Krümmung von höheren direkten Bildgarben auf dem Modulraum der stabilen Vektorbündel

Philipps Universität Marburg

Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)

dem
Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
vorgelegt von

Thomas Wolfgang Geiger

aus Aschaffenburg

Marburg, im September 2013

Vom Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
als Dissertation angenommen am: 06.11.2013

Erstgutachter: Prof. Dr. G. Schumacher
Zweitgutachter: Prof. Dr. Th. Bauer

Tag der mündlichen Prüfung: 20.11.2013

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

Diese Arbeit ist ein Beitrag zur Modulraumtheorie stabiler Vektorbündel, insbesondere zur Untersuchung der Geometrie solcher Moduläume mit transzendenten Methoden.

Das Stabilitätskonzept für Vektorbündel wurde 1962 von Mumford auf Kurven eingeführt ([Mu63]) und 1972 von Takemoto auf die allgemeine Situation übertragen ([Ta72]). Es ermöglicht mittels geometrischer Invariantentheorie ([MFK94]) Moduläume von Vektorbündeln zu konstruieren und diese mit Methoden der algebraischen Geometrie zu untersuchen. Einen analytischen Zugang zum Modulproblem von Vektorbündeln erschloss S. Kobayashi 1980 mit der Verallgemeinerung des Konzeptes der Kähler-Einstein-Metriken in Tangentialbündeln komplexer Mannigfaltigkeiten auf beliebige holomorphe Vektorbündel ([Kb80]). Die entsprechenden Metriken nennt man Hermite-Einstein-Metriken und sie führen unter Einsatz analytischer Methoden zu Modulräumen in der Kategorie der komplexen Räume. So konstruierte beispielsweise Kim 1987 in der Arbeit [Ki87] solche Moduläume im obstruktionsfreien Fall. Weitere Arbeiten zu dieser Thematik stammen unter anderem von Fujiki, Itoh, Kobayashi, Lübke, Okonek und Schumacher, vergleiche [FS87, It85, Kb87, LO87]. Bereits 1982 gelang S. Kobayashi der Nachweis der Stabilität irreduzibler Hermite-Einstein-Vektorbündel über kompakten Kählermannigfaltigkeiten ([Kb82]) und zeitgleich mit Hitchin stellte er die Vermutung auf, dass beide Begriffe überhaupt äquivalent sind. Diese Vermutung wurde in der Zeit von 1982 bis 1986 durch verschiedene Arbeiten von Donaldson, Uhlenbeck und Yau bewiesen, vergleiche [Do83, Do85, Do87, UY86, UY89]. Ferner konnte gezeigt werden, dass sogar ein Isomorphismus der entsprechenden Moduläume stabiler sowie irreduzibler Hermite-Einstein-Vektorbündel existiert (siehe unter anderem [LO87, Mi89, LT95]). Damit haben sich im Nachhinein der algebraische sowie der analytische Ansatz zum Modulproblem der Vektorbündel als äquivalent herausgestellt, was heute üblicherweise als Kobayashi-Hitchin-Korrespondenz bezeichnet wird. Auch in Situationen, welche der eben beschriebenen ähnlich sind, wurden vielfach Beziehungen zwischen zunächst sehr unterschiedlichen Modulräumen gefunden, welche als Verallgemeinerungen der Kobayashi-Hitchin-Korrespondenz angesehen werden können. Ein frühes Beispiel, an dem auch heute noch gearbeitet wird, ist die Situation gerahmter Bündel, worunter man im Wesentlichen holomorphe Vektorbündel $E \to X$ versteht, deren holomorphe Struktur entlang einer gegebenen Untermannigfaltigkeit $Y \subset X$ zu einer festen Struktur isomorph ist. In der Arbeit [Do84] gelang Donaldson in einem Spezialfall dieser Situation ein Beweis einer entsprechenden Kobayashi-Hitchin-Korrespondenz, welche später von Buchdahl in [Bu93] verallgemeinert wurde. Ferner arbeiteten unter anderem Lübke, Okonek und Schumacher an dieser Fragestellung, siehe [LOS93, Lue93].

Moduläume stabiler Bündel sind nach wie vor Gegenstand intensiver Forschung und kommen in vielen verschiedenen Bereichen zur Anwendung. Um nur ein Beispiel zu nennen sei auf die Arbeit von Teleman zur Enriques-Kodaira-Klassifikation kompakter, komplexer Flächen hingewiesen. Die Klassifikation speziell der Flächen aus der Klasse VII mit positiver zweiter Bettizahl

b_2 ist noch unvollständig. Hier versucht Teleman mit Eigenschaften von Modulräumen stabiler Bündel, vor allem mit Informationen über mögliche positiv dimensionale algebraische Untervarietäten und die von ihnen parametrisierten Familien, die sogenannte Global-Spherical-Shell-Vermutung zu beweisen. Der Ansatzpunkt ist dabei die Arbeit [DOT03] von Dloussky, Oeljeklaus und Toma von 2003, welche das Problem im Wesentlichen darauf reduziert, dass genügend viele rationale Kurven auf der betrachteten Fläche konstruiert werden müssen. Im Fall $b_2 = 1$ gelang Teleman mit dieser Methode ein Beweis der Vermutung und im Fall $b_2 = 2$ konnten erste Teilresultate gezeigt werden. Die Motivation ist hierbei, dass man aus der Gültigkeit der Global-Spherical-Shell-Vermutung folgern kann, dass alle Flächen aus der Klasse VII mit positiver zweiter Bettizahl Kato-Flächen sind. Aus diesem Grund vervollständigt ein Beweis dieser Vermutung unmittelbar die Klassifikation aller kompakten, komplexen Flächen. Wegen Details zu dieser Arbeit sei auf [Te05, Te08, Te10] verwiesen.

Ein vielversprechender Forschungsgegenstand, welcher seit kurzem eingehend untersucht wird, ist die Geometrie höherer direkter Bildgarben in Situationen, in denen diese lokal frei sind. Von besonderem Interesse sind dabei algebraische sowie differentialgeometrische Positivitätseigenschaften der assoziierten Vektorbündel. Wir gehen kurz auf einige konkrete Beispiele ein, an denen gearbeitet wird, um deutlich zu machen, wie vielfältig die möglichen Anwendungen in diesem Bereich sind.

Berndtsson, Păun, Mourougane und Takayama arbeiten in der Situation einer holomorphen Abbildung $f : X \to Y$ komplexer Mannigfaltigkeiten sowie einem gegebenen holomorphen Vektorbündel $E \to X$ an der Untersuchung direkter Bildgarben der Form $R^q f_*(E \otimes K_{X/Y})$, wobei jeweils zusätzliche Bedingungen an die beteiligten Objekte gestellt werden. Dabei bezeichnen wir mit $K_{X/Y} = K_X \otimes f^*(K_Y)^{-1}$ das relative kanonische Bündel. In der Arbeit [MT07] zeigen Mourougane und Takayama unter anderem, dass auf der direkten Bildgarbe $f_*(E \otimes K_{X/Y}) = R^0 f_*(E \otimes K_{X/Y})$ eine Griffiths-positive Metrik existiert, sofern f eine Submersion ist, X und Y projektive Mannigfaltigkeiten sind und E ein amples Geradenbündel ist. Zeitgleich beweist Berndtsson in [Be09a] sogar die stärkere Aussage, dass es auf dieser Bildgarbe eine Nakano-positive (beziehungsweise semipositive) Metrik gibt, falls schwächere Voraussetzungen erfüllt sind. Genauer ist es hierfür ausreichend, dass f eine Submersion mit kompakten Fasern, X eine Kählermannigfaltigkeit und E ein positives (beziehungsweise semipositives) Geradenbündel ist. Dabei sind sowohl die eingesetzte Methode als auch die konstruierte Metrik in beiden Arbeiten jeweils verschieden. Mourougane und Takayama verwenden die Variation von Hodge-Strukturen und die Berechnung der Krümmung der Hodge-Metrik von Griffiths auf geeigneten zyklischen Überlagerungen von Y, welche mit dem Satz von Bertini aus der Ampleness des Vektorbündels gewonnen werden. Anschließend setzen sie Fujitas Methode ein, um die entstehenden Singularitäten der Hodge-Metriken zu kontrollieren. Berndtsson hingegen erhält die lokale Freiheit aus einem Fortsetzungssatz vom Ohsawa-Takegoshi-Typ und nutzt die genaue Kenntnis der holomorphen Struktur des Bündels, um direkt den Chern-Zusammenhang einer konstruierten L_2-Metrik auf dem Bündel zu berechnen und damit die Krümmung abzuschätzen. In beiden Arbeiten ist eine Motivation für die Untersuchung, dass es einen Bezug zur Griffiths-Vermutung gibt: Ist M eine komplexe Mannigfaltigkeit und $F \to M$ ein holomorphes Vektorbündel, welches eine Griffiths-positive Metrik trägt, dann ist F stets ample (vergleiche beispielsweise [SS85]). Griffiths hat 1969 in [Gr69] die Vermutung aufgestellt, dass auch die Umkehrung dieser Aussage richtig ist und damit Griffiths-Positivität und Ampleness auf kompakten, komplexen Mannigfaltigkeiten äquivalent sind. Für Geradenbündel ist dies als Teil von Kodairas Einbettungssatz richtig und über Kurven M wurde die Aussage 1973 von Umemura in [Um73] gezeigt. In allen anderen Fällen ist das Problem jedoch noch offen. Gemäß Berndtsson, Mourougane und Takayama betrachten wir zu einem gegebenen holomorphen Vektorbündel $F \to M$ das assoziierte Faserbündel $\pi : \mathbb{P}(F) \to M$ der projektiven Räume des dualen Bündels F^*. Dann ist F definitionsgemäß genau dann ample, wenn das Serre-Geradenbündel $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(F)}(1) \to \mathbb{P}(F)$ im üblichen Sinn ample ist. In diesem Fall ist auch

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}(F)}(r+1) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(F)}(1)^{\otimes(r+1)}$$

mit $r = \mathrm{rk}(F)$ ample und damit positiv, so dass mit den erwähnten Resultaten die Nakano-Positivität und damit die Griffiths-Positivität des Bündels

$$\pi_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(F)}(r+1) \otimes K_{\mathbb{P}(F)/M})$$

folgt. Nun wird in [Be09a] gezeigt, dass dieses Bündel zu $F \otimes \det(F)$ isomorph ist. Analog erhält man die Nakano-Positivität von $S^kF \otimes \det(F)$ für alle $k \in \mathbb{N}$, wenn man $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(F)}(r+k)$ betrachtet. Insgesamt folgt also für ein amples Vektorbündel F stets die Nakano-Positivität aller Bündel $S^kF \otimes \det(F)$. Umgekehrt zeigt ein Resultat von Demailly und Skoda aus [DS78], dass auch aus der Griffiths-Positivität von F stets die Nakano-Positivität von $F \otimes \det(F)$ folgt, so dass man obiges Argument zumindest als ein Indiz für die Gültigkeit der Griffiths-Vermutung ansehen kann. Eine weitere Motivation für die Untersuchung dieser Bildgarben in [Be09a] ist, dass man aus ihrer Nakano-Positivität auch die analytische Aussage gewinnen kann, dass bestimmte parameterabhängige Bergman-Kerne gewisse Subharmonizitätseigenschaften besitzen, was wiederum auf viele Anwendungen in der algebraischen Geometrie führt. Wegen Details hierzu und Verfeinerungen des Resultats aus [Be09a] veweisen wir auf die Fortsetzung dieser Arbeit durch Berndtsson und Păun in [BP08a, BP08b, Be09b, BP10, Be11]. Andererseits wurde eine Verallgemeinerung der Positivitätsaussagen aus [Be09a, MT07] auf höhere direkte Bildgarben sowie Vektorbündel beliebigen Ranges durch Mourougane und Takayama in [MT08] gezeigt. Hier wird im Wesentlichen die Methode von Berndtsson zur Berechnung der Krümmung mit der harmonischen Theorie von Takegoshi kombiniert. Auch an der Verbesserung dieser Aussage wird nach wie vor gearbeitet, vergleiche beispielsweise [MT09]. Schließlich weisen wir noch darauf hin, dass auch Tsuji an ähnlichen Aussagen arbeitet, vergleiche [Ts05].

In [Sch12] (siehe auch [Sch13]) beweist Schumacher einige Eigenschaften von Modulräumen kanonisch polarisierter Varietäten. Dazu wendet er zunächst für eine Kähler-Einstein-Mannigfaltigkeit (X, g) mit konstanter Ricci-Krümmung -1 eine untere Abschätzung des Kerns der Wärmeleitungsgleichung von Cheeger und Yau auf den Resolventenkern des Operators $(1 + \Box)$ an und erhält hierdurch die Existenz einer strikt positiven Funktion $P_n(d(X))$, welche nur von der Dimension n von X und dem Durchmesser $d(X)$ abhängt, so dass für jede nichtnegative stetige Funktion χ jede Lösung ϕ der Gleichung $(1 + \Box)\phi = \chi$ vermöge

$$\phi(z) \geqslant P_n(d(X)) \cdot \int_X \chi g \, dV$$

für alle $z \in X$ nach unten abgeschätzt werden kann. Aus dieser Abschätzung gewinnt er sodann als Hauptresultat, dass die Krümmung der hermiteschen Metrik, welche auf dem relativen kanonischen Bündel $K_{\mathcal{X}/S}$ einer holomorphen Familie $f : \mathcal{X} \to S$ kanonisch polarisierter, komplexer Mannigfaltigkeiten von den Kähler-Einstein-Metriken der Fasern induziert wird, strikt positiv ist, sofern die Familie nirgends infinitesimal trivial ist. Als Folgerung hieraus gelingt Schumacher die Konstruktion eines positiven Geradenbündels auf dem Modulraum der kanonisch polarisierten Mannigfaltigkeiten, was dessen Quasiprojektivität zeigt. Eine weitere Anwendung der bewiesenen Abschätzung und des Hauptresultats ergibt sich im Hinblick auf höhere direkte Bildgarben. Konkret betrachtet Schumacher Bildgarben der Gestalt $R^{n-p} f_* \Omega^p_{\mathcal{X}/S}(K^{\otimes m}_{\mathcal{X}/S})$ auf welchen eine natürliche hermitesche Metrik existiert, die von dem L_2-Skalarprodukt der harmonischen Tensoren auf den Fasern von f induziert wird. Mit diesen Metriken berechnet er eine explizite Formel für den Krümmungstensor und kann diesen vermöge der Abschätzung des Resolventenkerns auch abschätzen. Insbesondere erhält er so durch Angabe einer expliziten unteren Schranke die Aussage, dass die lokal freien Garben

$$f_* K^{\otimes(m+1)}_{\mathcal{X}/S} \longrightarrow S$$

Nakano-positiv sind. Im Spezialfall eindimensionaler Fasern ist $f_* K^{\otimes(2)}_{\mathcal{X}/S}$ gerade die Garbe der quadratischen holomorphen Differentialformen des Teichmüllerraums der Riemannschen Flächen eines Geschlechts $g \geqslant 2$, faserweise ausgestattet mit dem L_2-Skalarprodukt. Da dies jedoch die zur Weil-Petersson-Metrik dieses Raums duale Situation ist, folgt insbesondere als Anwendung die starke Krümmungsaussage von Liu, Sun und Yau, welche besagt, dass die Weil-Petersson-Metrik auf dem Teichmüllerraum der Riemannschen Flächen vom Geschlecht $g \geqslant 2$ dual Nakano-negativ ist. Die berechnete Krümmung der höheren direkten Bildgarben besitzt jedoch noch weitere Anwendungen. Mit der Serre-Dualität liefert sie sofort auch eine Krümmungsformel für höhere direkte Bildgarben der Form $R^p f_* \wedge^p T_{\mathcal{X}/S}$. Vermöge des natürlichen Morphismus

$$S^p(R^1 f_* T_{\mathcal{X}/S}) \longrightarrow R^p f_* \wedge^p T_{\mathcal{X}/S}$$

sowie des Kodaira-Spencer-Morphismus, welcher im Falle von Familien kanonisch polarisierter Mannigfaltigkeiten gerade die Gestalt

$$\rho_S : T_S \longrightarrow R^1 f_* T_{\mathcal{X}/S}$$

besitzt, erhält Schumacher die verallgemeinerten Kodaira-Spencer-Morphismen

$$\rho^p_S : S^p T_S \longrightarrow R^p f_* \wedge^p T_{\mathcal{X}/S}$$

der Ordnung p, welche wiederum zu verallgemeinerten Weil-Petersson-Funktionen der jeweiligen Ordnung p auf den Tangentialräumen $T_{S,s}$ Anlass geben. Ist speziell S eine Kurve, dann definiert die Funktion einer beliebigen Ordnung p stets eine hermitesche Pseudometrik auf der Kurve, deren Krümmung im Wesentlichen abgeschätzt werden kann. Durch Anwenden einer Variante des Ahlfors-Lemmas, welche von Demailly bewiesen wurde, erhält Schumacher hieraus einerseits einen Spezialfall der Hyperbolizitätsvermutung von Shafarevich: Wird eine nicht isotriviale

Familie kanonisch polarisierter Mannigfaltigkeiten durch eine Kurve C parametrisiert, so muss deren Geschlecht größer als 1 sein. Anders formuliert sind in Familien kanonisch polarisierter Mannigfaltigkeiten, parametrisiert durch den projektiven Raum $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ oder eine elliptische Kurve, je zwei Fasern isomorph. Andererseits folgt jedoch auch eine Hyperbolizitätseigenschaft des Modulraums kanonisch polarisierter Mannigfaltigkeiten. Genauer zeigt Schumacher, dass jeder relativ kompakte, offene Unterraum dieses Modulraums bereits Kobayashi-hyperbolisch im Sinne von Orbifolds ist. Schließlich wird noch angedeutet, wie die verallgemeinerten Weil-Petersson-Funktionen verwendet werden können, um eine Finsler-Metrik auf jedem relativ kompakten Unterraum des Modulstacks der kanonisch polarisierten Varietäten zu konstruieren, deren holomorphe Krümmung nach oben durch eine negative Konstante abgeschätzt werden kann.

Mit unserem letzten Beispiel nähern wir uns der Thematik der vorliegenden Arbeit und fassen einige Untersuchungen im Zusammenhang mit Modulräumen stabiler Vektorbündel zusammen. In der Arbeit [ST92] berechnen Schumacher und Toma eine Formel für den Krümmungstensor der Weil-Petersson-Metrik auf der Basis einer Familie von Hermite-Einstein-Vektorbündeln. Dies kann als Berechnung der Krümmung der L_2-Metrik auf der Bildgarbe $R^1p_*\mathcal{O}(\mathrm{End}(F))$ aufgefasst werden, wobei $F \to X \times S$ die Familie von Hermite-Einstein-Vektorbündeln und $p : X \times S \to S$ die Projektion auf den zweiten Faktor bezeichne. In derselben Situation berechnen To und Weng durch Rückgriff auf den Ansatz von Schumacher und Toma die Krümmung der L_2-Metrik auf Bildgarben der Gestalt $p_*\mathcal{O}(F) = R^0p_*\mathcal{O}(F)$, vergleiche [TW98]. Insbesondere zeigen sie in dieser Arbeit, dass die Krümmungsformel für Familien von amplen, hermiteschen Geradenbündeln $(L, h) \to X \times S$ mit fester erster Chern-Form $c_1(L_s, h_s) = k/2\pi\omega$ für ein $k \in \mathbb{R}_{>0}$, wobei ω die Kählerform der Kählermannigfaltigkeit (X, g) bezeichne, eine besonders einfache Gestalt annimmt, sofern die Ricci-Krümmung von (X, g) semipositiv ist. Als Anwendung gewinnen sie eine Aussage über Picard-Bündel auf allgemeinen Räumen. Sei dazu X eine kompakte, komplexe Mannigfaltigkeit und $\mathcal{P} \to X \times \mathrm{Pic}^0(X)$ ein Poincaré-Bündel, wobei $\mathrm{Pic}^0(X)$ die Picard-Varietät von X bezeichne. Genauer gilt dann die Normierungseigenschaft $\mathcal{P}|_{X\times\{0\}} = \mathcal{O}_X$ und für jeden Punkt $s \in \mathrm{Pic}^0(X)$ des Parameterraums dieser Familie $\mathcal{P}$ ist $\mathcal{P}|_{X\times\{s\}}$ ein Geradenbündel aus der Isomorphieklasse s. Ist nun $L \to X$ ein beliebiges amples Geradenbündel, dann kann das assoziierte Picard-Bündel $\mathcal{W}(L) \to \mathrm{Pic}^0(X)$ vermöge $\mathcal{W}(L) = p_*(\mathcal{P} \otimes \pi^*L)$ konstruiert werden, wobei $\pi : X \times \mathrm{Pic}^0(X) \to X$ die Projektion auf den ersten Faktor bezeichne. In dieser Situation folgern To und Weng aus der einfachen Krümmungsformel im Fall $c_1(X) \geqslant 0$, dass solche Picard-Bündel stets polystabil bezüglich jeder Kählerform auf $\mathrm{Pic}^0(X)$ sind. Eine der ersten Stabilitätsaussagen über Picard-Bündel überhaupt wurde 1992 von Ein und Lazarsfeld in [EL92] bewiesen: Ist X eine vollständige, glatte, algebraische Kurve vom Geschlecht g, dann sind die Picard-Bündel $\mathcal{W}(L)$ für Geradenbündel L vom Grad $d > 2g - 2$ stabile Vektorbündel bezüglich des Theta-Divisors θ auf der Jacobi-Varietät $\mathrm{Pic}^0(X)$. Das Resultat von To und Weng liefert zwar nur Polystabilität, gilt dafür jedoch für eine große Klasse von Mannigfaltigkeiten, beispielsweise für alle abelschen Varietäten. In [Ke92] erläutert Kempf eine Fragestellung, welche auf Narasimhan zurückgeht: Wegen ihrer Stabilität gibt es auf den Picard-Bündeln gemäß der Kobayashi-Hitchin-Korrespondenz eine bis auf einen konstanten positiven Faktor eindeutig bestimmte Hermite-Einstein-Metrik. Narasimhan warf in diesem Kontext die Frage auf, ob sich diese Metrik, welche im Allgemeinen als Lösung von globalen Differentialgleichungen entsteht, in dieser speziellen Situation auf eine andere, konkrete Art gewinnen lässt. Kempf zeigt, dass falls

X eine abelsche Varietät ist, die Hermite-Einstein-Metrik bezüglich irgendeiner translationsinvarianten Kähler-Metrik auf $\hat{X}$, wobei in diesem Fall die duale abelsche Varietät $\hat{X}$ gerade der Picard-Varietät von X entspricht, im Wesentlichen durch eine L_2-Metrik erhalten werden kann. To und Weng geben hierfür mit den von ihnen bereitgestellten Resultaten einen alternativen, differentialgeometrischen Beweis.

