, denn für die Funktion $g(z) = \frac{z}{1-z}$ gilt $-\frac{1}{2} \notin g(\mathbb{E})$. $\square$

Als nächstes zitieren wir eine die sogenannte Herglotz Formel, welche holomorphe Funktionen mit positiven Realteil charakterisiert [GK].

Satz 4.12 (Herglotz Formel). *Sei $p \in \mathcal{O}(\mathbb{E})$. Dann gilt $\operatorname{Re}(p(z)) \geq 0$ für alle $z \in \mathbb{E}$ genau dann, wenn es auf $[0, 2\pi]$ eine monoton wachsende Funktion μ gibt mit $\mu(2\pi) - \mu(0) = \operatorname{Re}(p(0))$ und*

$$p(z) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\mu(t) + i \operatorname{Im}(p(0)) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{E}.$$

Korollar 4.13. *Sei $p \in \mathcal{O}(\mathbb{E})$ mit $p(0) = 1$. Es gilt $\operatorname{Re}(p(z)) > 0$ für alle $z \in \mathbb{E}$ genau dann, wenn es auf $[0, 2\pi]$ eine monoton wachsende Funktion μ gibt mit $\mu(2\pi) - \mu(0) = 1$ und*

$$p(z) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\mu(t) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{E}$$

Beweis. Folgerung aus Satz 4.12, da $i \operatorname{Im}(p(0)) = 0$ gilt. □

Lemma 4.14 (Lemma von Carathéodory). *Sei $p \in \mathcal{O}(\mathbb{E})$ mit $\operatorname{Re}(p(z)) > 0$ für alle $z \in \mathbb{E}$ und $p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n$. Dann gilt $|p_n| \leq 2$ für alle $n \geq 1$.*

Beweis. Es gilt

$$\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-int} z^n \quad \text{für alle } z \in \mathbb{E}.$$

Mit Korollar 4.13 folgt für alle $z \in \mathbb{E}$

$$p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n = \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\mu(t) = \int_0^{2\pi} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-int} z^n \right) d\mu(t).$$

Damit erhalten wir für die Koeffizienten die Darstellung

$$p_n = 2 \int_0^{2\pi} e^{-int} d\mu(t) \quad \text{für alle } n \geq 1$$

und es folgt

$$|p_n| = 2 \left| \int_0^{2\pi} e^{-int} d\mu(t) \right| \leq 2 \int_0^{2\pi} d\mu(t) = 2(\mu(2\pi) - \mu(0)) = 2 \quad \text{für alle } n \geq 1.$$

□

Wir werden zeigen, dass für die sternförmige Funktionen die Koeffizienten der Potenzreihe die Abschätzung $|a_n| \leq n$ erfüllt ist. Dieser Satz wurde 1920 von R. Nevanlinna [Nev] bewiesen und war damals ein wichtiger Schritt in Hinblick auf die Bieberbachsche Vermutung, da die Abschätzung nun für eine großen Familie von Funktionen gezeigt wurde.

Satz 4.15. *Sei $f \in S^*$. Dann gilt $|a_n| \leq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Diese Abschätzung ist scharf und Gleichheit gilt genau dann, falls f eine Rotationen der Koebe-Funktion ist.*

Beweis. Sei $f \in S^*$ beliebig. Wir definieren $p : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{C}$ durch $z \mapsto \frac{zf'(z)}{f(z)}$. Es ist p holomorph auf $\mathbb{E}$, denn in 0 liegt eine hebbare Singularität vor mit $p(0) = 1$. Es sei die Potenzreihe von f gegeben durch $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ mit $a_1 = 1$. Da $f(z)$ sternförmig auf $\mathbb{E}$ ist, gilt $\operatorname{Re}(p(z)) > 0$ für alle $z \in \mathbb{E}$. Somit folgt nach Satz 4.14

$$p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n \quad \text{mit} \quad |p_n| \leq 2 \quad \text{für alle } n \geq 1.$$