Nachdem wir in Kapitel 2 dieser Arbeit Grundlagen zur Differentialgeometrie in holomorphen Vektorbündeln und in Kapitel 3 bekannte Resultate über Familien holomorpher Vektorbündel wiederholt haben, verallgemeinern wir in Kapitel 4 die im vorherigen Beispiel beschriebene Situation auf dem Modulraum der stabilen Vektorbündel und betrachten dazu für eine Familie $(F, h) \to X \times S$ von Hermite-Einstein-Vektorbündeln auf einer kompakten Kählermannigfaltigkeit (X, g), parametrisiert durch eine komplexe Mannigfaltigkeit S, die höheren direkten Bildgarben $R^q p_* \mathcal{O}(F)$, wobei wie zuvor $p : X \times S \to S$ die Projektion auf die Basis bezeichnet. Diese Garben sind im Allgemeinen nicht mehr auf dem ganzen Parameterraum lokal frei, sondern nur noch außerhalb einer Ausnahmemenge $A_q(F) \subset S$, welche stets eine echte analytische Teilmenge von S ist. Wir geben eine Charakterisierung dieser Ausnahmemengen an, welche es uns ermöglicht, die von den höheren direkten Bildgarben induzierten Vektorbündel auf $S \setminus A_q(F)$ genau zu beschreiben, insbesondere ihre Fasern sowie ihre Schnitte über steinschen, offenen Teilmengen. Ferner untersuchen wir einige konkrete Situationen, in denen die Ausnahmemengen verschwinden oder zumindest nur die Singularitäten des betrachteten Modulraums widerspiegeln. Die genaue Beschreibung der induzierten Vektorbündel ermöglicht es uns nachzuweisen, dass die höheren direkten Bildgarben eine natürliche Metrik tragen. Diese wird faserweise vom L_2-Skalarprodukt harmonischer Repräsentanten induziert, weshalb wir sie als L_2-Metrik bezeichnen. Anschließend berechnen wir eine Formel für den Krümmungstensor dieser Metrik, welche sowohl das Resultat von Schumacher und Toma als auch das Resultat von To und Weng als Spezialfälle beinhaltet. Dabei möchte man die Krümmung soweit ausrechnen, dass sie alleine durch Repräsentanten von Kodaira-Spencer-Klassen sowie einer Basis des entsprechenden Raums der harmonischen Formen ausgedrückt werden kann. Wie auch in der Arbeit von To und Weng entsteht jedoch in unserer Formel zunächst noch ein zusätzlicher Summand, welcher nicht auf diese Weise geschrieben werden kann, und aus diesem Grund untersuchen wir einige Möglichkeiten, diesen Summanden in den Griff zu bekommen, wie etwa Familien mit isotrivialer Determinante sowie Familien von Endomorphismenbündeln. Ob allerdings eine Abschätzung der Krümmung wie beispielsweise in der Arbeit [Sch12] von Schumacher möglich ist, bleibt ein offenes Problem, da der in den Summanden der hergeleiteten Krümmungsformel auftretende Green-Operator der Faser Schwierigkeiten bei der Abschätzung bereitet, welche im Fall von Mannigfaltigkeiten nicht auftreten. In Kapitel 5 skizzieren wir eine mögliche Anwendung der entwickelten Methode im Hinblick auf die Fragestellung nach der Existenz von Kurven in Modulräumen stabiler Vektorbündel. Es ist im Moment allerdings noch unklar, ob sich der skizzierte Beweis tatsächlich ausarbeiten lässt, da er wesentlich auf einer geeigneten Abschätzung der hergeleiteten Krümmungsformel beruht.

2. Holomorphe Vektorbündel

In diesem Kapitel stellen wir einige allgemein bekannte Resultate über holomorphe Vektorbündel zusammen, die in unseren späteren Rechnungen unverzichtbar sind. Um unsere Notationen festzulegen, entwickeln wir zunächst unsere lokale Sicht auf Vektorbündel sowie die auf ihnen definierten differentialgeometrischen Objekte und untersuchen im Anschluss zwei für uns besonders relevante Konstruktionen: Endomorphismen- und Determinantenbündel. In dieser Arbeit ziehen wir die lokale der globalen Sichtweise vor, da viele unserer späteren Rechnungen wesentlich darauf beruhen, die in Rede stehenden Objekte lokal betrachten zu können. Wir schließen dieses Kapitel mit einem kurzen Überblick über Modulprobleme ab. Dabei betrachten wir insbesondere das für diese Arbeit wichtige Modulproblem der stabilen Vektorbündel und führen viele der Begriffe ein, die wir in diesem Kontext später benötigen.

2.1. Notationen

Wie üblich verstehen wir unter einem holomorphen Vektorbündel F vom Rang r auf einer komplexen Mannigfaltigkeit M der Dimension m eine holomorphe Abbildung

$$\pi : F \longrightarrow M,$$

wobei F ebenfalls eine komplexe Mannigfaltigkeit ist, so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

(i) Für jeden Punkt $p \in M$ ist die Faser $F_p := \pi^{-1}(p)$ über diesem Punkt ein komplexer Vektorraum der Dimension r.

(ii) Für jeden Punkt $p \in M$ der Basis gibt es eine trivialisierende Umgebung U um p, d.h. eine Umgebung U des Punktes p und eine biholomorphe Abbildung $f : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^r$, so dass mit π_1 als Bezeichnung für die Projektion auf den ersten Faktor das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U \times \mathbb{C}^r \arrow[dl, "\pi_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

kommutiert und für alle $x \in U$ die von f induzierte Abbildung f_x, welche durch

$$f_x : F_x \xrightarrow{f} \{x\} \times \mathbb{C}^r \xrightarrow{\pi_2} \mathbb{C}^r$$

gegeben ist, ein Isomorphismus der komplexen Vektorräume F_x und $\mathbb{C}^r$ ist.

Für viele unserer Rechnungen ist es günstig eine lokale Sicht auf Vektorbündel zu verwenden und alle globalen Objekte, die auf einem solchen Vektorbündel definiert sind, aus der lokalen Sicht heraus zu beschreiben. Zu diesem Zweck wählen wir eine Überdeckung $\{U_j\}$ von M, so dass F jeweils über U_j durch eine biholomorphe Abbildung $f_j : \pi^{-1}(U_j) \to U_j \times \mathbb{C}^r$ trivialisiert werden kann. Jede solche Abbildung kann als ein Vektorbündelisomorphismus des eingeschränkten Vektorbündels $F|_{U_j}$ auf das triviale Vektorbündel $U_j \times \mathbb{C}^r \to U_j$ aufgefasst werden. Ist nun für jedes j eine holomorphe Abbildung $\varphi_j : U_j \to U_j \times \mathbb{C}^r$ mit $\pi_1 \circ \varphi_j = \mathrm{id}_{U_j}$ gegeben, d.h. ein holomorpher Schnitt des trivialen Bündels $U_j \times \mathbb{C}^r \to U_j$, dann erhalten wir mit $f_j^{-1} \circ \varphi_j$ jeweils einen holomorphen Schnitt des Bündels F über der Menge U_j, d.h. es ist jeweils $f_j^{-1} \circ \varphi_j \in \Gamma(U_j, \mathcal{O}(F))$. Die Bedingung dafür, dass diese Schnitte auf den Elementen U_j der Überdeckung von M jeweils durch Einschränken eines holomorphen Schnitts $\varphi \in \Gamma(M, \mathcal{O}(F))$ auf die Mengen U_j entstehen, diesen Schnitt φ also lokal beschreiben, ist, dass die $f_j^{-1} \circ \varphi_j$ auf den Überlappungsbereichen $U_j \cap U_k$ übereinstimmen, d.h. dass für alle Indizes j und k

$$\left(f_j^{-1} \circ \varphi_j\right)\Big|_{U_j \cap U_k} = \left(f_k^{-1} \circ \varphi_k\right)\Big|_{U_j \cap U_k}$$

gilt, da in diesem Fall die Garbenaxiome für die Garbe $\mathcal{O}(F)$ die Existenz eines solchen Schnittes φ sichern. Diese Bedingung können wir unmittelbar in die Gleichung $\varphi_j = f_j \circ f_k^{-1} \circ \varphi_k$ auf $U_j \cap U_k$ umformen. Wir definieren nun $f_{jk}(p) := \pi_2 \circ f_j \circ f_k^{-1}(p, \cdot)$ und erhalten damit die holomorphen Transitionsfunktionen

$$f_{jk} : U_j \cap U_k \longrightarrow \mathrm{GL}(r, \mathbb{C}) \tag{2.1}$$

des Bündels F bezüglich der trivialisierenden Überdeckung $\{U_j\}$. Obige Gleichung über die Verträglichkeit der Schnitte auf den Überlappungsbereichen kann mit Hilfe dieser Transitionsfunktionen als

$$\pi_2 \circ \varphi_j(p) = f_{jk}(p) \cdot (\pi_2 \circ \varphi_k(p)) \quad \text{für alle} \quad p \in U_j \cap U_k$$

geschrieben werden. Wir sehen also, dass ein holomorpher Schnitt $\varphi \in \Gamma(M, \mathcal{O}(F))$ durch die Vorgabe holomorpher Funktionen $\varphi'_j : U_j \to \mathbb{C}^r$, welche für alle Indizes j und k das Transitionsverhalten

$$\varphi'_j(p) = f_{jk}(p) \cdot \varphi'_k(p) \quad \text{für alle} \quad p \in U_j \cap U_k \tag{2.2}$$

besitzen, vollständig beschrieben wird. Offenbar können wir eine analoge Charakterisierung auch für differenzierbare Schnitte herleiten. Der einzige Unterschied besteht darin, dass die Funktionen φ'_j für einen solchen Schnitt lediglich differenzierbar zu sein brauchen.

Die Transitionsfunktionen, die wir eben zur lokalen Beschreibung holomorpher Schnitte des Bündels F definiert haben, besitzen eine weitere nützliche Eigenschaft, auf die wir häufig zurückgreifen werden. Zunächst erfüllen sie die Identitäten

$$\begin{aligned} f_{ij} \cdot f_{jk} \cdot f_{ki} &= \mathrm{id} \quad \text{auf} \quad U_i \cap U_j \cap U_k, \\ f_{ii} &= \mathrm{id} \quad \text{auf} \quad U_i, \end{aligned} \tag{2.3}$$

wovon man sich mittels einer kurzen Rechnung sofort überzeugt. Es ist bekannt (vergleiche beispielsweise [We07]), dass das Vektorbündel F durch die Vorgabe der Überdeckung $\{U_j\}$ sowie der Transitionsfunktionen $\{f_{jk}\}$ bezüglich dieser Überdeckung bis auf Isomorphie bereits vollständig beschrieben wird, d.h. sind eine Überdeckung $\{U_j\}$ von M und holomorphe Funktionen $\{f_{jk} : U_j \cap U_k \to \mathrm{GL}(r, \mathbb{C})\}$ gegeben, welche obigen Identitäten genügen, dann gibt es bis auf Isomorphie genau ein holomorphes Vektorbündel, welches bezüglich der gegebenen Überdeckung diese Transitionsfunktionen besitzt. Dies ermöglicht es, holomorphe Vektorbündel als eine Menge von Transitionsfunktionen zu betrachten, welche auf den Überlappungsbereichen einer Überdeckung definiert sind und obige Diskussion zeigt, wie mit Schnitten eines auf diese Weise gegebenen Vektorbündels zu rechnen ist. Wir werden diese Sichtweise später sehr häufig in konkreten Rechnungen verwenden und ebenfalls, um verschiedene für uns wichtige Vektorbündel zu konstruieren.

Als nächstes zeigen wir, dass der eben entwickelte Formalismus auch dazu geeignet ist, hermitesche, holomorphe Vektorbündel zu beschreiben. Dazu sei h eine hermitesche Metrik auf dem holomorphen Vektorbündel $\pi : F \to M$, d.h. jede Faser F_p ist mit einem hermiteschen Skalarprodukt h_p ausgestattet, so dass für je zwei differenzierbare Schnitte $\varphi, \psi \in \Gamma(U, \mathcal{A}(F))$ über einer offenen Menge $U \subset M$ die durch $p \mapsto h_p(\varphi(p), \psi(p))$ erklärte Funktion $U \to \mathbb{C}$ differenzierbar ist. Dabei meinen wir in dieser Arbeit, sofern nichts anderes gesagt wird, mit differenzierbar stets beliebig oft differenzierbar. Beschreiben wir das Vektorbündel F wie eben bezüglich einer offenen Überdeckung $\{U_j\}$ von M durch die Transitionsfunktionen $\{f_{jk}\}$, dann induziert die hermitesche Metrik h für jeden Punkt $p \in U_j$ ein hermitesches Skalarprodukt in der Faser $\{p\} \times \mathbb{C}^r \simeq \mathbb{C}^r$ der Trivialisierung $U_j \times \mathbb{C}^r \to U_j$, welches wir durch eine Matrix aus $\mathbb{C}^{r \times r}$ beschreiben können. Auf den Überlappungsbereichen der Überdeckung besitzen diese Matrizen erneut ein gewisses Transformationsverhalten, welches wir nun herleiten wollen. Zunächst haben wir also für jeden Index j eine differenzierbare Funktion $h_j : U_j \to \mathbb{C}^{r \times r}$, so dass $h_j(p)$ für alle $p \in U_j$ eine hermitesche, positiv definite Matrix ist. Sind zwei differenzierbare Schnitte φ, ψ des Vektorbündels F lokal durch Funktionen φ_j beziehungsweise ψ_j gegeben, dann ist

$$h_p(\varphi(p), \psi(p)) = (\varphi_j(p))^t \cdot h_j(p) \cdot \overline{\psi_j(p)} \quad \text{für alle} \quad p \in U_j.$$

Damit berechnen wir auf dem Überlappungsbereich $U_j \cap U_k$ unter Verwendung des Transitionsverhaltens der Funktionen φ_j und ψ_j aus (2.2):

$$\begin{aligned}(\varphi_k(p))^t \cdot h_k(p) \cdot \overline{\psi_k(p)} &= h_p(\varphi(p), \psi(p)) = (\varphi_j(p))^t \cdot h_j(p) \cdot \overline{\psi_j(p)} \\ &= (f_{jk}(p) \cdot \varphi_k(p))^t \cdot h_j(p) \cdot \overline{(f_{jk}(p) \cdot \psi_k(p))} = \varphi_k(p)^t \cdot \left(f_{jk}(p)^t \cdot h_j(p) \cdot \overline{f_{jk}(p)} \right) \cdot \overline{\psi_k(p)}.\end{aligned}$$

Hieraus folgt unmittelbar, dass die lokale Darstellung der hermiteschen Metrik h durch die Funktionen h_j folgendes Transformationsverhalten auf $U_j \cap U_k$ aufweisen muss:

$$h_k = f_{jk}^t \cdot h_j \cdot \overline{f_{jk}}. \tag{2.4}$$

Umgekehrt sieht man leicht, dass differenzierbare Funktionen $h_j : U_j \to \mathbb{C}^{r \times r}$, welche dieses Transformationsverhalten besitzen, eine hermitesche Metrik auf dem Vektorbündel F definieren. Wir haben also eine Möglichkeit hergeleitet, in der lokalen Beschreibung von Vektorbündeln mit hermiteschen Metriken zu arbeiten.

Bevor wir lokale Darstellungen für differentialgeometrische Objekte wie den Chern-Zusammenhang oder den Krümmungstensor einer hermiteschen Metrik herleiten können, müssen wir vorab noch kurz auf die lokale Beschreibung bündelwertiger Differentialformen eingehen. Beispielhaft betrachten wir hierfür die lokale Beschreibung bündelwertiger (p,q)-Formen. Zunächst erinnern wir daran, dass die Garbe der differenzierbaren (p,q)-Formen mit Werten im holomorphen Vektorbündel F durch

$$\mathcal{A}^{p,q}(F) := \mathcal{A}\left(\bigwedge\nolimits^{p,q} T^*M \otimes_{\mathbb{C}} F\right)$$

gegeben ist, wobei wir mit T^*M das holomorphe Kotangentialbündel von M bezeichnen. Um zu einer lokalen Beschreibung der Schnitte zu gelangen, nutzen wir folgenden Isomorphismus:

$$\mathcal{A}^{p,q}(F) = \mathcal{A}\left(\bigwedge\nolimits^{p,q} T^*M \otimes_{\mathbb{C}} F\right) \simeq \mathcal{A}^{p,q}(M) \otimes_{\mathcal{A}_M} \mathcal{A}(F).$$

Ist nun $U \subset M$ eine offene Teilmenge, über der wir das Vektorbündel F trivialisieren können, so ergibt sich für das eingeschränkte Bündel:

$$\mathcal{A}^{p,q}(F|_U) \simeq \mathcal{A}^{p,q}(U) \otimes_{\mathcal{A}_U} \mathcal{A}(F|_U) \simeq \mathcal{A}^{p,q}(U) \otimes_{\mathcal{A}_U} \mathcal{A}(U \times \mathbb{C}^r) \simeq (\mathcal{A}^{p,q}(U))^r.$$

Damit wird eine (p,q)-Form $\varphi \in \Gamma(M, \mathcal{A}^{p,q}(F))$ bezüglich einer trivialisierenden Überdeckung $\{U_j\}$ von F lokal beschrieben durch Vektoren von (p,q)-Formen über den Mengen U_j, d.h. durch

$$\varphi_j = \left(\varphi_j^1, \ldots, \varphi_j^r\right)^t \quad \text{mit} \quad \varphi_j^l \in \Gamma(U_j, \mathcal{A}^{p,q}(M)) \tag{2.5}$$

für jeden Index j. Verfolgt man die oben verwendeten Isomorphismen, dann sieht man, dass die Bedingung, welche an diese lokal gegebenen Objekte zu stellen ist, damit sie eine globale, bündelwertige Differentialform ergeben, analog zu der Bedingung (2.2) für holomorphe Schnitte gerade

$$\varphi_j = f_{jk} \cdot \varphi_k \quad \text{auf} \quad U_j \cap U_k \tag{2.6}$$

ist, wobei in dieser Gleichung ebenfalls ein Matrixprodukt gebildet wird, indem differenzierbare Funktionen mit (p,q)-Formen multipliziert werden. In vielen Situationen genügt die eben hergeleitete lokale Darstellung nicht, um mit bündelwertigen Differentialformen zu arbeiten. Wir werden daher häufig auch das Tangentialbündel von M trivialisieren. Dazu können wir ohne Einschränkung nach einer eventuellen Verfeinerung der für F trivialisierenden Überdeckung $\{U_j\}$ von M davon ausgehen, dass die offenen Mengen U_j sogar Koordinatenumgebungen von M sind. Die entsprechenden Koordinaten notieren wir in der Form $z_j : U_j \to \mathbb{C}^m$ mit $z_j = (z_j^1, \ldots, z_j^m)^t$. Nach Konstruktion des holomorphen Tangentialbündels kann dieses dann auf jeder der Mengen U_j trivialisiert werden und damit insbesondere auch das holomorphe Kotangentialbündel T^*M, wobei ein Rahmen für letzteres durch $dz_j^1, \ldots, dz_j^m$ gegeben wird. Bezüglich einer solchen Überdeckung können wir die Komponente φ_j^l aus der lokalen Beschreibung (2.5) einer bündelwertigen (p,q)-Form mit schiefsymmetrischen Koeffizienten als

$$\varphi_j^l = \frac{1}{p!q!} \sum_{\alpha,\beta} \varphi^l_{j\,\alpha_1 \ldots \alpha_p \overline{\beta_1} \ldots \overline{\beta_q}} dz_j^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\alpha_p} \wedge dz_j^{\overline{\beta_1}} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\beta_q}} \tag{2.7}$$

schreiben. Da diese Form der lokalen Beschreibung für unsere späteren Rechnungen am besten geeignet ist, wollen wir kurz anhand dieses Beispiels auf das Transformationsverhalten der

Koeffizienten eingehen. Wir müssen dazu auch das Transformationsverhalten von $\bigwedge^{p,q} T^*M$ berücksichtigen. Auf $U_j \cap U_k$ erhalten wir, indem wir $f_{jk} = (f^{\tau}_{jk\,\nu})_{\tau,\nu}$ setzen, aus (2.6):

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{p!q!}\sum_{\alpha,\beta}\varphi^l_{j\,\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}}dz_j^{\alpha_1}\wedge\ldots\wedge dz_j^{\alpha_p}\wedge dz_j^{\overline{\beta_1}}\wedge\ldots\wedge dz_j^{\overline{\beta_q}} &= \varphi^l_j = \sum_\nu f^l_{jk\,\nu}\cdot\varphi^\nu_k \\
= \sum_\nu f^l_{jk\,\nu}\frac{1}{p!q!}\sum_{\alpha,\beta}\varphi^\nu_{k\,\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}}dz_k^{\alpha_1}\wedge\ldots\wedge dz_k^{\alpha_p}\wedge dz_k^{\overline{\beta_1}}\wedge\ldots\wedge dz_k^{\overline{\beta_q}} \\
= \frac{1}{p!q!}\sum_{\gamma,\delta}\left(\sum_\nu f^l_{jk\,\nu}\sum_{\alpha,\beta}\frac{\partial z_k^{\alpha_1}}{\partial z_j^{\gamma_1}}\cdot\ldots\cdot\frac{\partial z_k^{\alpha_p}}{\partial z_j^{\gamma_p}}\overline{\frac{\partial z_k^{\beta_1}}{\partial z_j^{\delta_1}}}\cdot\ldots\cdot\overline{\frac{\partial z_k^{\beta_q}}{\partial z_j^{\delta_q}}}\varphi^\nu_{k\,\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}}\right)dz_j^{\gamma_1}\wedge\ldots\wedge dz_j^{\overline{\delta_q}}.
\end{aligned}
$$

Damit müssen sich die schiefsymmetrischen Koeffizienten auf $U_j \cap U_k$ wie folgt transformieren:

$$
\varphi^l_{j\,\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}} = \sum_\nu\sum_{\gamma,\delta}\frac{\partial z_k^{\gamma_1}}{\partial z_j^{\alpha_1}}\cdot\ldots\cdot\frac{\partial z_k^{\gamma_p}}{\partial z_j^{\alpha_p}}\overline{\frac{\partial z_k^{\delta_1}}{\partial z_j^{\beta_1}}}\cdot\ldots\cdot\overline{\frac{\partial z_k^{\delta_q}}{\partial z_j^{\beta_q}}}f^l_{jk\,\nu}\varphi^\nu_{k\,\gamma_1\ldots\gamma_p\overline{\delta_1}\ldots\overline{\delta_q}}. \tag{2.8}
$$

Wir werden dieses Transformationsverhalten gelegentlich nachrechnen, um zu zeigen, dass bestimmte lokal gegebene Objekte global wohldefiniert sind. Abschließend sei noch bemerkt, dass völlig analog zu der hier vorgestellten lokalen Beschreibung bündelwertiger (p,q)-Formen natürlich auch bündelwertige holomorphe p-Formen aus $\Omega^p(F)$ sowie bündelwertige differenzierbare k-Formen aus $\mathcal{A}^k(F)$ beschrieben werden können. Die lokale Schreibweise, die wir eben durch trivialisieren des Tangentialbündels erhalten haben, werden wir selbstverständlich auch für Differentialformen auf der Mannigfaltigkeit M selbst verwenden.

Als nächstes wollen wir lokale Beschreibungen von differentialgeometrischen Objekten auf dem Vektorbündel F herleiten. Wir beginnen mit dem Begriff des Zusammenhangs, welcher als Ersatz für die auf Vektorbündeln im Allgemeinen nicht verfügbare äußere Ableitung eingeführt wird. Dabei verstehen wir unter einem Zusammenhang auf F einen $\mathbb{C}$-linearen Garbenhomomorphismus

$$
D : \mathcal{A}(F) \longrightarrow \mathcal{A}^1(F), \tag{2.9}
$$

welcher über jeder offenen Menge $U \subset M$ der Leibniz-Regel genügt, d.h. sind $f \in \Gamma(U, \mathcal{A}(U))$ und $\varphi \in \Gamma(U, \mathcal{A}(F))$ gegeben, dann gilt:

$$
D(f\cdot\varphi) = d(f)\cdot\varphi + f\cdot D(\varphi). \tag{2.10}
$$

Wir beschreiben nun die Wirkung von D auf einen differenzierbaren Schnitt φ des Bündels F lokal. Dazu betrachten wir die Darstellung $\varphi_j = (\varphi^1_j, \ldots, \varphi^r_j)^t$ des Schnitts auf einer offenen Menge U_j der trivialisierenden Überdeckung von M für F aus (2.5). Wir definieren für $1 \leqslant l \leqslant r$

$$
e'_l : U_j \longrightarrow U_j \times \mathbb{C}^r, \qquad p \longmapsto (p, e_l),
$$

wobei e_l den l-ten kanonischen Standardvektor des komplexen Vektorraums $\mathbb{C}^r$ bezeichnet. Diese e'_l sind Schnitte des trivialen Vektorbündels $U_j \times \mathbb{C}^r \to U_j$ und vermöge $\sigma_l := f_j^{-1} \circ e'_l$ haben wir einen Rahmen für F über U_j konstruiert. Wegen $\varphi_j = \sum_{l=1}^r \varphi_j^l \cdot e_l'$ und $\varphi|_{U_j} = f_j^{-1} \circ \varphi_j$ erhalten wir

$$\varphi|_{U_j} = \sum_{l=1}^r \varphi_j^l \cdot \sigma_l.$$

In diesem Sinne passt der konstruierte Rahmen also gerade zu unserer lokalen Sicht. Wir bemerken noch, dass wir analog auch bündelwertige Formen mit diesem Rahmen darstellen können. Nun definieren wir bezüglich U_j die Matrix $\theta_j \in \left(\Gamma\left(U_j, \mathcal{A}^1\left(U_j\right)\right)\right)^{r\times r}$ bestehend aus 1-Formen auf U_j durch

$$\theta_j = \left(\theta_{j\,\sigma}^{\rho}\right)_{\rho,\sigma} \quad \text{mit} \quad D(\sigma_\sigma) = \sum_\rho \theta_{j\,\sigma}^{\rho} \cdot \sigma_\rho, \tag{2.11}$$

die Zusammenhangsmatrix von D bezüglich U_j. Mit dieser Definition berechnen wir unter Ausnutzung der Tatsache, dass eine äußere Ableitung d auf dem trivialen Bündel $U_j \times \mathbb{C}^r \to U_j$ komponentenweise erklärt ist, folgende lokale Beschreibung der Wirkung von D auf φ:

$$\left(D(\varphi)\right)_j = (d + \theta_j) \cdot \varphi_j. \tag{2.12}$$

Wie üblich definieren wir die zu dem Zusammenhang D assoziierte Krümmung

$$\Omega : \mathcal{A}\left(F\right) \longrightarrow \mathcal{A}^2\left(F\right) \tag{2.13}$$

als $\mathbb{C}$-linearen Garbenhomomorphismus durch $\Omega = D \circ D$. Bekanntlich ist Ω nicht nur $\mathbb{C}$-linear, sondern sogar $\mathcal{A}\left(M\right)$-linear und damit ein Element aus $\Gamma\left(M, \mathcal{A}^2\left(\mathrm{End}(F)\right)\right)$. Lokal auf einer offenen Menge U_j der trivialisierenden Überdeckung von M können wir die Wirkung von Ω offenbar durch eine Matrix $\Theta_j \in \left(\Gamma\left(U_j, \mathcal{A}^2\left(U_j\right)\right)\right)^{r\times r}$ beschreiben. Eine kurze Rechnung zeigt die bekannte Formel

$$\Theta_j = d\theta_j + \theta_j \wedge \theta_j. \tag{2.14}$$

Für unsere späteren Rechnungen ist im Wesentlichen der Fall interessant, wenn F ein holomorphes Vektorbündel ist, welches mit einer hermiteschen Metrik h ausgestattet ist. In diesem Fall erhalten wir aus der Zerlegung $\mathcal{A}^1\left(F\right) = \mathcal{A}^{1,0}\left(F\right) \oplus \mathcal{A}^{0,1}\left(F\right)$ für jeden Zusammenhang D von F eine Zerlegung $D = D' + D''$ mit

$$D' : \mathcal{A}\left(F\right) \longrightarrow \mathcal{A}^{1,0}\left(F\right), \qquad D'' : \mathcal{A}\left(F\right) \longrightarrow \mathcal{A}^{0,1}\left(F\right)$$

und es gibt genau einen Zusammenhang D, den Chern-Zusammenhang, welcher mit der Metrik h verträglich ist, d.h. für den für beliebige offene Mengen $U \subset M$

$$d\left\langle \varphi, \psi\right\rangle = \left\langle D(\varphi), \psi\right\rangle + \left\langle \varphi, D(\psi)\right\rangle \quad \text{für alle} \quad \varphi, \psi \in \Gamma\left(U, \mathcal{A}\left(F\right)\right)$$

gilt und welcher $D'' = \bar{\partial}$ erfüllt. Bekanntlich können die lokalen Matrixdarstellungen dieses Zusammenhangs und der zugehörigen Krümmung auf einer Menge U_j aus der trivialisierenden Überdeckung folgendermaßen berechnet werden:

$$\theta_j = \left(\left(\partial h_j\right) \cdot h_j^{-1}\right)^t, \qquad \Theta_j = \bar{\partial}\theta_j. \tag{2.15}$$

Insbesondere besteht θ_j also aus $(1,0)$-Formen und Θ_j aus $(1,1)$-Formen. Wir nutzen diese Gleichungen, um einige weitere Bezeichnungen für unsere lokale Schreibweise einzuführen, mit denen wir die Wirkung des Chern-Zusammenhangs und der zugehörigen Krümmung lokal sehr gut fassen können. Wir beginnen mit dem Chern-Zusammenhang und schreiben dazu die Formen $\theta^{\rho}_{j\,\sigma}$ in der Gestalt

$$\theta^{\rho}_{j\,\sigma} = \sum_{\alpha} \Gamma^{\rho}_{j\,\alpha\sigma}\, dz^{\alpha}_j. \tag{2.16}$$

Nun berechnen wir

$$\theta^{\rho}_{j\,\sigma} = \sum_{\tau} \partial h_{j\,\sigma\overline{\tau}}\, h^{\overline{\tau}\rho}_j = \sum_{\tau} h^{\overline{\tau}\rho}_j \sum_{\alpha} \partial_{\alpha} h_{j\,\sigma\overline{\tau}}\, dz^{\alpha}_j = \sum_{\alpha} \left(\sum_{\tau} h^{\overline{\tau}\rho}_j\, \partial_{\alpha} h_{j\,\sigma\overline{\tau}} \right) dz^{\alpha}_j$$

und erhalten damit die Gleichung

$$\Gamma^{\rho}_{j\,\alpha\sigma} = \sum_{\tau} h^{\overline{\tau}\rho}_j\, \partial_{\alpha} h_{j\,\sigma\overline{\tau}}. \tag{2.17}$$

Bei den $\Gamma^{\rho}_{j\,\alpha\sigma}$ handelt es sich also um die Christoffelsymbole des Chern-Zusammenhangs D. Ferner können wir für die $(1,1)$-Formen aus der lokalen Darstellung der Krümmung Ω

$$\Theta^{\rho}_{j\,\sigma} = \sum_{\alpha,\beta} R^{\rho}_{j\,\sigma\alpha\overline{\beta}}\, dz^{\alpha}_j \wedge dz^{\overline{\beta}}_j \tag{2.18}$$

schreiben. Wir berechnen

$$\Theta^{\rho}_{j\,\sigma} = \bar{\partial}\theta^{\rho}_{j\,\sigma} = \bar{\partial} \left(\sum_{\alpha} \Gamma^{\rho}_{j\,\alpha\sigma}\, dz^{\alpha}_j \right) = \sum_{\alpha,\beta} \partial_{\overline{\beta}} \Gamma^{\rho}_{j\,\alpha\sigma}\, dz^{\overline{\beta}}_j \wedge dz^{\alpha}_j = \sum_{\alpha,\beta} \left(-\partial_{\overline{\beta}} \Gamma^{\rho}_{j\,\alpha\sigma} \right) dz^{\alpha}_j \wedge dz^{\overline{\beta}}_j$$

und erhalten die Identität

$$R^{\rho}_{j\,\sigma\alpha\overline{\beta}} = -\partial_{\overline{\beta}} \Gamma^{\rho}_{j\,\alpha\sigma}. \tag{2.19}$$

In konkreten Rechnungen, in denen wir lokal mit Objekten rechnen, von denen wir bereits wissen, dass sie global wohldefiniert sind, werden wir den Index j der offenen Menge U_j aus der trivialisierenden Überdeckung der Einfachheit wegen gelegentlich fortlassen und stattdessen stillschweigend über irgendeiner Menge U aus dieser Überdeckung arbeiten. Gelegentlich, wenn die Gefahr von Verwechslungen besteht, werden wir das Bündel oder die Metrik als Index notieren.

2.2. Endomorphismenbündel

Wegen ihrer großen Relevanz für unsere Arbeit untersuchen wir in diesem Abschnitt Endomorphismenbündel und leiten einige bekannte Resultate, insbesondere über die Wirkung der Krümmung der induzierten Metrik, her. Wir nutzen dabei die Gelegenheit, unsere lokale Notation zu verwenden, obwohl alle Resultate auch mit globalen Rechnungen hergeleitet werden können (vergleiche beispielsweise [Kb87]). Die hierzu eingeführten Notationen im Zusammenhang mit Endomorphismenbündeln werden wir auch in der restlichen Arbeit häufig verwenden. Der Übersichtlichkeit wegen zeigen wir zunächst, wie das Tensorprodukt zweier Vektorbündel auf M in unserer lokalen Beschreibung gebildet wird. Dazu seien $\pi_E : E \to M$ sowie $\pi_F : F \to M$ zwei holomorphe Vektorbündel vom Rang r beziehungsweise s auf M. Indem wir zu einer gemeinsamen Verfeinerung $\{U_j\}$ von trivialisierenden Überdeckungen von M für E und F übergehen, können wir beide Bündel lokal durch holomorphe Funktionen $e_{jk} : U_j \cap U_k \to \mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$ respektive $f_{jk} : U_j \cap U_k \to \mathrm{GL}(s, \mathbb{C})$ beschreiben. Das Tensorprodukt $E \otimes F \to M$ ist ein holomorphes Vektorbündel vom Rang rs und kann bezüglich derselben offenen Überdeckung von M durch holomorphe Funktionen $g_{jk} : U_j \cap U_k \to \mathrm{GL}(rs, \mathbb{C})$ beschrieben werden. Wir machen uns kurz klar, wie die g_{jk} aus den e_{jk} und f_{jk} zu bilden sind. Dazu leiten wir her, wie sich im Vektorraumfall die Koordinaten von Tensorprodukten transformieren. Seien also V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum mit Basen $v = (v_1, \ldots, v_r)$ und $a = (a_1, \ldots, a_r)$ sowie W ein $\mathbb{C}$-Vektorraum mit Basen $w = (w_1, \ldots, w_s)$ und $b = (b_1, \ldots, b_s)$. Wir notieren die zugehörigen Koordinatentransformationen wie folgt:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "\phi_v"'] & V \arrow[d, "\phi_a"] \\ \mathbb{C}^r \arrow[r, "A"] & \mathbb{C}^r \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} W \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "\phi_w"'] & W \arrow[d, "\phi_b"] \\ \mathbb{C}^s \arrow[r, "B"] & \mathbb{C}^s \end{tikzcd}$$

Auf dem $\mathbb{C}$-Vektorraum $V \otimes W$ haben wir dann die Basen $(v_\alpha \otimes w_\beta)_{\alpha,\beta}$ sowie $(a_\alpha \otimes b_\beta)_{\alpha,\beta}$. Da wir lokale Koordinaten im $\mathbb{C}^{rs}$ erhalten, müssten wir nun willkürlich eine Abzählung

$$\tau : \{1, \ldots, r\} \times \{1, \ldots, s\} \longrightarrow \{1, \ldots, rs\}$$

fixieren. Wir tun dies nur stillschweigend und verwenden der Einfachheit halber eine Doppelindexnotation ij, d.h. wir vereinbaren die Notation $ij = \tau(i, j)$. Nach Konstruktion haben wir $v_\alpha = \sum_\lambda A^\lambda_\alpha a_\lambda$ sowie $w_\beta = \sum_\mu B^\mu_\beta b_\mu$. Damit ist

$$v_\alpha \otimes w_\beta = \left(\sum_\lambda A^\lambda_\alpha a_\lambda \right) \otimes \left(\sum_\mu B^\mu_\beta b_\mu \right) = \sum_{\lambda,\mu} A^\lambda_\alpha B^\mu_\beta \, a_\lambda \otimes b_\mu,$$

so dass wir für die Matrix $M = (M^{\lambda\mu}_{\alpha\beta})_{\lambda\mu,\alpha\beta} \in \mathbb{C}^{rs \times rs}$ aus dem Koordinatenwechsel des Tensorproduktes

$$\begin{tikzcd} V \otimes W \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "\phi_{v\otimes w}"'] & V \otimes W \arrow[d, "\phi_{a\otimes b}"] \\ \mathbb{C}^{rs} \arrow[r, "M"] & \mathbb{C}^{rs} \end{tikzcd}$$

die Identität $M^{\lambda\mu}_{\alpha\beta} = A^\lambda_\alpha B^\mu_\beta$ erhalten. Bezüglich der lokalen Darstellung von Tensorprodukten von Vektorbündeln bedeutet dies, dass die Transitionsfunktionen g_{jk} von $E \otimes F \to M$ unter Beibehaltung obiger Doppelindexnotation gegeben sind durch:

$$g^{\alpha\lambda}_{jk\,\beta\mu} = e^{\alpha}_{jk\,\beta}\, f^{\lambda}_{jk\,\mu}. \tag{2.20}$$

Sind nun hermitesche Metriken h auf E sowie g auf F gegeben, so wird auf kanonische Weise eine hermitesche Metrik H auf dem Tensorprodukt $E \otimes F$ induziert. Zunächst wird h beziehungsweise g bezüglich der Überdeckung $\{U_j\}$ durch die Funktionen $h_j : U_j \to \mathbb{C}^{r\times r}$ respektive $g_j : U_j \to \mathbb{C}^{s\times s}$ beschrieben. Wir definieren damit Funktionen $H_j : U_j \to \mathbb{C}^{rs\times rs}$, indem wir

$$H_{j\,(\alpha\lambda)(\overline{\beta\mu})} := h_{j\,\alpha\overline{\beta}}\, g_{j\,\lambda\overline{\mu}} \tag{2.21}$$

setzen. Man überzeugt sich direkt davon, dass hiermit in jedem Punkt $p \in U_j$ eine hermitesche, positiv definite Matrix $H_j(p)$ erklärt wird. Zur Übung im Umgang mit der lokalen Notation rechnen wir an dieser Stelle das erforderliche Transformationsverhalten (2.4) nach. Da h und g hermitesche Metriken sind, haben wir auf $U_j \cap U_k$ das Transformationsverhalten $h_k = e^t_{jk} \cdot h_j \cdot \overline{e_{jk}}$ sowie $g_k = f^t_{jk} \cdot g_j \cdot \overline{f_{jk}}$. Ausgeschrieben bedeutet dies

$$h_{k\,\alpha\overline{\beta}} = \sum_{\mu,\lambda} e^{\mu}_{jk\,\alpha} h_{j\,\mu\overline{\lambda}} \overline{e^{\lambda}_{jk\,\beta}} \quad \text{sowie} \quad g_{k\,\alpha\overline{\beta}} = \sum_{\mu,\lambda} f^{\mu}_{jk\,\alpha} g_{j\,\mu\overline{\lambda}} \overline{f^{\lambda}_{jk\,\beta}}.$$

Damit berechnen wir auf dem Überlappungsbereich $U_j \cap U_k$

$$\begin{aligned}
\left(g^t_{jk} \cdot H_j \cdot \overline{g_{jk}}\right)_{(\alpha_1\alpha_2)(\overline{\beta_1\beta_2})} &= \sum_{\gamma,\delta} g^{\gamma_1\gamma_2}_{jk\,\alpha_1\alpha_2} H_{j\,(\gamma_1\gamma_2)(\overline{\delta_1\delta_2})} \overline{g^{\delta_1\delta_2}_{jk\,\beta_1\beta_2}} \\
= \sum_{\gamma,\delta} e^{\gamma_1}_{jk\,\alpha_1} f^{\gamma_2}_{jk\,\alpha_2} h_{j\,\gamma_1\overline{\delta_1}} g_{j\,\gamma_2\overline{\delta_2}} \overline{e^{\delta_1}_{jk\,\beta_1} f^{\delta_2}_{jk\,\beta_2}} &= \left(\sum_{\gamma_1,\delta_1} e^{\gamma_1}_{jk\,\alpha_1} h_{j\,\gamma_1\overline{\delta_1}} \overline{e^{\delta_1}_{jk\,\beta_1}}\right) \left(\sum_{\gamma_2,\delta_2} f^{\gamma_2}_{jk\,\alpha_2} g_{j\,\gamma_2\overline{\delta_2}} \overline{f^{\delta_2}_{jk\,\beta_2}}\right) \\
= h_{k\,\alpha_1\overline{\beta_1}} g_{k\,\alpha_2\overline{\beta_2}} &= H_{k\,(\alpha_1\alpha_2)(\overline{\beta_1\beta_2})},
\end{aligned}$$

womit das erforderliche Transformationsverhalten der Funktionen H_j nachgewiesen ist. Folglich ist H eine hermitesche Metrik auf dem Tensorprodukt $E \otimes F \to M$.