Wir vergleichen die Koeffizienten der Potenzreihen $z \mapsto f(z)p(z)$ und $z \mapsto zf'(z)$ und erhalten

$$\sum_{k=1}^{n-1} p_{n-k} a_k + a_n = n a_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Wir führen eine Induktion über n . Wir wissen bereit, dass $a_1 = 1$ ist, da f normiert ist mit $f'(0) = 1$. Wir nehmen nun an wir hätten $|a_k| \leq k$ für $k = 1, \dots, n-1$ gezeigt. Dann gilt

$$(n-1)|a_n| \leq \sum_{k=1}^{n-1} |p_{n-k}| |a_k| \leq 2 \sum_{k=1}^{n-1} k = n(n-1)$$

und es folgt $|a_n| \leq n$. Nach dem Satz von Bieberbach 3.4 gilt $|a_2| < 2$, falls f keine Rotation der Koebe-Funktion ist und es folgt, dass $|a_n| < n$ für alle $n \geq 2$ gilt. Die Abschätzung ist scharf, denn für die Koebe-Funktion gilt

$$k_\lambda(z) = \sum_{k=1}^{\infty} n \lambda^{n-1} z^n.$$

□

Korollar 4.16. Sei $f \in S_k$. Dann gilt $|a_n| \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Diese Abschätzung ist scharf und Gleichheit gilt für $\frac{z}{1-\lambda z}$ mit $\lambda \in \partial\mathbb{E}$.

Beweis. Sei $f \in S_k$. Dann ist nach dem Satz von Alexander 4.8 die Funktion $z \mapsto zf'(z)$ sternförmig und nach Satz 4.15 gilt für die Koeffizienten $n|a_n| \leq n$. Die Grenze ist scharf für die Rotationen von $\frac{z}{1-\lambda z} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} z^n$ mit $\lambda \in \partial\mathbb{E}$. □

Wir beschäftigen uns nun mit der Frage, ob ein größter Radius existiert, sodass alle Funktionen der Klasse S eingeschränkt auf diesen Radius sternförmig oder konvex sind.

Definition 4.17. Sei $\emptyset \neq \mathcal{F} \subseteq S$ eine Familie von Funktionen. Wir definieren

- (i) die größte positive Zahl $r^*(\mathcal{F})$, sodass alle Funktionen aus $\mathcal{F}$ sternförmig auf $B_{r^*(\mathcal{F})}(0)$ mit Zentrum 0 sind.
- (ii) die größte positive Zahl $r_k(\mathcal{F})$, sodass alle Funktionen aus $\mathcal{F}$ konvex auf $B_{r_k(\mathcal{F})}(0)$ sind.

Satz 4.18. Es gilt $r_k(S) = 2 - \sqrt{3}$.

Beweis. Sei $f \in S$. Nach Satz 3.6 gilt die scharfe Abschätzung

$$\operatorname{Re} \left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right] \geq \frac{1 - 4|z| + |z|^2}{1 - |z|^2} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{E}.$$

Da $1 - 4|z| + |z|^2 > 0$ für alle $z \in B_r(0)$ mit $0 \leq r \leq 2 - \sqrt{3}$ erfüllt ist, ist f eingeschränkt auf $B_{r_k(S)}$ konvex. Für $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ gilt $1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} = \frac{z^2 + 4z + 1}{1 - z^2}$ und dieser Ausdruck ist für $-1 < z < -(2 - \sqrt{3})$ reell und negativ, also ist die Grenze scharf. $\square$

Satz 4.19. Es gilt $r^*(S) = \tanh(\frac{\pi}{4})$.

Beweis. Sei $f \in S$ beliebig. Nach Satz 4.5 ist eine Funktion $f \in S$ genau dann sternförmig, wenn $\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} > 0$ für alle $z \in \mathbb{E}$ gilt. Weiterhin erhalten wir mit Korollar 3.41 folgende Abschätzung

$$\left| \arg \frac{zf'(z)}{f(z)} \right| \leq \log \left[\frac{1 + |z|}{1 - |z|} \right] \quad \text{für alle } z \in \mathbb{E}.$$

Sei $z = re^{i\varphi}$ eine komplexe Zahl mit $r > 0$ und $\varphi \in [-\pi, \pi]$. Offensichtlich besitzt z genau dann einen positiven Realteil, wenn $|\arg z| = |\varphi| \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ gilt. Folglich ist f auf $B_r(0)$ genau dann sternförmig, wenn

$$\log \left[\frac{1 + |z|}{1 - |z|} \right] < \frac{\pi}{2} \quad \text{für alle } z \in B_r(0)$$

erfüllt ist. Es folgt $r = \tanh \frac{\pi}{4}$. Diese Grenze ist scharf, da die Abschätzung aus Korollar 3.41 scharf ist und somit folgt $r^*(S) = \tanh(\frac{\pi}{4})$. $\square$

5. Ausblick

In dieser Arbeit wurde eine mögliche Anwendung der Löwner-Theorie betrachtet. Eine der bekanntesten Anwendungen der Löwner-Theorie ist ihre Verwendung im Beweis von Weinsten der Bieberbachschen Vermutung [RS2]. Diese sagt aus, dass für die Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung in 0 von Funktionen aus S die Abschätzung $|a_n| \leq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt und scharf ist. Außerdem ist erwähnenswert, dass wir in dieser Arbeit die Gültigkeit der Differentialgleichung nur für die Schlitzabbildungen aus S gezeigt haben. Tatsächlich können wir dieses Resultat zu folgendem Satz verallgemeinern [Hay].