Wir untersuchen nach dieser Vorbereitung Endomorphismenbündel. Es sei also $\pi : F \to M$ ein holomorphes Vektorbündel vom Rang r auf M und $\{U_j\}$ eine offene Überdeckung von M, so dass F über jeder der Mengen U_j vermöge f_j trivialisiert werden kann, d.h. F wird bezüglich der Überdeckung durch die holomophen Funktionen $f_{jk} : U_j \cap U_k \to \mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$ beschrieben. Zunächst können wir damit das zu F duale Vektorbündel $F^* \to M$ bezüglich der Überdeckung $\{U_j\}$ durch die Funktionen

$$f^*_{jk} : U_j \cap U_k \longrightarrow \mathrm{GL}(r, \mathbb{C}), \qquad p \longmapsto \left(f_{jk}(p)^{-1}\right)^t \tag{2.22}$$

beschreiben. Wir fassen dann $F \otimes F^* \to M$ als Endomorphismenbündel $\mathrm{End}(F) \to M$ von F auf. Nach obigen Überlegungen ist $F \otimes F^*$ ein holomorphes Vektorbündel vom Rang r^2, welches gemäß (2.20) und (2.22) durch die Transitionsfunktionen $g_{jk} : U_j \cap U_k \to \mathrm{GL}(r^2, \mathbb{C})$ mit

$$g^{\alpha\lambda}_{jk\,\beta\mu} = f^{\alpha}_{jk\,\beta}\, f^{*\,\lambda}_{jk\,\mu} = f^{\alpha}_{jk\,\beta}\, f^{\mu}_{kj\,\lambda} \tag{2.23}$$

beschrieben wird. Wir wollen kurz erläutern, inwiefern für eine offene Menge $U \subset M$ ein Schnitt $\varphi \in \Gamma\left(U, \mathcal{O}\left(F \otimes F^*\right)\right)$ lokal als Endomorphismus auf einen Schnitt $\psi \in \Gamma\left(U, \mathcal{O}\left(F\right)\right)$ wirkt.

Dazu seien die Schnitte bezüglich der trivialisierenden Überdeckung $\{U_j\}$ gemäß (2.2) durch die Funktionen $\varphi_j : U \cap U_j \to \mathbb{C}^{r^2}$ beziehungsweise $\psi_j : U \cap U_j \to \mathbb{C}^r$ gegeben. Wir erhalten hiervon ausgehend Funktionen

$$\eta_j : U \cap U_j \longrightarrow \mathbb{C}^r \quad \text{durch} \quad \eta_j^\alpha := \sum_\lambda \varphi^\alpha_{j\,\lambda} \psi^\lambda_j \tag{2.24}$$

und behaupten, dass die η_j einen Schnitt $\eta \in \Gamma(U, \mathcal{O}(F))$ beschreiben, d.h. dass über $U_j \cap U_k$ stets $\eta_j = f_{jk} \cdot \eta_k$ gilt. Dazu genügt es, folgende Rechnung anzustellen:

$$\begin{aligned}
\eta_j^\alpha &= \sum_\lambda \varphi^\alpha_{j\,\lambda} \psi^\lambda_j = \sum_\lambda \left(\sum_{\beta,\mu} g^{\alpha\lambda}_{jk\,\beta\mu} \varphi^\beta_{k\,\mu} \right) \left(\sum_\tau f^\lambda_{jk\,\tau} \psi^\tau_k \right) = \sum_\lambda \sum_{\beta,\mu} \sum_\tau f^\alpha_{jk\,\beta} f^\mu_{kj\,\lambda} \varphi^\beta_{k\,\mu} f^\lambda_{jk\,\tau} \psi^\tau_k \\
&= \sum_{\beta,\mu} \sum_\tau \left(\sum_\lambda f^\mu_{kj\,\lambda} f^\lambda_{jk\,\tau} \right) f^\alpha_{jk\,\beta} \varphi^\beta_{k\,\mu} \psi^\tau_k = \sum_{\beta,\tau} f^\alpha_{jk\,\beta} \varphi^\beta_{k\,\tau} \psi^\tau_k = \sum_\beta f^\alpha_{jk\,\beta} \left(\sum_\tau \varphi^\beta_{k\,\tau} \psi^\tau_k \right) \\
&= \sum_\beta f^\alpha_{jk\,\beta} \eta^\beta_k .
\end{aligned}$$

Anstatt η werden wir von nun an die suggestivere Schreibweise $\varphi(\psi)$ gebrauchen.

Wir setzen nun voraus, dass auf dem Vektorbündel F zusätzlich eine hermitesche Metrik h gegeben ist, welche bezüglich der trivialisierenden Überdeckung $\{U_j\}$ durch die Funktionen $h_j : U_j \to \mathbb{C}^{r\times r}$ beschrieben wird, und wollen die induzierte hermitesche Metrik H auf dem Endomorphismenbündel $\mathrm{End}(F) = F \otimes F^*$ von F untersuchen. Zunächst induziert h eine hermitesche Metrik h^* auf dem zu F dualen Vektorbündel F^*, welche durch die Funktionen $h^*_j : U_j \to \mathbb{C}^{r\times r}$ mit $h^*_j = (h_j^{-1})^t$ beschrieben wird. Gemäß unserer Überlegungen wird von h also eine hermitesche Metrik H auf dem Endomorphismenbündel $\mathrm{End}(F)$ induziert. Wir interessieren uns vor allem für den Bezug zwischen den Chern-Zusammenhängen sowie den Krümmungen von h und H und notieren zunächst, dass die Metrik H nach (2.21) lokal durch die Funktionen

$$H_j : U_j \longrightarrow \mathbb{C}^{r^2\times r^2} \quad \text{mit} \quad H_{j\,(\alpha\lambda)(\overline{\beta\mu})} = h_{j\,\alpha\overline{\beta}}\, h^*_{j\lambda\overline{\mu}} = h_{j\,\alpha\overline{\beta}}\, h_j^{\overline{\mu}\lambda} \tag{2.25}$$

gegeben ist. Um diese Formel global besser zu verstehen, erinnern wir vorab an den Spuroperator sowie an adjungierte Operatoren in einem Endomorphismenbündel. Ist eine bündelwertige (p,q)-Form $\eta \in \Gamma(M, \mathcal{A}^{p,q}(\mathrm{End}(F)))$ lokal gegeben durch

$$\eta_j = \left(\eta^\rho_{j\,\sigma}\right)_{\rho,\sigma} \quad \text{mit} \quad \eta^\rho_{j\,\sigma} = \frac{1}{p!q!} \sum_{\alpha,\beta} \eta^\rho_{j\,\sigma\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}}\, dz_j^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\alpha_p} \wedge dz_j^{\overline{\beta_1}} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\beta_q}},$$

dann können wir durch Spurbildung eine (p,q)-Form $\mathrm{tr}(\eta) \in \Gamma(M, \mathcal{A}^{p,q}(M))$ lokal auf U_j definieren, indem wir

$$\mathrm{tr}(\eta)_j = \frac{1}{p!q!} \sum_{\alpha,\beta} \left(\sum_\rho \eta^\rho_{j\,\rho\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}} \right) dz_j^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\alpha_p} \wedge dz_j^{\overline{\beta_1}} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\beta_q}} \tag{2.26}$$

setzen. Zur Übung rechnen wir nach, dass $\mathrm{tr}(\eta)$ als globales Objekt wohldefiniert ist. Wegen (2.8) und (2.23) liegt das Transformationsverhalten

$$\eta^{\rho}_{j\,\sigma\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}} = \sum_{\gamma,\mu,\tau,\nu} \frac{\partial z_k^{\gamma_1}}{\partial z_j^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial z_k^{\gamma_p}}{\partial z_j^{\alpha_p}} \overline{\frac{\partial z_k^{\mu_1}}{\partial z_j^{\beta_1}}} \cdots \overline{\frac{\partial z_k^{\mu_q}}{\partial z_j^{\beta_q}}} f^{\rho}_{jk\,\nu} f^{\tau}_{kj\,\sigma} \eta^{\nu}_{k\,\tau\gamma_1\ldots\gamma_p\overline{\mu_1}\ldots\overline{\mu_q}}$$

für die schiefsymmetrischen Koeffizienten der Darstellung von η vor. Damit folgt auf $U_j \cap U_k$

$$\begin{aligned}\sum_{\rho} \eta^{\rho}_{j\,\rho\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}} &= \sum_{\gamma,\mu} \frac{\partial z_k^{\gamma_1}}{\partial z_j^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial z_k^{\gamma_p}}{\partial z_j^{\alpha_p}} \overline{\frac{\partial z_k^{\mu_1}}{\partial z_j^{\beta_1}}} \cdots \overline{\frac{\partial z_k^{\mu_q}}{\partial z_j^{\beta_q}}} \sum_{\rho,\tau,\nu} f^{\rho}_{jk\,\nu} f^{\tau}_{kj\,\rho} \eta^{\nu}_{k\,\tau\gamma_1\ldots\gamma_p\overline{\mu_1}\ldots\overline{\mu_q}} \\ &= \sum_{\gamma,\mu} \frac{\partial z_k^{\gamma_1}}{\partial z_j^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial z_k^{\gamma_p}}{\partial z_j^{\alpha_p}} \overline{\frac{\partial z_k^{\mu_1}}{\partial z_j^{\beta_1}}} \cdots \overline{\frac{\partial z_k^{\mu_q}}{\partial z_j^{\beta_q}}} \sum_{\tau} \eta^{\tau}_{k\,\tau\gamma_1\ldots\gamma_p\overline{\mu_1}\ldots\overline{\mu_q}},\end{aligned}$$

so dass $\mathrm{tr}(\eta)$ tatsächlich eine wohldefinierte (p,q)-Form auf M ist. Insgesamt haben wir einen $\mathcal{A}(M)$-linearen Garbenhomomorphismus $\mathrm{tr} : \mathcal{A}^{p,q}(\mathrm{End}(F)) \to \mathcal{A}^{p,q}(M)$ erklärt. Ferner können wir zu dem von uns gewählten $\eta \in \Gamma(M, \mathcal{A}^{p,q}(\mathrm{End}(F)))$ lokal durch $\eta_j^* = (\eta^{*\,\rho}_{j\,\sigma})_{\rho,\sigma}$ mit

$$\eta^{*\,\rho}_{j\,\sigma} = \frac{(-1)^{pq}}{q!p!} \sum_{\alpha,\beta} \left(\sum_{\tau,\nu} h_j^{\overline{\tau}\rho} \overline{\eta^{\nu}_{j\,\tau\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}}} h_{j\,\sigma\overline{\nu}} \right) dz_j^{\beta_1} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\beta_q} \wedge dz_j^{\overline{\alpha_1}} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\alpha_p}} \tag{2.27}$$

einen Schnitt $\eta^* \in \Gamma(M, \mathcal{A}^{q,p}(\mathrm{End}(F)))$ definieren, den adjungierten Operator zu η. Die Wohldefiniertheit dieses globalen Objekts ergibt sich mit einer völlig analogen Rechnung aus dem Transformationsverhalten (2.4) der Metrik h und sei dem Leser überlassen. Wir behaupten, dass die vielfach nützliche Gleichung $(\eta^*)^* = \eta$ gilt, und notieren für deren Nachweis die Formel

$$(\eta^*)^{*\,\rho}_{j\,\sigma} = \frac{1}{p!q!} \sum_{\alpha,\beta} (-1)^{pq} \left(\sum_{\gamma,\mu} h_j^{\overline{\gamma}\rho} \overline{\eta^{*\,\mu}_{j\,\gamma\beta_1\ldots\beta_q\overline{\alpha_1}\ldots\overline{\alpha_p}}} h_{j\,\sigma\overline{\mu}} \right) dz_j^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\alpha_p} \wedge dz_j^{\overline{\beta_1}} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\beta_q}}.$$

Da die Koeffizienten schiefsymmetrisch sind, genügt es, die Gleichung

$$\eta^{\rho}_{j\,\sigma\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}} = (-1)^{pq} \sum_{\gamma,\mu} h_j^{\overline{\gamma}\rho} \overline{\eta^{*\,\mu}_{j\,\gamma\beta_1\ldots\beta_q\overline{\alpha_1}\ldots\overline{\alpha_p}}} h_{j\,\sigma\overline{\mu}}$$

nachzurechnen, welche wir jedoch unmittelbar aus folgender Rechnung erhalten:

$$\begin{aligned}(-1)^{pq} \sum_{\gamma,\mu} h_j^{\overline{\gamma}\rho} \overline{\eta^{*\,\mu}_{j\,\gamma\beta_1\ldots\beta_q\overline{\alpha_1}\ldots\overline{\alpha_p}}} h_{j\,\sigma\overline{\mu}} &= (-1)^{pq} \sum_{\gamma,\mu} h_j^{\overline{\gamma}\rho} \left((-1)^{pq} \overline{\sum_{\tau,\nu} h_j^{\overline{\tau}\mu} \overline{\eta^{\nu}_{j\,\tau\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}}} h_{j\,\gamma\overline{\nu}}} \right) h_{j\,\sigma\overline{\mu}} \\ &= \sum_{\gamma,\mu} \sum_{\tau,\nu} h_j^{\overline{\gamma}\rho} h_j^{\overline{\mu}\tau} h_{j\,\nu\overline{\gamma}} h_{j\,\sigma\overline{\mu}} \eta^{\nu}_{j\,\tau\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}} = \eta^{\rho}_{j\,\sigma\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}}.\end{aligned}$$

Auf Endomorphismenbündeln gibt es zwei Produkte bündelwertiger Differentialformen, welche für uns relevant sind und an die wir daher kurz erinnern wollen. Zunächst haben wir für jede offene Menge $U \subset M$ das Wedge-Produkt, welches der Verknüpfung des Endomorphismenanteils und dem Wedge-Produkt des Formenanteils entspricht. Es hat die Gestalt

$$\Gamma\left(U, \mathcal{A}^{p,q}\left(\operatorname{End}(F)\right)\right) \times \Gamma\left(U, \mathcal{A}^{r,s}\left(\operatorname{End}(F)\right)\right) \longrightarrow \Gamma\left(U, \mathcal{A}^{p+r,q+s}\left(\operatorname{End}(F)\right)\right), \quad (\mu, \eta) \longmapsto \mu \wedge \eta.$$

Sind die Formen μ beziehungsweise η lokal gegeben durch $\mu_j = (\mu^{\rho}_{j\,\sigma})_{\rho,\sigma}$ sowie $\eta_j = (\eta^{\rho}_{j\,\sigma})_{\rho,\sigma}$, dann kann $\mu \wedge \eta$ lokal beschrieben werden durch

$$(\mu \wedge \eta)_j = \left((\mu \wedge \eta)^{\rho}_{j\,\sigma}\right)_{\rho,\sigma} \quad \text{mit} \quad (\mu \wedge \eta)^{\rho}_{j\,\sigma} = \sum_{\nu} \mu^{\rho}_{j\,\nu} \wedge \eta^{\nu}_{j\,\sigma}. \tag{2.28}$$

Wir erhalten damit ein wohldefiniertes und assoziatives Produkt. Für die spätere Verwendung notieren wir noch die folgende Eigenschaft dieses Produktes:

Proposition 2.1. *Für $\mu \in \Gamma\left(U, \mathcal{A}^{p,q}\left(\operatorname{End}(F)\right)\right)$ und $\eta \in \Gamma\left(U, \mathcal{A}^{r,s}\left(\operatorname{End}(F)\right)\right)$ gilt:*

$$\bar{\partial}\left(\mu \wedge \eta\right) = \left(\bar{\partial}\mu\right) \wedge \eta + (-1)^{(p+q)} \mu \wedge \left(\bar{\partial}\eta\right).$$

Beweis. Da $\bar{\partial}$ lokal komponentenweise angewendet wird, können wir folgendermaßen rechnen:

$$\begin{aligned}\left(\bar{\partial}\left(\mu \wedge \eta\right)\right)^{\rho}_{j\,\sigma} &= \bar{\partial}\left(\sum_{\nu} \mu^{\rho}_{j\,\nu} \wedge \eta^{\nu}_{j\,\sigma}\right) = \sum_{\nu}\left(\bar{\partial}\mu^{\rho}_{j\,\nu}\right) \wedge \eta^{\nu}_{j\,\sigma} + (-1)^{(p+q)} \sum_{\nu} \mu^{\rho}_{j\,\nu} \wedge \bar{\partial}\left(\eta^{\nu}_{j\,\sigma}\right) \\ &= \left(\left(\bar{\partial}\mu\right) \wedge \eta\right)^{\rho}_{j\,\sigma} + (-1)^{(p+q)}\left(\mu \wedge \left(\bar{\partial}\eta\right)\right)^{\rho}_{j\,\sigma}.\end{aligned}$$

□

Neben diesem Produkt besitzen wir auf Endomorphismenbündeln noch eine Lie-Klammer:

$$\Gamma\left(U, \mathcal{A}^{p,q}\left(\operatorname{End}(F)\right)\right) \times \Gamma\left(U, \mathcal{A}^{r,s}\left(\operatorname{End}(F)\right)\right) \longrightarrow \Gamma\left(U, \mathcal{A}^{p+r,q+s}\left(\operatorname{End}(F)\right)\right), \quad (\mu, \eta) \longmapsto [\mu, \eta].$$

Sind die Formen μ und η lokal wieder durch $\mu_j = (\mu^{\rho}_{j\,\sigma})_{\rho,\sigma}$ beziehungsweise $\eta_j = (\eta^{\rho}_{j\,\sigma})_{\rho,\sigma}$ gegeben, dann kann $[\mu, \eta]$ lokal durch

$$[\mu, \eta]_j = \left([\mu, \eta]^{\rho}_{j\,\sigma}\right)_{\rho,\sigma} \quad \text{mit} \quad [\mu, \eta]^{\rho}_{j\,\sigma} = \sum_{\nu} \mu^{\rho}_{j\,\nu} \wedge \eta^{\nu}_{j\,\sigma} - (-1)^{(p+q)(r+s)} \sum_{\nu} \eta^{\rho}_{j\,\nu} \wedge \mu^{\nu}_{j\,\sigma} \tag{2.29}$$

beschrieben werden, d.h. es gilt die Gleichung

$$[\mu, \eta] = \mu \wedge \eta - (-1)^{(p+q)(r+s)} \eta \wedge \mu. \tag{2.30}$$

Mit diesen Vorbereitungen sind wir nun in der Lage, die auf dem Endomorphismenbündel $\operatorname{End}(F) \to M$ induzierte hermitesche Metrik H besser zu verstehen.