Satz 5.1. *Sei $\kappa: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ eine messbare Funktion mit $|\kappa(t)| \leq 1$ für alle $t \in [0, \infty)$. Dann existiert eine eindeutige und in t absolut stetige Funktion $f(z, t)$, welche für fast alle $t \in [0, \infty)$ die Löwner-Differentialgleichung*

$$\frac{\partial f(z, t)}{\partial t} = -f(z, t) \frac{1 + \kappa(t)f(z, t)}{1 - \kappa(t)f(z, t)} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{E}$$

mit Anfangswert $f(z, 0) = z$ erfüllt. Die Lösungen besitzen zusätzlich die Eigenschaft

$$e^t f(z, t) \in S \quad \text{für alle } t \in [0, \infty)$$

und es gilt bezüglich kompakter Konvergenz auf $\mathbb{E}$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^t f(\cdot, t) = f$$

für eine Funktion $f \in S$.

Wie bereits erwähnt, ist nicht bekannt, welche Bedingungen an κ gestellt werden müssen, damit die Lösung der Differentialgleichung eine Schlitzabbildung ist. Wir haben in Satz 3.38 notwendige Bedingungen gefunden, denn für jede Schlitzabbildung f existiert eine stetige Funktion $\kappa: [0, \infty) \rightarrow \partial\mathbb{E}$, sodass die obige Differentialgleichung für alle t erfüllt ist.

Eine andere Anwendung der Löwner-Theorie liegt in der Wahrscheinlichkeitstheorie der sogenannten *Schramm-Loewner-Entwicklung*. Wendeling Werner hat 2006 unter anderem für seine Beiträge in dieser Theorie die Fields-Medaille erhalten.

In dieser Arbeit haben wir außerdem den Jordanschen Kurvensatz mit Mitteln der Funktionentheorie bewiesen. Es ist naheliegend, dass man diesen Satz auch mit Mitteln der (algebraischen) Topologie beweisen kann. Wir verweisen an dieser Stelle auf [Ful] für einen Beweis mittels Homologietheorie. Der Jordansche Kurvensatz besitzt zusätzlich folgende (topologische) Verallgemeinerungen [TDi].

Satz 5.2. *Seien A und B homöomorphe und kompakte Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. Dann haben die Komplemente $\mathbb{R}^n \setminus A$ und $\mathbb{R}^n \setminus B$ dieselbe Anzahl an zusammenhängenden Komponenten.*

Hierbei ist zu bemerken, dass die resultierenden Komponenten nicht notwendig homöomorph sein müssen und es gilt noch folgender Satz, welcher für $n = 2$ genau die Aussage des Jordanschen Kurvensatzes liefert.

Satz 5.3. *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ homöomorph zu S^{n-1} für $n \geq 2$. Dann besitzt $\mathbb{R}^n \setminus A$ genau zwei Komponenten, wobei eine Komponente I beschränkt und die andere Komponente J unbeschränkt ist. Zusätzlich stimmen die Ränder von I und J mit A überein.*

Zuletzt werden wir einen Ausblick auf das Kapitel der sternförmigen und konvexen Funktionen geben. Hierbei gibt es zwei wesentliche Vorgehensweisen. Zum einen können wir den Begriff der sternförmigen und konvexen Funktionen durch folgende Definitionen verschärfen [GK].

Definition 5.4. Sei $f: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit $f(0) = 0$ und $f'(0) \neq 0$. Es sei $0 \leq \alpha < 1$.

Wir nennen f sternförmig der Ordnung α mit Zentrum 0, falls gilt

$$\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} > \alpha \quad \text{für alle } z \in \mathbb{E}.$$

Wir nennen f konvex der Ordnung α , falls gilt

$$\operatorname{Re} \left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right] > \alpha \quad \text{für alle } z \in \mathbb{E}.$$

Für $\alpha = 0$ erhalten wir die bereits eingeführte Definition von sternförmigen und konvexen Funktionen und wegen $\alpha \geq 0$ sind diese Funktionen auch im gewöhnlichen Sinne sternförmig mit Zentrum 0 und konvex.