Proposition 2.2. *Ist $F \to M$ ein holomorphes Vektorbündel über der komplexen Mannigfaltigkeit M und h eine hermitesche Metrik auf F, dann berechnet sich die auf dem Endomorphismenbündel $\operatorname{End}(F) = F \otimes F^* \to M$ induzierte hermitesche Metrik H für zwei Schnitte $A, B \in \Gamma\left(U, \mathcal{A}\left(\operatorname{End}(F)\right)\right)$ über einer offenen Menge $U \subset M$ zu $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(A \wedge B^*)$.*

Beweis. Wir rechnen über der offenen Menge U_j aus der trivialisierenden Überdeckung:

$$\begin{aligned}\langle A,B\rangle &= \sum_{\alpha,\lambda,\beta,\mu} H_{j\,(\alpha\lambda)(\overline{\beta}\overline{\mu})} A^{\alpha}_{j\,\lambda}\overline{B^{\beta}_{j\,\mu}} = \sum_{\alpha,\lambda,\beta,\mu} h_{j\,\alpha\overline{\beta}} h_j^{\overline{\mu}\lambda} A^{\alpha}_{j\,\lambda}\overline{B^{\beta}_{j\,\mu}} = \sum_{\alpha}\sum_{\lambda} A^{\alpha}_{j\,\lambda}\sum_{\beta,\mu} h_j^{\overline{\mu}\lambda}\overline{B^{\beta}_{j\,\mu}} h_{j\,\alpha\overline{\beta}}\\ &= \sum_{\alpha}\sum_{\lambda} A^{\alpha}_{j\,\lambda} B^{*\,\lambda}_{j\,\alpha} = \sum_{\alpha}\sum_{\lambda} A^{\alpha}_{j\,\lambda}\wedge B^{*\,\lambda}_{j\,\alpha} = \operatorname{tr}(A\wedge B^*).\end{aligned}$$

□

Im Folgenden berechnen wir den Chern-Zusammenhang und die Krümmung der induzierten hermiteschen Metrik auf dem Endomorphismenbündel zu F. Vorab finden wir

$$\sum_{\beta,\mu} H_{j\,(\alpha\lambda)(\overline{\beta}\overline{\mu})} h_j^{\overline{\beta}\eta}\, h_{j\,\zeta\overline{\mu}} = \sum_{\beta,\mu} h_{j\,\alpha\overline{\beta}} h_j^{\overline{\mu}\lambda} h_j^{\overline{\beta}\eta} h_{j\,\zeta\overline{\mu}} = \delta^{\eta}_{\alpha}\,\delta^{\lambda}_{\zeta}, \quad \text{d.h.} \quad H_j^{(\overline{\beta}\overline{\mu})(\eta\zeta)} = h_j^{\overline{\beta}\eta}\, h_{j\,\zeta\overline{\mu}}. \tag{2.31}$$

Wir leiten zunächst einen Bezug zwischen den Christoffelsymbolen von F und denen des dualen Bündels F^* her. Genauer gilt folgendes Resultat:

Proposition 2.3. *Sei h eine hermitesche Metrik auf einem holomorphen Vektorbündel $F \to M$ über einer komplexen Mannigfaltigkeit M. Dann gilt über einem Element U_j einer die Bündel trivialisierenden Überdeckung für die Christoffelsymbole von h und der auf dem dualen Vektorbündel $F^* \to M$ induzierten Metrik h^* die Identität*

$$\Gamma^{\rho}_{jF^*\,\alpha\sigma} = -\Gamma^{\sigma}_{jF\,\alpha\rho}.$$

Zwischen den Zusammenhangsmatrizen von h und h^* besteht also die Beziehung $\theta_{jF^*} = -\theta^t_{jF}$.

Beweis. Es ist

$$\Gamma^{\rho}_{jF^*\,\alpha\sigma} = \sum_{\tau} h_j^{*\overline{\tau}\rho}\partial_\alpha h^*_{j\,\sigma\overline{\tau}} = \sum_{\tau}\left(\left(h_j^*\right)^{-1}\right)_{\overline{\tau}\rho}\partial_\alpha h^*_{j\,\sigma\overline{\tau}} = \sum_{\tau}\left(h_j^t\right)_{\overline{\tau}\rho}\partial_\alpha h^*_{j\,\sigma\overline{\tau}} = \sum_{\tau} h_{j\,\rho\overline{\tau}}\partial_\alpha h_j^{\overline{\tau}\sigma}.$$

Um die Ableitung der inversen Matrix zu berechnen, stellen wir für eine Matrix $A = (a_{ij})_{i,j}$ mit inverser Matrix $A^{-1} = (a^{ij})_{i,j}$, welche von einem Parameter t abhängt, nach dem wir mit einem Differentialoperator d ableiten können, folgende Überlegung an: Aus $A\cdot A^{-1} = E$ folgt zunächst $d(A\cdot A^{-1}) = dE = 0$, d.h. $0 = (dA)\cdot A^{-1} + A\cdot(dA^{-1})$ und damit $dA^{-1} = -A^{-1}\cdot(dA)\cdot A^{-1}$. Für eine einzelne Komponente der inversen Matrix bedeutet dies

$$da^{ij} = -\sum_{k,l} a^{il}a^{kj}(da_{lk}). \tag{2.32}$$

Mit dieser Formel können wir folgendermaßen weiterrechnen:

$$\Gamma^{\rho}_{jF^*\,\alpha\sigma} = \sum_{\tau} h_{j\,\rho\overline{\tau}}\partial_\alpha h_j^{\overline{\tau}\sigma} = -\sum_{\tau,\beta,\gamma} h_{j\,\rho\overline{\tau}} h_j^{\overline{\tau}\gamma} h_j^{\overline{\beta}\sigma}\left(\partial_\alpha h_{j\,\gamma\overline{\beta}}\right) = -\sum_{\beta} h_j^{\overline{\beta}\sigma}\partial_\alpha h_{j\,\rho\overline{\beta}} = -\Gamma^{\sigma}_{jF\,\alpha\rho}.$$

□

Als Korollar folgt eine Gleichung für die Christoffelsymbole des Endomorphismenbündels:

Proposition 2.4. *Für die Christoffelsymbole der auf dem Endomorphismenbündel* $\mathrm{End}(F) \to M$ *zu* $(F, h) \to M$ *induzierten Metrik* H *gilt lokal auf einem Element* U_j *einer trivialisierenden Überdeckung:*

$$\Gamma^{(\beta\mu)}_{j\,\alpha(\eta\zeta)} = \delta^{\zeta}_{\mu}\Gamma^{\beta}_{jF\,\alpha\eta} - \delta^{\beta}_{\eta}\Gamma^{\zeta}_{jF\,\alpha\mu}.$$

Beweis. Die behauptete Identität folgt mit Proposition 2.3 sowie (2.31) wegen

$$\begin{aligned}
\Gamma^{(\beta\mu)}_{j\,\alpha(\eta\zeta)} &= \sum_{\tau,\rho} H_j^{(\overline{\tau}\overline{\rho})(\beta\mu)}\partial_\alpha H_{j\,(\eta\zeta)(\overline{\tau}\overline{\rho})} = \sum_{\tau,\rho} h_j^{\overline{\tau}\beta} h_{j\,\mu\overline{\rho}}\partial_\alpha\left(h_{j\,\eta\overline{\tau}}h_j^{\overline{\rho}\zeta}\right) \\
&= \sum_{\tau,\rho} h_j^{\overline{\tau}\beta} h_{j\,\mu\overline{\rho}}\left(\partial_\alpha h_{j\,\eta\overline{\tau}}\right)h_j^{\overline{\rho}\zeta} + \sum_{\tau,\rho} h_j^{\overline{\tau}\beta} h_{j\,\mu\overline{\rho}} h_{j\,\eta\overline{\tau}}\left(\partial_\alpha h_j^{\overline{\rho}\zeta}\right) \\
&= \delta^{\zeta}_{\mu}\sum_{\tau} h_j^{\overline{\tau}\beta}\partial_\alpha h_{j\,\eta\overline{\tau}} + \delta^{\beta}_{\eta}\sum_{\rho} h_{j\,\mu\overline{\rho}}\partial_\alpha h_j^{\overline{\rho}\zeta} \\
&= \delta^{\zeta}_{\mu}\Gamma^{\beta}_{jF\,\alpha\eta} + \delta^{\beta}_{\eta}\Gamma^{\mu}_{jF^*\,\alpha\zeta} = \delta^{\zeta}_{\mu}\Gamma^{\beta}_{jF\,\alpha\eta} - \delta^{\beta}_{\eta}\Gamma^{\zeta}_{jF\,\alpha\mu}.
\end{aligned}$$

□

Nachdem wir die Zusammenhänge berechnet haben, leiten wir Formeln für die Krümmungen her. Wir beginnen auch hierbei wieder mit dem dualen Bündel.

Proposition 2.5. *Für die lokalen Darstellungen der Krümmungen der hermiteschen Metrik* h *auf* $F \to M$ *sowie der auf dem dualen Vektorbündel induzierten Metrik* h^* *gilt auf einem Element* U_j *einer trivialisierenden Überdeckung die Beziehung*

$$\Theta_{jF^*} = -\Theta^t_{jF}.$$

Beweis. Wir erhalten diese Gleichung aus Proposition 2.3 durch die Rechnung

$$\begin{aligned}
\Theta^{\rho}_{jF^*\,\sigma} &= \sum_{\alpha,\beta} R^{\rho}_{jF^*\,\sigma\alpha\overline{\beta}}\,dz_j^\alpha\wedge dz_j^{\overline{\beta}} = \sum_{\alpha,\beta} -\partial_{\overline{\beta}}\Gamma^{\rho}_{jF^*\alpha\sigma}\,dz_j^\alpha\wedge dz_j^{\overline{\beta}} = -\sum_{\alpha,\beta} -\partial_{\overline{\beta}}\Gamma^{\sigma}_{jF\alpha\rho}\,dz_j^\alpha\wedge dz_j^{\overline{\beta}} \\
&= -\sum_{\alpha,\beta} R^{\sigma}_{jF\,\rho\alpha\overline{\beta}}\,dz_j^\alpha\wedge dz_j^{\overline{\beta}} = -\Theta^{\sigma}_{jF\,\rho}.
\end{aligned}$$

□

Für das Endomorphismenbündel erhalten wir dagegen folgendes Resultat:

Proposition 2.6. *Für die Krümmungsterme der auf dem Endomorphismenbündel* $\mathrm{End}(F) \to M$ *zu* $(F, h) \to M$ *induzierten Metrik* H *gilt auf einem Element* U_j *einer trivialisierenden Überdeckung:*

$$R^{(\rho_1\rho_2)}_{j\,(\sigma_1\sigma_2)\alpha\overline{\beta}} = \delta^{\sigma_2}_{\rho_2}R^{\rho_1}_{jF\,\sigma_1\alpha\overline{\beta}} - \delta^{\rho_1}_{\sigma_1}R^{\sigma_2}_{jF\,\rho_2\alpha\overline{\beta}}.$$

Entsprechend folgt für die lokale Matrixdarstellung des Krümmungstensors $\Omega_{\mathrm{End}(F)}$*:*

$$\Theta^{(\rho_1\rho_2)}_{j\,(\sigma_1\sigma_2)} = \delta^{\sigma_2}_{\rho_2}\Theta^{\rho_1}_{jF\,\sigma_1} - \delta^{\rho_1}_{\sigma_1}\Theta^{\sigma_2}_{jF\,\rho_2}.$$

Beweis. Die erste Behauptung ergibt sich mittels Proposition 2.4 aus

$$\begin{aligned}
R^{(\rho_1\rho_2)}_{j\,(\sigma_1\sigma_2)\alpha\overline{\beta}} &= -\partial_{\overline{\beta}}\Gamma^{(\rho_1\rho_2)}_{j\,\alpha(\sigma_1\sigma_2)} = -\partial_{\overline{\beta}}\left(\delta^{\sigma_2}_{\rho_2}\Gamma^{\rho_1}_{jF\,\alpha\sigma_1} - \delta^{\rho_1}_{\sigma_1}\Gamma^{\sigma_2}_{jF\,\alpha\rho_2}\right) \\
&= \delta^{\sigma_2}_{\rho_2}\left(-\partial_{\overline{\beta}}\Gamma^{\rho_1}_{jF\,\alpha\sigma_1}\right) - \delta^{\rho_1}_{\sigma_1}\left(-\partial_{\overline{\beta}}\Gamma^{\sigma_2}_{jF\,\alpha\rho_2}\right) = \delta^{\sigma_2}_{\rho_2}R^{\rho_1}_{jF\,\sigma_1\alpha\overline{\beta}} - \delta^{\rho_1}_{\sigma_1}R^{\sigma_2}_{jF\,\rho_2\alpha\overline{\beta}}.
\end{aligned}$$

Die zweite folgt unmittelbar aus der ersten:

$$\begin{aligned}
\Theta^{(\rho_1\rho_2)}_{j\,(\sigma_1\sigma_2)} &= \sum_{\alpha,\beta} R^{(\rho_1\rho_2)}_{j\,(\sigma_1\sigma_2)\alpha\overline{\beta}}\,dz^\alpha_j\wedge dz^{\overline{\beta}}_j = \sum_{\alpha,\beta}\left(\delta^{\sigma_2}_{\rho_2}R^{\rho_1}_{jF\,\sigma_1\alpha\overline{\beta}} - \delta^{\rho_1}_{\sigma_1}R^{\sigma_2}_{jF\,\rho_2\alpha\overline{\beta}}\right)dz^\alpha_j\wedge dz^{\overline{\beta}}_j \\
&= \delta^{\sigma_2}_{\rho_2}\sum_{\alpha,\beta}R^{\rho_1}_{jF\,\sigma_1\alpha\overline{\beta}}\,dz^\alpha_j\wedge dz^{\overline{\beta}}_j - \delta^{\rho_1}_{\sigma_1}\sum_{\alpha,\beta}R^{\sigma_2}_{jF\,\rho_2\alpha\overline{\beta}}\,dz^\alpha_j\wedge dz^{\overline{\beta}}_j = \delta^{\sigma_2}_{\rho_2}\Theta^{\rho_1}_{jF\,\sigma_1} - \delta^{\rho_1}_{\sigma_1}\Theta^{\sigma_2}_{jF\,\rho_2}.
\end{aligned}$$

□

Aus den eben hergeleiteten Formeln gewinnen wir nun die allgemein bekannte Tatsache, dass die Krümmung eines Endomorphismenbündels als Lie-Klammer wirkt. Dazu müssen wir nur beachten, dass $\Omega_F \in \Gamma\left(M, \mathcal{A}^{1,1}\left(\mathrm{End}(F)\right)\right)$ gilt und folglich Ω_F selbst ein Endomorphismus ist, so dass wir

$$[\Omega_F,\,\cdot\,] \in \Gamma\left(M, \mathcal{A}^{1,1}\left(\mathrm{End}(\mathrm{End}(F))\right)\right)$$

finden. Wir fassen das Ergebnis in folgendem Satz zusammen:

Satz 2.7. *Die Krümmung der auf dem Endomorphismenbündel* $\mathrm{End}(F) \to M$ *zu* $F \to M$ *induzierten Metrik* H *wirkt als Lie-Klammer auf Schnitte, genauer gilt die Beziehung:*

$$\Omega_{\mathrm{End}(F)} = [\Omega_F,\,\cdot\,]\,.$$

Beweis. Sei $\varphi \in \Gamma\left(M, \mathcal{A}^q\left(\mathrm{End}(F)\right)\right)$ lokal bezüglich einer trivialisierenden Überdeckung $\{U_j\}$ von M beschrieben durch die Formen $\varphi_j = (\varphi^\alpha_{j\,\beta})_{\alpha,\beta}$. Wir zeigen, dass $\Omega_{\mathrm{End}(F)}(\varphi) = [\Omega_F, \varphi]$ gilt. Der Einfachheit halber sei $\eta := [\Omega_F, \varphi]$ gesetzt. Dann erhalten wir

$$\eta^\alpha_{j\,\beta} = \sum_\tau \Theta^\alpha_{jF\,\tau}\wedge\varphi^\tau_{j\,\beta} - (-1)^{2\cdot q}\sum_\tau \varphi^\alpha_{j\,\tau}\wedge\Theta^\tau_{jF\,\beta} = \sum_\tau \Theta^\alpha_{jF\,\tau}\wedge\varphi^\tau_{j\,\beta} - \sum_\tau \varphi^\alpha_{j\,\tau}\wedge\Theta^\tau_{jF\,\beta}.$$

Andererseits definieren wir zur Abkürzung $\psi := \Omega_{\mathrm{End}(F)}(\varphi)$ und berechnen unter Verwendung von Proposition 2.6:

$$\begin{aligned}
\psi^{\rho_1}_{j\,\rho_2} &= \sum_{\sigma_1,\sigma_2}\Theta^{(\rho_1\rho_2)}_{j\,(\sigma_1\sigma_2)}\wedge\varphi^{\sigma_1}_{j\,\sigma_2} = \sum_{\sigma_1,\sigma_2}\left(\delta^{\sigma_2}_{\rho_2}\Theta^{\rho_1}_{jF\,\sigma_1} - \delta^{\rho_1}_{\sigma_1}\Theta^{\sigma_2}_{jF\,\rho_2}\right)\wedge\varphi^{\sigma_1}_{j\,\sigma_2} \\
&= \sum_{\sigma_1,\sigma_2}\delta^{\sigma_2}_{\rho_2}\Theta^{\rho_1}_{jF\,\sigma_1}\wedge\varphi^{\sigma_1}_{j\,\sigma_2} - \sum_{\sigma_1,\sigma_2}\delta^{\rho_1}_{\sigma_1}\Theta^{\sigma_2}_{jF\,\rho_2}\wedge\varphi^{\sigma_1}_{j\,\sigma_2} = \sum_{\sigma_1}\Theta^{\rho_1}_{jF\,\sigma_1}\wedge\varphi^{\sigma_1}_{j\,\rho_2} - \sum_{\sigma_2}\underbrace{\Theta^{\sigma_2}_{jF\,\rho_2}}_{2-\mathrm{Form}}\wedge\varphi^{\rho_1}_{j\,\sigma_2} \\
&= \sum_\tau \Theta^{\rho_1}_{jF\,\tau}\wedge\varphi^\tau_{j\,\rho_2} - \sum_\tau \varphi^{\rho_1}_{j\,\tau}\wedge\Theta^\tau_{jF\,\rho_2} = \eta^{\rho_1}_{j\,\rho_2}.
\end{aligned}$$

Also haben wir nachgewiesen, dass $\psi = \eta$ gilt. □

Als weitere Anwendung der hergeleiteten Formeln notieren wir noch eine Variante der Bianchi-Identität, deren lokale Version wir später häufiger einsetzen werden.

Satz 2.8. *Sei $F \to M$ ein holomorphes Vektorbündel und h eine hermitesche Metrik auf F. Für den Chern-Zusammenhang der auf dem Endomorphismenbündel* $\mathrm{End}(F) \to M$ *induzierten Metrik H gilt*

$$D_{\mathrm{End}(F)}(\Omega_F) = 0.$$

Lokal auf einem Element U_j einer trivialisierenden Überdeckung bedeutet diese Gleichung

$$\partial_{\alpha_1} R^{\rho}_{jF\,\sigma\alpha_2\overline{\beta}} + \sum_{\eta,\tau} \Gamma^{(\rho\sigma)}_{j\,\alpha_1(\eta\tau)} R^{\eta}_{jF\,\tau\alpha_2\overline{\beta}} = \partial_{\alpha_2} R^{\rho}_{jF\,\sigma\alpha_1\overline{\beta}} + \sum_{\eta,\tau} \Gamma^{(\rho\sigma)}_{j\,\alpha_2(\eta\tau)} R^{\eta}_{jF\,\tau\alpha_1\overline{\beta}}.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst die erste Gleichung und berechnen auf U_j mit Formel (2.12):

$$\big(D_{\mathrm{End}(F)}(\Omega_F)\big)_j = \big(d + \theta_{j\mathrm{End}(F)}\big)\,\Theta_{jF} = d\Theta_{jF} + \theta_{j\mathrm{End}(F)} \wedge \Theta_{jF}.$$

Es genügt also $\theta_{j\mathrm{End}(F)} \wedge \Theta_{jF} = -d\Theta_{jF}$ zu zeigen. Zu diesem Zweck berechnen wir unter Verwendung von Proposition 2.4 sowie der Gleichung $\Theta_{jF} = d\theta_{jF} + \theta_{jF} \wedge \theta_{jF}$ aus (2.14):

$$\begin{aligned}
\big(\theta_{j\mathrm{End}(F)} \wedge \Theta_{jF}\big)^{\rho}_{\sigma} &= \sum_{\eta,\tau} \theta^{(\rho\sigma)}_{j\,(\eta\tau)} \wedge \Theta^{\eta}_{jF\,\tau} = \sum_{\eta,\tau} \left(\sum_{\alpha} \Gamma^{(\rho\sigma)}_{j\,\alpha(\eta\tau)} dz^{\alpha}_j \right) \wedge \Theta^{\eta}_{jF\,\tau} \\
&= \sum_{\eta,\tau} \left(\sum_{\alpha} \delta^{\tau}_{\sigma} \Gamma^{\rho}_{jF\,\alpha\eta} dz^{\alpha}_j \right) \wedge \Theta^{\eta}_{jF\,\tau} - \sum_{\eta,\tau} \left(\sum_{\alpha} \delta^{\rho}_{\eta} \Gamma^{\tau}_{jF\,\alpha\sigma} dz^{\alpha}_j \right) \wedge \Theta^{\eta}_{jF\,\tau} \\
&= \sum_{\eta} \left(\sum_{\alpha} \Gamma^{\rho}_{jF\,\alpha\eta} dz^{\alpha}_j \right) \wedge \Theta^{\eta}_{jF\,\sigma} - \sum_{\tau} \Theta^{\rho}_{jF\,\tau} \wedge \left(\sum_{\alpha} \Gamma^{\tau}_{jF\,\alpha\sigma} dz^{\alpha}_j \right) \\
&= \sum_{\eta} \theta^{\rho}_{jF\,\eta} \wedge \Theta^{\eta}_{jF\,\sigma} - \sum_{\eta} \Theta^{\rho}_{jF\,\eta} \wedge \theta^{\eta}_{jF\,\sigma} \\
&= \sum_{\eta} \theta^{\rho}_{jF\,\eta} \wedge \left(d\theta^{\eta}_{jF\,\sigma} + \sum_{\tau} \theta^{\eta}_{jF\,\tau} \wedge \theta^{\tau}_{jF\,\sigma} \right) - \sum_{\eta} \left(d\theta^{\rho}_{jF\,\eta} + \sum_{\tau} \theta^{\rho}_{jF\,\tau} \wedge \theta^{\tau}_{jF\,\eta} \right) \wedge \theta^{\eta}_{jF\,\sigma} \\
&= \sum_{\eta} \theta^{\rho}_{jF\,\eta} \wedge d\theta^{\eta}_{jF\,\sigma} - \sum_{\eta} d\theta^{\rho}_{jF\,\eta} \wedge \theta^{\eta}_{jF\,\sigma} + \sum_{\eta,\tau} \theta^{\rho}_{jF\,\eta} \wedge \theta^{\eta}_{jF\,\tau} \wedge \theta^{\tau}_{jF\,\sigma} - \sum_{\eta,\tau} \theta^{\rho}_{jF\,\tau} \wedge \theta^{\tau}_{jF\,\eta} \wedge \theta^{\eta}_{jF\,\sigma} \\
&= \sum_{\eta} \theta^{\rho}_{jF\,\eta} \wedge d\theta^{\eta}_{jF\,\sigma} - \sum_{\eta} d\theta^{\rho}_{jF\,\eta} \wedge \theta^{\eta}_{jF\,\sigma}.
\end{aligned}$$

Andererseits erhalten wir mit der Formel aus (2.14):

$$\begin{aligned}
d\Theta^{\rho}_{jF\,\sigma} &= dd\theta^{\rho}_{jF\,\sigma} + \sum_{\eta} \left(d\theta^{\rho}_{jF\,\eta} \right) \wedge \theta^{\eta}_{jF\,\sigma} - \sum_{\eta} \theta^{\rho}_{jF\,\eta} \wedge \left(d\theta^{\eta}_{jF\,\sigma} \right) \\
&= \sum_{\eta} \left(d\theta^{\rho}_{jF\,\eta} \right) \wedge \theta^{\eta}_{jF\,\sigma} - \sum_{\eta} \theta^{\rho}_{jF\,\eta} \wedge \left(d\theta^{\eta}_{jF\,\sigma} \right).
\end{aligned}$$

Ein Vergleich beider Ergebnisse zeigt die Gültigkeit der erforderlichen Gleichung, so dass wir den ersten Teil der Behauptung nachgewiesen haben. Für den zweiten Teil nutzen wir (2.15) sowie erneut (2.12) und erhalten wegen

$$0 = \big(D_{\mathrm{End}(F)}(\Omega_F)\big)_j = \big(d + \theta_{j\mathrm{End}(F)}\big)\,\Theta_{jF} = \partial\Theta_{jF} + \underbrace{\bar\partial\bar\partial\theta_{jF}}_{=0} + \theta_{j\mathrm{End}(F)} \wedge \Theta_{jF}$$

die Identität $0 = \partial\Theta_{jF} + \theta_{j\mathrm{End}(F)} \wedge \Theta_{jF}$. Wir berechnen einerseits

$$\begin{aligned}\partial\Theta^{\rho}_{jF\,\sigma} &= \partial\left(\sum_{\alpha,\beta} R^{\rho}_{jF\,\sigma\alpha\overline{\beta}} dz_j^{\alpha} \wedge dz_j^{\overline{\beta}}\right) = \sum_{\alpha,\beta,\gamma} \partial_\gamma R^{\rho}_{jF\,\sigma\alpha\overline{\beta}} dz_j^{\gamma} \wedge dz_j^{\alpha} \wedge dz_j^{\overline{\beta}}\\ &= \frac{1}{2!}\sum_{\alpha_1,\alpha_2,\beta}\Big(\partial_{\alpha_1} R^{\rho}_{jF\,\sigma\alpha_2\overline{\beta}} - \partial_{\alpha_2} R^{\rho}_{jF\,\sigma\alpha_1\overline{\beta}}\Big)\, dz_j^{\alpha_1} \wedge dz_j^{\alpha_2} \wedge dz_j^{\overline{\beta}}\end{aligned}$$

und andererseits

$$\begin{aligned}\big(\theta_{j\mathrm{End}(F)} \wedge \Theta_{jF}\big)^{\rho}_{\sigma} &= \sum_{\eta,\tau} \theta^{(\rho\sigma)}_{j\,(\eta\tau)} \wedge \Theta^{\eta}_{jF\,\tau} = \sum_{\eta,\tau}\left(\sum_{\alpha}\Gamma^{(\rho\sigma)}_{j\,\alpha(\eta\tau)} dz_j^{\alpha}\right) \wedge \left(\sum_{\gamma,\beta} R^{\eta}_{jF\,\tau\gamma\overline{\beta}} dz_j^{\gamma} \wedge dz_j^{\overline{\beta}}\right)\\ &= \sum_{\alpha,\beta,\gamma}\left(\sum_{\eta,\tau}\Gamma^{(\rho\sigma)}_{j\,\alpha(\eta\tau)} R^{\eta}_{jF\,\tau\gamma\overline{\beta}}\right) dz_j^{\alpha} \wedge dz_j^{\gamma} \wedge dz_j^{\overline{\beta}}\\ &= \frac{1}{2!}\sum_{\alpha_1,\alpha_2,\beta}\left(\sum_{\eta,\tau}\Gamma^{(\rho\sigma)}_{j\,\alpha_1(\eta\tau)} R^{\eta}_{jF\,\tau\alpha_2\overline{\beta}} - \sum_{\eta,\tau}\Gamma^{(\rho\sigma)}_{j\,\alpha_2(\eta\tau)} R^{\eta}_{jF\,\tau\alpha_1\overline{\beta}}\right) dz_j^{\alpha_1} \wedge dz_j^{\alpha_2} \wedge dz_j^{\overline{\beta}},\end{aligned}$$

so dass aus der Gleichung $0 = \partial\Theta_{jF} + \theta_{j\mathrm{End}(F)} \wedge \Theta_{jF}$ insgesamt

$$\begin{aligned}0 = \frac{1}{2!}\sum_{\alpha_1,\alpha_2,\beta}&\left(\partial_{\alpha_1} R^{\rho}_{jF\,\sigma\alpha_2\overline{\beta}} + \sum_{\eta,\tau}\Gamma^{(\rho\sigma)}_{j\,\alpha_1(\eta\tau)} R^{\eta}_{jF\,\tau\alpha_2\overline{\beta}} - \partial_{\alpha_2} R^{\rho}_{jF\,\sigma\alpha_1\overline{\beta}} - \sum_{\eta,\tau}\Gamma^{(\rho\sigma)}_{j\,\alpha_2(\eta\tau)} R^{\eta}_{jF\,\tau\alpha_1\overline{\beta}}\right)\\ &dz_j^{\alpha_1} \wedge dz_j^{\alpha_2} \wedge dz_j^{\overline{\beta}}\end{aligned}$$

folgt. Da die Koeffizienten schiefsymmetrisch sind, liefert dies die zweite Behauptung. □

2.3. Determinantenbündel

In diesem Abschnitt sei $\pi : F \to M$ ein holomorphes Vektorbündel vom Rang r über der komplexen Mannigfaltigkeit M und h sei eine hermitesche Metrik auf F. Wir wollen das Determinantenbündel von F konstruieren und zeigen, dass dieses mit einer von h induzierten Metrik ausgestattet ist, deren Krümmung sich leicht durch die von h ausdrücken lässt. Dazu wählen wir wieder eine offene Überdeckung $\{U_j\}$ von M durch Koordinatenumgebungen, so dass F über jeder der offenen Mengen U_j trivialisiert werden kann. Das Vektorbündel F wird bezüglich dieser Überdeckung durch die holomorphen Funktionen $f_{jk} : U_j \cap U_k \to \mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$ beschrieben und die hermitesche Metrik h durch die differenzierbaren Funktionen $h_j : U_j \to \mathbb{C}^{r\times r}$. Für die Konstruktion des Determinantenbündels definieren wir hiervon ausgehend die Funktionen

$$g_{jk} : U_j \cap U_k \longrightarrow \mathbb{C}^* = \mathrm{GL}(1,\mathbb{C}), \qquad p \longmapsto \det(f_{jk}(p)) \tag{2.33}$$

sowie

$$H_j : U_j \longrightarrow \mathbb{C}^{1\times 1}, \qquad p \longmapsto \det(h_j(p)). \tag{2.34}$$

Ohne Mühe rechnet man nach, dass die g_{jk} die erforderlichen Identitäten (2.3) für die Transitionsfunktionen eines holomorphen Vektorbündels vom Rang 1 auf M erfüllen. Dieses Vektorbündel wird als Determinantenbündel $\det(F) \to M$ von F bezeichnet. Außerdem besitzen die H_j gerade das Transformationsverhalten (2.4) für eine hermitesche Metrik auf $\det(F)$. Damit trägt das Determinantenbündel eine von h induzierte hermitesche Metrik $\det(h)$. Um den Chern-Zusammenhang sowie die Krümmung dieser Metrik zu berechnen, zeigen wir vorab:

Lemma 2.9. *Sei $A(t) \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ differenzierbar von einem Parameter t abhängig und d ein Differentialoperator für diesen Parameter. Dann gilt die Beziehung*

$$\frac{d(\det A)|_t}{\det A(t)} = \mathrm{tr}\left((dA)|_t \cdot A(t)^{-1}\right).$$

Beweis. Wir verzichten darauf, die Auswertung an der Stelle t jeweils zu notieren. Zunächst sei $A = (a_{ij})_{i,j}$ sowie $A^{-1} = (a^{ij})_{i,j}$. Es ist $((dA)\cdot A^{-1})_{i,j} = \sum_k (da_{ik})a^{kj}$, d.h. wir haben die Formel

$$\mathrm{tr}((dA)\cdot A^{-1}) = \sum_{j,k} (da_{jk})a^{kj}.$$

Die a^{kj} erhalten wir nun mit der Cramerschen Regel. Es ist $A^{-1}\cdot e_j = \left(a^{1j},\ldots,a^{nj}\right)^t$, so dass wir wegen $(e_j)_l = \delta^j_l$ berechnen können:

$$\begin{aligned}
a^{kj} &= \frac{1}{\det A}\det\left(a^1\cdots a^{k-1}e_j a^{k+1}\cdots a^n\right)\\
&= \frac{1}{\det A}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{\sigma(1)1}\cdot\ldots\cdot a_{\sigma(k-1)(k-1)}\cdot(e_j)_{\sigma(k)}\cdot a_{\sigma(k+1)(k+1)}\cdot\ldots\cdot a_{\sigma(n)n}\\
&= \frac{1}{\det A}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\mathrm{sgn}(\sigma)\delta^j_{\sigma(k)}\prod_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^n a_{\sigma(l)l}.
\end{aligned}$$

Indem wir beide Formeln kombinieren, erhalten wir

$$\begin{aligned}
\det A\cdot\mathrm{tr}((dA)\cdot A^{-1}) &= \det A\cdot\sum_{j,k}(da_{jk})a^{kj} = \sum_{j,k}da_{jk}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\mathrm{sgn}(\sigma)\delta^j_{\sigma(k)}\prod_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^n a_{\sigma(l)l}\\
&= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\mathrm{sgn}(\sigma)\sum_{j,k}da_{jk}\delta^j_{\sigma(k)}\prod_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^n a_{\sigma(l)l} = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\mathrm{sgn}(\sigma)\sum_k da_{\sigma(k)k}\prod_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^n a_{\sigma(l)l}.
\end{aligned}$$

Andererseits berechnen wir mit Leibniz:

$$\begin{aligned} d(\det A) &= d\left(\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\operatorname{sgn}(\sigma)\prod_{l=1}^{n}a_{\sigma(l)l}\right)=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\operatorname{sgn}(\sigma)d\left(\prod_{l=1}^{n}a_{\sigma(l)l}\right)\\ &=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\operatorname{sgn}(\sigma)\sum_{k=1}^{n}(da_{\sigma(k)k})\prod_{\substack{l=1\\l\neq k}}^{n}a_{\sigma(l)l}. \end{aligned}$$

Damit ist die behauptete Gleichung nachgewiesen. □

Diese Formel liefert nun unmittelbar die Christoffelsymbole der induzierten Metrik:

Proposition 2.10. *Ist h eine hermitesche Metrik auf dem holomorphen Vektorbündel $F\to M$, dann folgt für die Christoffelsymbole der induzierten Metrik* $\det(h)$ *des Determinantenbündels* $\det(F)\to M$ *auf einem Element U_j einer trivialisierenden Überdeckung:*

$$\Gamma^{1}_{j\,\det(F)\,\alpha 1}=\sum_{\rho}\Gamma^{\rho}_{jF\,\alpha\rho}.$$

Beweis. Wir berechnen mit (2.34) sowie mit Lemma 2.9:

$$\begin{aligned} \Gamma^{1}_{j\,\det(F)\,\alpha 1} &= H_j^{-1}\partial_\alpha H_j=\det(h_j)^{-1}\partial_\alpha\det(h_j)=\operatorname{tr}\left((\partial_\alpha h_j)\cdot h_j^{-1}\right)\\ &=\sum_{\rho}\sum_{\tau}(\partial_\alpha h_j)^{\rho}_{\overline{\tau}}h_j^{\overline{\tau}\rho}=\sum_{\rho}\sum_{\tau}h_j^{\overline{\tau}\rho}\partial_\alpha h_{j\,\rho\overline{\tau}}=\sum_{\rho}\Gamma^{\rho}_{jF\,\alpha\rho}. \end{aligned}$$

□

Bevor wir das Hauptresultat über den Krümmungstensor des Determinantenbündels herleiten können, notieren wir die Beobachtung, dass das Endomorphismenbündel eines solchen Determinantenbündels trivial ist. Es gilt also für jedes holomorphe Bündel $F\to M$ stets die Gleichung

$$\operatorname{End}(\det(F))=M\times\mathbb{C}.$$

Dies ist unmittelbar klar, da das Determinantenbündel und damit auch $\operatorname{End}(\det(F))$ den Rang 1 besitzt und die Transitionsfunktionen letzteren Bündels durch $G_{jk}=g_{jk}g_{kj}=\mathrm{id}$ gegeben sind. Die Krümmung des Determinantenbündels ist also wegen

$$\Omega_{\det(F)}\in\Gamma\left(M,\mathcal{A}^{1,1}\left(\operatorname{End}(\det(F))\right)\right)=\Gamma\left(M,\mathcal{A}^{1,1}\left(M\right)\right)$$

eine $(1,1)$-Form auf der Mannigfaltigkeit M.

Satz 2.11. *Sei $F\to M$ ein holomorphes Vektorbündel auf der komplexen Mannigfaltigkeit M und h eine hermitesche Metrik auf F mit Krümmung $\Omega_F\in\Gamma\left(M,\mathcal{A}^{1,1}\left(\operatorname{End}(F)\right)\right)$. Dann gilt für die Krümmung $\Omega_{\det(F)}\in\Gamma\left(M,\mathcal{A}^{1,1}\left(M\right)\right)$ der induzierten Metrik* $\det(h)$ *auf dem Determinantenbündel* $\det(F)\to M$ *die Formel*

$$\Omega_{\det(F)}=\operatorname{tr}(\Omega_F).$$

Beweis. Wie zuvor arbeiten wir mit einer offenen Überdeckung $\{U_j\}$ von M durch Koordinatenumgebungen, so dass das Bündel F jeweils über U_j trivialisiert werden kann. In dieser Situation berechnen wir die lokalen Krümmungsterme mit Proposition 2.10 und erhalten

$$R^1_{j\,\det(F)\,1\alpha\overline{\beta}} = -\partial_{\overline{\beta}}\Gamma^1_{j\,\det(F)\,\alpha 1} = -\partial_{\overline{\beta}}\left(\sum_\rho \Gamma^\rho_{jF\,\alpha\rho}\right) = \sum_\rho \left(-\partial_{\overline{\beta}}\Gamma^\rho_{jF\,\alpha\rho}\right) = \sum_\rho R^\rho_{jF\,\rho\alpha\overline{\beta}}.$$

Lokal auf U_j wird die Krümmung Ω_F von F durch

$$\Theta_{jF} = (\Theta^\rho_{jF\,\sigma})_{\rho,\sigma} \quad \text{mit} \quad \Theta^\rho_{jF\,\sigma} = \sum_{\alpha,\beta} R^\rho_{jF\,\sigma\alpha\overline{\beta}}\, dz^\alpha_j \wedge dz^{\overline{\beta}}_j$$

sowie $\Omega_{\det(F)}$ durch $\Theta_{j\,\det(F)} = \Theta^1_{j\,\det(F)\,1}$ mit

$$\Theta^1_{j\,\det(F)\,1} = \sum_{\alpha,\beta} R^1_{j\,\det(F)\,1\alpha\overline{\beta}}\, dz^\alpha_j \wedge dz^{\overline{\beta}}_j = \sum_{\alpha,\beta}\left(\sum_\rho R^\rho_{jF\,\rho\alpha\overline{\beta}}\right) dz^\alpha_j \wedge dz^{\overline{\beta}}_j$$

beschrieben. Gemäß (2.26) ist damit die Gleichung $\Omega_{\det(F)} = \operatorname{tr}(\Omega_F)$ nachgewiesen. □

2.4. Hodge-Theorie auf hermiteschen, holomorphen Vektorbündeln

In diesem Abschnitt geben wir einen kurzen Überblick über die Hodge-Theorie auf hermiteschen, holomorphen Vektorbündeln über kompakten Kählermannigfaltigkeiten, da diese Theorie für unsere späteren Rechnungen eine herausragende Rolle spielt. Zu diesem Zweck diskutieren wir vorab die Hodge-Theorie im Falle einer kompakten Kählermannigfaltigkeit. Wir geben eine vollständige Herleitung der Formeln für die zu $\bar\partial$ formal adjungierten Operatoren, müssen für die Beweise der Hauptresultate der Theorie jedoch auf die Literatur [Hu04, Kb87, We07] verweisen.