Zum anderen können wir holomorphe Funktionen mehrerer Veränderlichen betrachten und eine analytische Charakterisierung und entsprechende Eigenschaften für sternförmige und konvexe Funktionen herleiten.

Literaturverzeichnis

- [Ahl] L. V. AHLFORS: *Conformal Invariants (Topics In Geometric Function Theory)*, McGraw-Hill (1973).
- [BS] H. BEHNKE, F. SOMMER: *Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen*, Springer-Verlag (1965).
- [Bie] L. BIEBERBACH: *Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln.*, S.-B. Preuss. Akad. Wiss. 940955 (1916).
- [deBr] L. DE BRANGES: *A proof of the Bieberbach conjecture*, Acta Math. 154 (1985).
- [Car] C. CARATHÉODORY: *Über die gegenseitige Beziehung der Ränder bei der konformen Abbildung des Inneren einer Jordanschen Kurve auf einen Kreis*, Math. Ann. 73 (1913).
- [Car1] C. CARATHÉODORY: *Untersuchungen über die konformen Abbildungen von festen und veränderlichen Gebieten*, Math. Ann. 72 (1912).
- [TDi] T. DIECK: *Topologie*, Walter de Gruyter 2. Auflage (2000).
- [Die] J. DIEUDONNÉ: *Foundation Of Modern Analysis*, Academic Press (1969).
- [Dur] P. L. DUREN: *Univalent Functions*, Springer-Verlag (1983).
- [FB1] E. FREITAG, R. BUSAM: *Funktionentheorie 1*, Springer-Verlag 4.Auflage (2006).
- [For] O. FORSTER: *Analysis 2 (Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$, gewöhnliche Differentialgleichungen)*, Vieweg + Teubner 9.Auflage (2011).
- [Ful] W. FULTON: *Algebraic Topology (A First Course)*, Springer-Verlag (1995).
- [Gol1] G. GOLUSIN: *Geometrische Funktionentheorie*, Berlin (1957).
- [Gol2] G. M. GOLUZIN: *Geometric Theory Of Functions Of A Complex Variable*, english transl., Amer. Math. Soc. (1969).
- [GK] I. GRAHAM, G. KOHR: *Geometric Function Theory In One And Higher Dimensions*, Marcel Dekker, Inc. (2003).
- [Hay] W. K. HAYMAN: *Multivalent Functions*, Cambridge University Press 2.Auflage (1994).
- [Jor] C. JORDAN: *Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique*, Gauthier-Villars (1887).
- [Lor] F. LORENZ: *Funktionentheorie*, Spektrum Akademischer Verlag (1997).

- [Nev] R. NEVANLINNA: *Über die konforme Abbildung von Sterngebieten*, Översikt av Finska Vetenskaps-Soc. Förh. (1920).
- [Pom] C. POMMERENKE: *Univalent Functions (with a chapter on Quadratic Differentials by Gerd Jensen)*, Vandenhoeck & Ruprecht (1975).
- [RS1] R. REMMERT, G. SCHUMACHER: *Funktionentheorie*, Springer-Verlag 5.Auflage (2002).
- [RS2] R. REMMERT, G. SCHUMACHER: *Funktionentheorie 2*, Springer-Verlag 3.Auflage (2007).
- [Yon] K. YONEYAMA: *Theory of continuous set of points*, The Thoku Mathematical Journal 12 (1917).

A. Danksagung

Ich möchte mich an dieser Stelle bei Herrn Prof. Dr. Georg Schumacher bedanken, der mir während meines bisherigen Studiums die Grundlagen und tiefere Einblicke in die komplexe Analysis und Geometrie ermöglicht sowie die Bearbeitung dieses interessanten Themas realisiert hat.

Einen besonderen Dank möchte ich an Dr. Thomas Geiger richten. Zum einen habe ich ihm in großen Teilen die Idee dieses Themas zu verdanken und zum anderen möchte ich ihm für die freundliche und konstruktive Betreuung bei sowohl formellen als auch mathematischen Fragen sowie für die ausführliche Besprechung einiger Problemstellen - vor allem bei dem Beweis des Satzes 4.7 - bei dieser Arbeit bedanken.

B. Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Bachelorarbeit

Anwendungen der Löwner-Theorie

selbständig und ohne fremde Hilfe verfasst habe. Außerdem habe ich keine anderen als die angegebenen Quellen benutzt und alle wörtlich oder sinngemäß aus anderen Werken übernommenen Aussagen als solche gekennzeichnet.

Maximilian Schmidt