Sei also (M, g) eine kompakte Kählermannigfaltigkeit der komplexen Dimension n. Die Metrik g werde bezüglich einer lokal endlichen offenen Überdeckung von M durch Koordinatenumgebungen (U_j, z_j) lokal durch die Funktionen $g_j : U_j \to \mathbb{C}^{n\times n}$ beschrieben. Weiter bezeichnen wir mit $\omega \in \Gamma\left(M, \mathcal{A}^{1,1}(M)\right)$ die Kählerform von (M, g), welche lokal auf U_j durch

$$\omega_j = \sqrt{-1}\sum_{\alpha,\beta} g_{j\,\alpha\overline{\beta}}\, dz^\alpha_j \wedge dz^{\overline{\beta}}_j \tag{2.35}$$

gegeben wird. Entsprechend ist

$$\frac{\omega^n}{n!} \quad \text{mit} \quad \left(\frac{\omega^n}{n!}\right)_j = \left(\sqrt{-1}\right)^n |g_j|\, dz^1_j \wedge dz^{\overline{1}}_j \wedge \ldots \wedge dz^n_j \wedge dz^{\overline{n}}_j, \tag{2.36}$$

wobei $|g_j|$ die Determinante von g_j bezeichnet, die Volumenform von (M, g), welche wir zur Integration auf der Mannigfaltigkeit verwenden werden.

Sind nun zwei Differentialformen $\varphi, \psi \in \Gamma(M, \mathcal{A}^{p,q}(M))$ gegeben, welche wir lokal auf U_j durch

$$\varphi_j = \frac{1}{p!q!} \sum_{\alpha,\beta} \varphi_{j\,\alpha_1 \ldots \alpha_p \overline{\beta_1} \ldots \overline{\beta_q}} dz_j^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\alpha_p} \wedge dz_j^{\overline{\beta_1}} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\beta_q}} \tag{2.37}$$

sowie

$$\psi_j = \frac{1}{p!q!} \sum_{\alpha,\beta} \psi_{j\,\alpha_1 \ldots \alpha_p \overline{\beta_1} \ldots \overline{\beta_q}} dz_j^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\alpha_p} \wedge dz_j^{\overline{\beta_1}} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\beta_q}} \tag{2.38}$$

beschreiben, dann definieren wir eine glatte Funktion $(\varphi, \psi) \in \Gamma(M, \mathcal{A}(M))$ lokal auf U_j durch

$$(\varphi, \psi)|_{U_j} = \frac{1}{p!q!} \sum_{\alpha,\beta,\lambda,\mu} g_j^{\overline{\lambda_1}\alpha_1} \cdots g_j^{\overline{\lambda_p}\alpha_p} g_j^{\overline{\beta_1}\mu_1} \cdots g_j^{\overline{\beta_q}\mu_q} \varphi_{j\,\alpha_1 \ldots \alpha_p \overline{\beta_1} \ldots \overline{\beta_q}} \overline{\psi_{j\,\lambda_1 \ldots \lambda_p \overline{\mu_1} \ldots \overline{\mu_q}}}. \tag{2.39}$$

Man überzeugt sich leicht davon, dass hierdurch eine hermitesche Metrik auf dem Vektorbündel der (p,q)-Formen auf M definiert wird. Für die Hodge-Theorie nutzen wir aus, dass M kompakt ist, und definieren ein hermitesches Skalarprodukt auf der Menge $\Gamma(M, \mathcal{A}^{p,q}(M))$ der (p,q)-Formen auf M, indem wir

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_M (\varphi, \psi) \frac{\omega^n}{n!} \tag{2.40}$$

setzen. Wir interessieren uns für die zu ∂, $\bar{\partial}$ und d bezüglich dieses Skalarproduktes formal adjungierten Operatoren und betrachten hierzu den Hodge-Stern-Operator, einen $\mathcal{A}(M)$-linearen Garbenhomomorphismus

$$* : \mathcal{A}^{p,q}(M) \longrightarrow \mathcal{A}^{n-q,n-p}(M),$$

welcher durch die Gleichung $\varphi \wedge *\overline{\psi} = (\varphi, \psi)\, \omega^n / n!$ eindeutig bestimmt ist. Wegen seiner großen Relevanz wollen wir kurz daran erinnern, wie dieser Operator lokal berechnet werden kann. Sei dazu eine Form $\varphi \in \Gamma(M, \mathcal{A}^{p,q}(M))$ gegeben. Mit $A_p = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ bezeichnen wir ein aufsteigend geordnetes p-Tupel von Zahlen $1 \leqslant \alpha_i \leqslant n$, d.h. es gilt $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n$. Ist ein solches Tupel A_p gegeben, dann bezeichnen wir mit $A_{n-p} = (\alpha_{p+1}, \ldots, \alpha_n)$ das entsprechend komplementäre Tupel, d.h. es ist $A_p \cup A_{n-p} = \{1, \ldots, n\}$. Außerdem verwenden wir die Abkürzung

$$dz_j^{A_p} := dz_j^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\alpha_n} \tag{2.41}$$

sowie analoge Notationen und Abkürzungen für konjugierte Tupel $\overline{B_q}$. Mit diesen Konventionen können wir φ sowohl durch (2.37) als auch durch

$$\varphi_j = \sum_{A_p, B_q} \varphi_{j\,A_p \overline{B_q}} dz_j^{A_p} \wedge dz_j^{\overline{B_q}} \tag{2.42}$$

notieren, wobei in dieser Darstellung lediglich über aufsteigend sortierte Tupel summiert wird und entsprechend dieselben Koeffizienten wie in (2.37) auftreten. Die vermöge der Metrik g hochgezogenen schiefsymmetrischen Koeffizienten von φ auf U_j werden durch

$$\varphi_j^{\overline{\beta_1} \ldots \overline{\beta_p} \alpha_1 \ldots \alpha_q} = \sum_{\lambda,\mu} g_j^{\overline{\beta_1}\lambda_1} \cdots g_j^{\overline{\beta_p}\lambda_p} g_j^{\overline{\mu_1}\alpha_1} \cdots g_j^{\overline{\mu_q}\alpha_q} \varphi_{j\,\lambda_1 \ldots \lambda_p \overline{\mu_1} \ldots \overline{\mu_q}} \tag{2.43}$$

gebildet und wir verwenden wieder Abkürzungen der Gestalt $\varphi_j^{\overline{B_p} A_q}$. Nach [MK71] können wir mit diesen Notationen $*\varphi \in \Gamma\left(M, \mathcal{A}^{n-q,n-p}\left(M\right)\right)$ lokal auf U_j durch

$$(*\varphi)_j = \left(\sqrt{-1}\right)^n (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}+pn} \sum_{A_q, B_p} \operatorname{sgn}(A_q A_{n-q}) \operatorname{sgn}(\overline{B_p B_{n-p}}) |g_j| \varphi_j^{\overline{B_p} A_q} dz_j^{A_{n-q}} \wedge dz_j^{\overline{B_{n-p}}} \tag{2.44}$$

beschreiben. Da für unsere Zwecke eine Darstellung mit schiefsymmetrischen Koeffizienten besser geeignet ist, schreiben wir diese Formel mit Hilfe des Levi-Civita-Symbols

$$\varepsilon_{\gamma_1 \ldots \gamma_n} = \begin{cases} \operatorname{sgn}(\gamma_1 \ldots \gamma_n) & \text{falls } \gamma_1, \ldots, \gamma_n \text{ eine Permutation von } \{1, \ldots, n\} \text{ ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{2.45}$$

in diese Gestalt um und erhalten

$$(*\varphi)_j = \frac{1}{(n-q)!(n-p)!} \sum_{\alpha, \beta} (*\varphi)_{j\, \alpha_1 \ldots \alpha_{n-q} \overline{\beta_1} \ldots \overline{\beta_{n-p}}}\, dz_j^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\alpha_{n-q}} \wedge dz_j^{\overline{\beta_1}} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\beta_{n-p}}} \tag{2.46}$$

mit den schiefsymmetrischen Koeffizienten $(*\varphi)_{j\, \alpha_1 \ldots \alpha_{n-q} \overline{\beta_1} \ldots \overline{\beta_{n-p}}}$ gegeben durch

$$\left(\sqrt{-1}\right)^n (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}+pn} \frac{|g_j|}{p!q!} \sum_{\gamma, \eta, \lambda, \mu} \varepsilon_{\gamma_1 \ldots \gamma_q \alpha_1 \ldots \alpha_{n-q}} \varepsilon_{\overline{\eta_1} \ldots \overline{\eta_p} \overline{\beta_1} \ldots \overline{\beta_{n-p}}} g_j^{\overline{\eta_1} \lambda_1} \cdots g_j^{\overline{\eta_p} \lambda_p} g_j^{\overline{\mu_1} \gamma_1} \cdots g_j^{\overline{\mu_q} \gamma_q} \varphi_{j\, \lambda_1 \ldots \overline{\mu_q}}.$$

Mit dem Hodge-Stern-Operator definieren wir nun Garbenhomomorphismen

$$\partial^* : \mathcal{A}^{p,q}\left(M\right) \longrightarrow \mathcal{A}^{p-1,q}\left(M\right),\ \bar{\partial}^* : \mathcal{A}^{p,q}\left(M\right) \longrightarrow \mathcal{A}^{p,q-1}\left(M\right),\ d^* : \mathcal{A}^k\left(M\right) \longrightarrow \mathcal{A}^{k-1}\left(M\right) \tag{2.47}$$

durch $\partial^* = - * \bar{\partial} *$, $\bar{\partial}^* = - * \partial *$ sowie $d^* = - * d *$. Man zeigt, dass die dadurch definierten Operatoren tatsächlich die zu ∂, $\bar{\partial}$ beziehungsweise d formal adjungierten Operatoren sind, und erhält die zugehörigen Laplace-Operatoren

$$\Box_\partial : \mathcal{A}^{p,q}\left(M\right) \longrightarrow \mathcal{A}^{p,q}\left(M\right),\ \Box_{\bar{\partial}} : \mathcal{A}^{p,q}\left(M\right) \longrightarrow \mathcal{A}^{p,q}\left(M\right),\ \Delta : \mathcal{A}^k\left(M\right) \longrightarrow \mathcal{A}^k\left(M\right) \tag{2.48}$$

durch $\Box_\partial = \partial\partial^* + \partial^*\partial$, $\Box_{\bar{\partial}} = \bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial}$ sowie $\Delta = dd^* + d^*d$. Die harmonischen Formen bezüglich des $\Box_{\bar{\partial}}$-Operators bezeichnen wir mit

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\bar{\partial}}^k(M,g) &= \{\varphi \in \Gamma(M, \mathcal{A}^k\left(M\right)) \,|\, \Box_{\bar{\partial}}\varphi = 0\}, \\ \mathcal{H}_{\bar{\partial}}^{p,q}(M,g) &= \{\varphi \in \Gamma\left(M, \mathcal{A}^{p,q}\left(M\right)\right) \,|\, \Box_{\bar{\partial}}\varphi = 0\}. \end{aligned} \tag{2.49}$$

Analog definieren wir die harmonischen Formen $\mathcal{H}_\partial^k(M,g)$ und $\mathcal{H}_\partial^{p,q}(M,g)$ bezüglich des $\Box_\partial$-Operators sowie die harmonischen Formen $\mathcal{H}^k(M,g)$ und $\mathcal{H}^{p,q}(M,g)$ bezüglich des Δ-Operators. Wir bemerken, dass sich die p-q-Zerlegung $\Gamma\left(U, \mathcal{A}^k\left(M\right)\right) = \bigoplus_{p+q=k} \Gamma\left(U, \mathcal{A}^{p,q}\left(M\right)\right)$ auch ohne die Kählerbedingung an g direkt auf die harmonischen Formen bezüglich $\Box_\partial$ und $\Box_{\bar{\partial}}$ überträgt:

$$\mathcal{H}_\partial^k(M,g) = \bigoplus_{p+q=k} \mathcal{H}_\partial^{p,q}(M,g), \qquad \mathcal{H}_{\bar{\partial}}^k(M,g) = \bigoplus_{p+q=k} \mathcal{H}_{\bar{\partial}}^{p,q}(M,g). \tag{2.50}$$

Für die harmonischen Formen bezüglich Δ ist hingegen die Kählerbedingung im Allgemeinen erforderlich, damit eine entsprechende p-q-Zerlegung gültig ist. Tatsächlich folgt aus der Kählereigenschaft sogar die viel stärkere Gleichung

$$\Delta = 2\Box_\partial = 2\Box_{\bar\partial}. \tag{2.51}$$

Folglich stimmen in diesem Fall die Räume harmonischer Formen bezüglich der verschiedenen Laplace-Operatoren überein und wir verwenden der Einfachheit halber als Notation stets $\mathcal{H}^k(M,g)$ sowie $\mathcal{H}^{p,q}(M,g)$. Als Hauptresultat halten wir fest:

Theorem 2.12 (Hodge-Zerlegung)**.** *Ist M eine kompakte, komplexe Mannigfaltigkeit und g eine hermitesche Metrik auf M, dann haben wir folgende Zerlegungen, welche bezüglich des Skalarproduktes auf $\Gamma\left(M, \mathcal{A}^{p,q}\left(M\right)\right)$ orthogonal sind:*

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(M, \mathcal{A}^{p,q}\left(M\right)\right) &= \partial\,\Gamma\left(M, \mathcal{A}^{p-1,q}\left(M\right)\right) \oplus \mathcal{H}^{p,q}_{\partial}(M,g) \oplus \partial^*\,\Gamma\left(M, \mathcal{A}^{p+1,q}\left(M\right)\right),\\
\Gamma\left(M, \mathcal{A}^{p,q}\left(M\right)\right) &= \bar\partial\,\Gamma\left(M, \mathcal{A}^{p,q-1}\left(M\right)\right) \oplus \mathcal{H}^{p,q}_{\bar\partial}(M,g) \oplus \bar\partial^*\,\Gamma\left(M, \mathcal{A}^{p,q+1}\left(M\right)\right).
\end{aligned}$$

Ferner sind die komplexen Vektorräume $\mathcal{H}^{p,q}_{\partial}(M,g)$ und $\mathcal{H}^{p,q}_{\bar\partial}(M,g)$ endlichdimensional.

Als direkte Konsequenz erhalten wir, dass auf einer solchen Mannigfaltigkeit die Projektion

$$\mathcal{H}^{p,q}_{\bar\partial}(M,g) \longrightarrow H^q(M, \Omega^p\left(M\right)), \tag{2.52}$$

welche einer harmonischen (p,q)-Form ihre Dolbeault-Kohomologieklasse zuordnet, ein Isomorphismus ist.

In unseren späteren Rechnungen werden wir uns hauptsächlich für die harmonischen Formen bezüglich $\Box_{\bar\partial}$ interessieren. Dabei wird es besonders nützlich sein, dass wir mit dem folgenden Satz eine bequeme Möglichkeit haben, den $\bar\partial^*$-Operator auf kompakten Kählermannigfaltigkeiten lokal zu berechnen. Für den Beweis orientieren wir uns an der Herleitung aus [MK71].

Satz 2.13. *Ist (M,g) eine kompakte Kählermannigfaltigkeit und $\varphi \in \Gamma\left(M, \mathcal{A}^{p,q}\left(M\right)\right)$ eine (p,q)-Form, welche lokal bezüglich einer Überdeckung von M durch Koordinatenumgebungen (U_j, z_j) als*

$$\varphi_j = \frac{1}{p!q!}\sum_{\alpha,\beta} \varphi_{j\,\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}} dz_j^{\alpha_1}\wedge\ldots\wedge dz_j^{\alpha_p}\wedge dz_j^{\overline{\beta_1}}\wedge\ldots\wedge dz_j^{\overline{\beta_q}}$$

geschrieben wird, dann ist der formal adjungierte Operator $\bar\partial^*\varphi \in \Gamma\left(M, \mathcal{A}^{p,q-1}\left(M\right)\right)$ lokal durch

$$\left(\bar\partial^*\varphi\right)_j = \frac{1}{p!(q-1)!}\sum_{\alpha,\beta}\left(\bar\partial^*\varphi\right)_{j\,\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}} dz_j^{\alpha_1}\wedge\ldots\wedge dz_j^{\alpha_p}\wedge dz_j^{\overline{\beta_1}}\wedge\ldots\wedge dz_j^{\overline{\beta_{q-1}}}$$

mit den schiefsymmetrischen Koeffizienten

$$\left(\bar\partial^*\varphi\right)_{j\,\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}} = -(-1)^p\sum_{\beta,\gamma} g_j^{\overline{\beta}\gamma}\nabla_\gamma\varphi_{j\,\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\beta}\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}}$$

gegeben.

Beweis. Sei eine $(p,q-1)$-Form $\psi \in \Gamma\left(M, \mathcal{A}^{p,q-1}(M)\right)$ auf M gegeben. Lokal auf U_j wird diese durch

$$\psi_j = \frac{1}{p!(q-1)!}\sum_{\alpha,\beta}\psi_{j\,\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}}dz_j^{\alpha_1}\wedge\ldots\wedge dz_j^{\alpha_p}\wedge dz_j^{\overline{\beta_1}}\wedge\ldots\wedge dz_j^{\overline{\beta_{q-1}}}$$

beschrieben. Also ist $\bar{\partial}\psi \in \Gamma\left(M, \mathcal{A}^{p,q}(M)\right)$ lokal gegeben durch

$$(\bar{\partial}\psi)_j = \frac{1}{p!q!}\sum_{\alpha,\beta}\underbrace{(-1)^p\sum_{\nu=1}^{q}(-1)^{\nu+1}\partial_{\overline{\beta_\nu}}\psi_{j\,\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\beta_1}\ldots\widehat{\overline{\beta_\nu}}\ldots\overline{\beta_q}}}_{=(\bar{\partial}\psi)_{j\,\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}}}dz_j^{\alpha_1}\wedge\ldots\wedge dz_j^{\alpha_p}\wedge dz_j^{\overline{\beta_1}}\wedge\ldots\wedge dz_j^{\overline{\beta_q}}$$

und wir können das Produkt $(\bar{\partial}\psi,\varphi)$ auf U_j gemäß (2.39) wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned}
(\bar{\partial}\psi,\varphi)\big|_{U_j} &= \frac{1}{p!q!}\sum_{\alpha,\beta,\lambda,\mu} g_j^{\overline{\lambda_1}\alpha_1}\cdots g_j^{\overline{\lambda_p}\alpha_p}g_j^{\overline{\beta_1}\mu_1}\cdots g_j^{\overline{\beta_q}\mu_q}(\bar{\partial}\psi)_{j\,\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}}\overline{\varphi_{j\,\lambda_1\ldots\lambda_p\overline{\mu_1}\ldots\overline{\mu_q}}}\\
&= \frac{1}{p!q!}\sum_{\alpha,\beta}(\bar{\partial}\psi)_{j\,\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}}\overline{\sum_{\lambda,\mu} g_j^{\overline{\alpha_1}\lambda_1}\cdots g_j^{\overline{\alpha_p}\lambda_p}g_j^{\overline{\mu_1}\beta_1}\cdots g_j^{\overline{\mu_q}\beta_q}\varphi_{j\,\lambda_1\ldots\lambda_p\overline{\mu_1}\ldots\overline{\mu_q}}}\\
&= \frac{1}{p!q!}\sum_{\alpha,\beta}(\bar{\partial}\psi)_{j\,\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}}\overline{\varphi_j^{\overline{\alpha_1}\ldots\overline{\alpha_p}\beta_1\ldots\beta_q}}.
\end{aligned}$$

Damit berechnen wir das Skalarprodukt mit partieller Integration:

$$\begin{aligned}
&\left\langle\psi,\bar{\partial}^*\varphi\right\rangle = \left\langle\bar{\partial}\psi,\varphi\right\rangle = \int_M \frac{1}{p!q!}\sum_{\alpha,\beta}(\bar{\partial}\psi)_{j\,\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}}\overline{\varphi_j^{\overline{\alpha_1}\ldots\overline{\alpha_p}\beta_1\ldots\beta_q}}2^n|g_j|dx_j^1\cdots dx_j^{2n}\\
&= (-1)^p\int_M \frac{1}{p!q!}\sum_{\alpha,\beta}\sum_{\nu=1}^{q}\left((-1)^{\nu+1}\right)^2\partial_{\overline{\beta_\nu}}\psi_{j\,\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\beta_1}\ldots\widehat{\overline{\beta_\nu}}\ldots\overline{\beta_q}}\overline{\varphi_j^{\overline{\alpha_1}\ldots\overline{\alpha_p}\beta_\nu\beta_1\ldots\widehat{\beta_\nu}\ldots\beta_q}}2^n|g_j|dx_j^1\cdots dx_j^{2n}\\
&= (-1)^p\int_M \frac{1}{p!(q-1)!}\sum_{\alpha,\beta}\partial_{\overline{\beta}}\psi_{j\,\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}}\overline{\varphi_j^{\overline{\alpha_1}\ldots\overline{\alpha_p}\beta\beta_1\ldots\beta_{q-1}}}2^n|g_j|dx_j^1\cdots dx_j^{2n}\\
&= (-1)^{p+1}\int_M \frac{1}{p!(q-1)!}\sum_{\alpha,\beta}\psi_{j\,\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}}\partial_{\overline{\beta}}\left(\overline{\varphi_j^{\overline{\alpha_1}\ldots\overline{\alpha_p}\beta\beta_1\ldots\beta_{q-1}}}|g_j|\right)2^n dx_j^1\cdots dx_j^{2n}\\
&= \int_M \frac{1}{p!(q-1)!}\sum_{\alpha,\beta}\psi_{j\,\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}}\overline{\sum_{\beta}(-1)^{p+1}\partial_\beta\left(\varphi_j^{\overline{\alpha_1}\ldots\overline{\alpha_p}\beta\beta_1\ldots\beta_{q-1}}|g_j|\right)\frac{1}{|g_j|}}2^n|g_j|dx_j^1\cdots dx_j^{2n}.
\end{aligned}$$

Da ψ beliebig war, erhalten wir lokal auf U_j die Formel

$$\begin{aligned}
(\bar{\partial}^*\varphi)_j^{\overline{\alpha_1}\ldots\overline{\alpha_p}\beta_1\ldots\beta_{q-1}} &= (-1)^{p+1}\sum_{\beta}\frac{1}{|g_j|}\partial_\beta\left(\varphi_j^{\overline{\alpha_1}\ldots\overline{\alpha_p}\beta\beta_1\ldots\beta_{q-1}}|g_j|\right)\\
&= (-1)^{p+1}\sum_{\beta}\left(\partial_\beta\varphi_j^{\overline{\alpha_1}\ldots\overline{\alpha_p}\beta\beta_1\ldots\beta_{q-1}} + \frac{1}{|g_j|}\left(\partial_\beta|g_j|\right)\varphi_j^{\overline{\alpha_1}\ldots\overline{\alpha_p}\beta\beta_1\ldots\beta_{q-1}}\right). \qquad (2.53)
\end{aligned}$$

Als nächstes berechnen wir:

$$\sum_\beta \nabla_\beta \varphi_j^{\overline{\alpha_1}\ldots\overline{\alpha_p}\beta\beta_1\ldots\beta_{q-1}} = \sum_\beta \partial_\beta \varphi_j^{\overline{\alpha_1}\ldots\overline{\alpha_p}\beta\beta_1\ldots\beta_{q-1}} + \sum_{\beta,\gamma} \Gamma^{\beta}_{j\,\beta\gamma} \varphi_j^{\overline{\alpha_1}\ldots\overline{\alpha_p}\gamma\beta_1\ldots\beta_{q-1}}$$
$$+ \sum_{\nu=1}^{q-1} \sum_{\beta,\gamma} \Gamma^{\beta_\nu}_{j\,\beta\gamma} \varphi_j^{\overline{\alpha_1}\ldots\overline{\alpha_p}\beta\beta_1\ldots\beta_{\nu-1}\gamma\beta_{\nu+1}\ldots\beta_{q-1}}.$$

Da eine Kählermannigfaltigkeit vorliegt, ist jeweils $\Gamma^{\beta_\nu}_{j\,\beta\gamma} = \Gamma^{\beta_\nu}_{j\,\gamma\beta}$. Andererseits sind die Koeffizienten von φ_j in der dritten Summe jeweils schiefsymmetrisch in den Indizes γ und β, so dass die dritte Summe insgesamt verschwindet. Wir erhalten also die Gleichung

$$\sum_\beta \nabla_\beta \varphi_j^{\overline{\alpha_1}\ldots\overline{\alpha_p}\beta\beta_1\ldots\beta_{q-1}} = \sum_\beta \partial_\beta \varphi_j^{\overline{\alpha_1}\ldots\overline{\alpha_p}\beta\beta_1\ldots\beta_{q-1}} + \sum_{\beta,\gamma} \Gamma^{\beta}_{j\,\beta\gamma} \varphi_j^{\overline{\alpha_1}\ldots\overline{\alpha_p}\gamma\beta_1\ldots\beta_{q-1}}.$$

Es genügt nun, die Identität $\sum_\beta \Gamma^{\beta}_{j\,\beta\gamma} = \frac{1}{|g_j|}\partial_\gamma\,|g_j|$ nachzuweisen, denn damit folgt aus (2.53)

$$\sum_\beta \nabla_\beta \varphi_j^{\overline{\alpha_1}\ldots\overline{\alpha_p}\beta\beta_1\ldots\beta_{q-1}} = \sum_\beta \partial_\beta \varphi_j^{\overline{\alpha_1}\ldots\overline{\alpha_p}\beta\beta_1\ldots\beta_{q-1}} + \sum_\gamma \frac{1}{|g_j|}\left(\partial_\gamma\,|g_j|\right) \varphi_j^{\overline{\alpha_1}\ldots\overline{\alpha_p}\gamma\beta_1\ldots\beta_{q-1}}$$
$$= \sum_\beta \left(\partial_\beta \varphi_j^{\overline{\alpha_1}\ldots\overline{\alpha_p}\beta\beta_1\ldots\beta_{q-1}} + \frac{1}{|g_j|}\left(\partial_\beta\,|g_j|\right) \varphi_j^{\overline{\alpha_1}\ldots\overline{\alpha_p}\beta\beta_1\ldots\beta_{q-1}} \right) = (-1)^{p+1}(\bar\partial^*\varphi)_j^{\overline{\alpha_1}\ldots\overline{\alpha_p}\beta_1\ldots\beta_{q-1}},$$

so dass wir schließlich, indem wir ausnutzen, dass die kovariante Ableitung mit dem Hoch- und Runterziehen von Indizes kommutiert und dass stets $\nabla_\gamma g_j^{\overline{\beta}\alpha} = 0$ gilt, erhalten:

$$(-1)^{p+1}(\bar\partial^*\varphi)_{j\,\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}} = \sum_\beta \nabla_\beta \varphi^{\beta}_{j\,\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}}$$
$$= \sum_\gamma \nabla_\gamma \sum_\beta g_j^{\overline{\beta}\gamma} \varphi_{j\,\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\beta}\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}} = \sum_{\beta,\gamma} g_j^{\overline{\beta}\gamma} \nabla_\gamma \varphi_{j\,\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\beta}\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}}.$$

Zum Nachweis der erforderlichen Gleichung berechnen wir vorab die Ableitung der Determinantenfunktion $\mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}$ in eine Koordinatenrichtung:

$$\frac{\partial \det}{\partial z_{ij}} = \frac{\partial}{\partial z_{ij}} \left(\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) z_{\sigma(1)1}\cdots z_{\sigma(n)n} \right) = \sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{S}_n\\ \sigma(j)=i}} \operatorname{sgn}(\sigma) z_{\sigma(1)1}\cdots \widehat{z_{\sigma(j)j}} \cdots z_{\sigma(n)n}.$$

Der Ausdruck, der sich bei dieser Rechnung ergeben hat, ist selbst eine Determinantenfunktion für Matrizen, deren j-te Spalte den i-ten Einheitsvektor enthält. Indem wir diese Funktion eingeschränkt auf die offene Menge $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}^{n\times n}$ durch die Determinante dividieren, sehen wir mit der Cramerschen Regel, dass für jede Matrix $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ stets gilt:

$$\frac{\partial \det}{\partial z_{ij}}(A) = \det(A)\cdot a^{ji}. \tag{2.54}$$

Damit berechnen wir, indem wir erneut ausnutzen, dass (M,g) eine Kählermannigfaltigkeit ist

$$\partial_\gamma |g_j| = \partial_\gamma \det(g_j) = \sum_{\beta,\nu} \frac{\partial \det}{\partial z_{\beta\nu}}(g_j) \frac{\partial g_{j\,\beta\overline{\nu}}}{\partial z_j^\gamma} = \sum_{\beta,\nu} |g_j| g_j^{\overline{\nu}\beta} \partial_\gamma g_{j\,\beta\overline{\nu}} = |g_j| \sum_\beta \Gamma^\beta_{j\,\gamma\beta} = |g_j| \sum_\beta \Gamma^\beta_{j\,\beta\gamma},$$

womit schließlich auch die Gleichung $\sum_\beta \Gamma^\beta_{j\,\beta\gamma} = \frac{1}{|g_j|}\partial_\gamma |g_j|$ nachgewiesen ist. □

Sei nun $\pi : F \to M$ ein holomorphes Vektorbündel vom Rang r auf der kompakten Kählermannigfaltigkeit (M,g) und h eine hermitesche Metrik auf F. Von der lokal endlichen offenen Überdeckung von M durch Koordinatenumgebungen (U_j, z_j) erwarten wir von nun an zusätzlich, dass F jeweils über U_j trivialisiert werden kann. Wie üblich bezeichnen wir die entsprechenden Transitionsfunktionen von F mit $f_{jk} : U_j \cap U_k \to \mathrm{GL}(r,\mathbb{C})$ und die Metrik h beschreiben wir lokal durch Funktionen $h_j : U_j \to \mathbb{C}^{r\times r}$. Sind nun zwei bündelwertige (p,q)-Formen $\varphi, \psi \in \Gamma\left(M, \mathcal{A}^{p,q}(F)\right)$ gegeben, welche wir lokal auf U_j durch $\varphi_j = (\varphi_j^1, \ldots, \varphi_j^r)^t$ beziehungsweise $\psi_j = (\psi_j^1, \ldots, \psi_j^r)^t$ mit

$$\varphi_j^l = \frac{1}{p!q!} \sum_{\alpha,\beta} \varphi^l_{j\,\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}} dz_j^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\alpha_p} \wedge dz_j^{\overline{\beta_1}} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\beta_q}}$$

respektive

$$\psi_j^l = \frac{1}{p!q!} \sum_{\alpha,\beta} \psi^l_{j\,\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}} dz_j^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\alpha_p} \wedge dz_j^{\overline{\beta_1}} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\beta_q}}$$

beschreiben, dann definieren wir eine glatte Funktion $(\varphi,\psi) \in \Gamma\left(M, \mathcal{A}(M)\right)$ lokal auf U_j durch

$$(\varphi,\psi)|_{U_j} = \sum_{\lambda,\mu} h_{j\,\lambda\overline{\mu}} (\varphi_j^\lambda, \psi_j^\mu), \tag{2.55}$$

wobei wir auf die frühere Definition (2.39) im Mannigfaltigkeitsfall zurückgegriffen haben. Wegen der Kompaktheit von M erhalten wir erneut ein hermitesches Skalarprodukt auf dem Raum $\Gamma\left(M, \mathcal{A}^{p,q}(F)\right)$, indem wir wie zuvor

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_M (\varphi,\psi) \frac{\omega^n}{n!} \tag{2.56}$$

definieren. Wir interessieren uns im Wesentlichen für die Hodge-Theorie des $\bar{\partial}$-Operators auf F und wollen zunächst den formal adjungierten Operator beschreiben. Zu diesem Zweck halten wir fest, dass sich der Hodge-Stern-Operator $*$ von (M,g) zu einem $\mathcal{A}(M)$-linearen Garbenhomomorphismus

$$* : \mathcal{A}^{p,q}(F) \longrightarrow \mathcal{A}^{n-q,n-p}(F) \tag{2.57}$$

fortsetzt. Zerlegen wir den Chern-Zusammenhang D der hermiteschen Metrik h auf F wie zuvor entlang der p-q-Zerlegung in $D = D' + D''$, dann erhalten wir insbesondere folgenden Garbenhomomorphismus:

$$D' : \mathcal{A}^{p,q}(F) \longrightarrow \mathcal{A}^{p+1,q}(F).$$

Bekanntlich ist nun der zu $\bar{\partial}$ bezüglich des eben erklärten Skalarproduktes formal adjungierte Operator durch

$$\bar{\partial}^* : \mathcal{A}^{p,q}(F) \longrightarrow \mathcal{A}^{p,q-1}(F) \quad \text{mit} \quad \bar{\partial}^* = - * D' * \tag{2.58}$$

gegeben, wobei wir festhalten, dass diese Abbildung sowohl von g als auch von h abhängt. Mit

$$\Box_{\bar{\partial}} : \mathcal{A}^{p,q}(F) \longrightarrow \mathcal{A}^{p,q}(F), \qquad \Box_{\bar{\partial}} = \bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial} \tag{2.59}$$

erhalten wir erneut den zugehörigen Laplace-Operator und entsprechend bezeichnen wir die harmonischen Formen mit Werten im Vektorbündel F mit

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^k(M, F, h) &= \{\varphi \in \Gamma(M, \mathcal{A}^k(F)) \,|\, \Box_{\bar{\partial}}\varphi = 0\}, \\ \mathcal{H}^{p,q}(M, F, h) &= \{\varphi \in \Gamma(M, \mathcal{A}^{p,q}(F)) \,|\, \Box_{\bar{\partial}}\varphi = 0\}. \end{aligned} \tag{2.60}$$

Mit diesen Begriffen überträgt sich die Hodge-Zerlegung aus Theorem 2.12 in folgender Gestalt auf den Fall von holomorphen Vektorbündeln:

Theorem 2.14 (Hodge-Zerlegung)**.** *Ist M eine kompakte, komplexe Mannigfaltigkeit mit hermitescher Metrik g und $\pi : F \to M$ ein holomorphes Vektorbündel mit hermitescher Metrik h, dann haben wir folgende Zerlegung, welche bezüglich des Skalarproduktes auf* $\Gamma(M, \mathcal{A}^{p,q}(F))$ *orthogonal ist:*

$$\Gamma(M, \mathcal{A}^{p,q}(F)) = \bar{\partial}\,\Gamma\left(M, \mathcal{A}^{p,q-1}(F)\right) \oplus \mathcal{H}^{p,q}(M, F, h) \oplus \bar{\partial}^*\,\Gamma\left(M, \mathcal{A}^{p,q+1}(F)\right).$$

Ferner ist der komplexe Vektorraum $\mathcal{H}^{p,q}(M, F, h)$ endlichdimensional.

Wir erhalten analog zum Mannigfaltigkeitsfall wieder einen Isomorphismus

$$\mathcal{H}^{p,q}(M, F, h) \longrightarrow H^q(M, \Omega^p(F)), \tag{2.61}$$

indem wir eine harmonische (p, q)-Form mit Werten im Bündel F auf ihre Dolbeault-Kohomologieklasse abbilden. Des Weiteren notieren wir, dass es eine orthogonale Projektion

$$H : \Gamma(M, \mathcal{A}^{p,q}(F)) \longrightarrow \mathcal{H}^{p,q}(M, F, h) \tag{2.62}$$

gibt, welche wir als harmonische Projektion bezeichnen, sowie einen Green-Operator

$$G : \Gamma(M, \mathcal{A}^{p,q}(F)) \longrightarrow \Gamma(M, \mathcal{A}^{p,q}(F)), \tag{2.63}$$

welcher eindeutig durch folgende Eigenschaften bestimmt ist:

(i) Der Green-Operator verschwindet auf den harmonischen Formen: $G|_{\mathcal{H}^{p,q}(M,F,h)} \equiv 0$.

(ii) Der Green-Operator G kommutiert sowohl mit dem Ableitungsoperator $\bar{\partial}$ als auch mit dessen formal adjungiertem Operator $\bar{\partial}^*$.

(iii) Die harmonische Projektion und der Green-Operator genügen für alle Differentialformen aus $\Gamma(M, \mathcal{A}^{p,q}(F))$ der Identität $H + \Box_{\bar{\partial}} \circ G = \mathrm{id}$.

Abschließend leiten wir in Analogie zum Mannigfaltigkeitsfall aus Satz 2.13 für die Situation eines holomorphen Vektorbündels auf einer kompakten Kählermannigfaltigkeit die für unsere späteren Rechnungen besonders wichtige lokale Formel zur Berechnung des $\bar{\partial}^*$-Operators her. Wir weisen darauf hin, dass auch in diesem Beweis wesentlich von der Kählerbedingung Gebrauch gemacht wird.

Satz 2.15. *Sei (M, g) eine kompakte Kählermannigfaltigkeit, $\pi : F \to M$ ein holomorphes Vektorbündel vom Rang r mit hermitescher Metrik h und $\varphi \in \Gamma(M, \mathcal{A}^{p,q}(F))$ eine (p,q)-Form, welche lokal bezüglich einer lokal endlichen offenen Überdeckung von M durch Koordinatenumgebungen (U_j, z_j), über denen F trivialisiert werden kann, als $\varphi_j = (\varphi_j^1, \ldots, \varphi_j^r)^t$ mit*

$$\varphi_j^l = \frac{1}{p!q!} \sum_{\alpha,\beta} \varphi^l_{j\,\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}}\, dz_j^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\alpha_p} \wedge dz_j^{\overline{\beta_1}} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\beta_q}}$$

geschrieben wird. Dann sind die schiefsymmetrischen Koeffizienten von $\bar{\partial}^*\varphi \in \Gamma\left(M, \mathcal{A}^{p,q-1}(F)\right)$ aus der lokalen Darstellung $(\bar{\partial}^*\varphi)_j = ((\bar{\partial}^*\varphi)_j^1, \ldots, (\bar{\partial}^*\varphi)_j^r)^t$ über U_j mit

$$(\bar{\partial}^*\varphi)_j^l = \frac{1}{p!(q-1)!} \sum_{\alpha,\beta} (\bar{\partial}^*\varphi)^l_{j\,\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}}\, dz_j^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\alpha_p} \wedge dz_j^{\overline{\beta_1}} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\beta_{q-1}}}$$

gegeben durch

$$(\bar{\partial}^*\varphi)^l_{j\,\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}} = -(-1)^p \sum_{\beta,\gamma} g_j^{\overline{\beta}\gamma} \left(\nabla_\gamma \varphi^l_{j\,\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\beta}\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}} + \sum_\nu \Gamma^l_{jF\,\gamma\nu} \varphi^\nu_{j\,\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\beta}\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}} \right).$$

Beweis. Wir orientieren uns erneut an [MK71] und wählen daher zunächst eine beliebige Form $\psi \in \Gamma\left(M, \mathcal{A}^{p,q-1}(F)\right)$. Auf den U_j definieren wir durch $\tau_j = \sum_{\lambda,\mu} h_{j\,\lambda\overline{\mu}} \psi_j^\lambda \wedge *\overline{\varphi_j^\mu}$ Schnitte $\tau_j \in \Gamma\left(U_j, \mathcal{A}^{n,n-1}(M)\right)$, welche zu einer globalen $(n, n-1)$-Form $\tau \in \Gamma\left(M, \mathcal{A}^{n,n-1}(M)\right)$ Anlass geben. Es ist also $d\tau$ eine (n,n)-Form, welche wir integrieren können. Wir berechnen lokal

$$\begin{aligned}
\left(\bar{\partial}\tau\right)_j &= \sum_{\lambda,\mu} h_{j\,\lambda\overline{\mu}} \left(\bar{\partial}\psi_j^\lambda\right) \wedge *\overline{\varphi_j^\mu} + (-1)^{p+q-1} \sum_{\lambda,\mu} \psi_j^\lambda \wedge \bar{\partial}\left(h_{j\,\lambda\overline{\mu}} * \overline{\varphi_j^\mu}\right) \\
&= \sum_{\lambda,\mu} h_{j\,\lambda\overline{\mu}} \left(\bar{\partial}\psi_j^\lambda, \varphi_j^\mu\right) \left(\frac{\omega^n}{n!}\right)_j + (-1)^{p+q-1} \sum_{\lambda,\mu} \psi_j^\lambda \wedge \bar{\partial}\left(h_{j\,\lambda\overline{\mu}} * \overline{\varphi_j^\mu}\right)
\end{aligned}$$

und erhalten hieraus mit dem Satz von Stokes aus Gradgründen die Gleichung

$$0 = \int_M d\tau = \int_M \left(\partial + \bar{\partial}\right)\tau = \int_M \bar{\partial}\tau = \int_M (\bar{\partial}\psi, \varphi)\frac{\omega^n}{n!} + (-1)^{p+q-1} \int_M \sum_{\lambda,\mu} \psi_j^\lambda \wedge \bar{\partial}\left(h_{j\,\lambda\overline{\mu}} * \overline{\varphi_j^\mu}\right).$$

Wir haben also folgendes Zwischenresultat für die beliebige $(p, q-1)$-Form ψ gezeigt:

$$\left\langle \psi, \bar{\partial}^*\varphi \right\rangle = \left\langle \bar{\partial}\psi, \varphi \right\rangle = \int_M (\bar{\partial}\psi, \varphi)\frac{\omega^n}{n!} = -(-1)^{p+q-1} \int_M \sum_{\lambda,\mu} \psi_j^\lambda \wedge \bar{\partial}\left(h_{j\,\lambda\overline{\mu}} * \overline{\varphi_j^\mu}\right).$$

Nun rechnen wir weiter unter Ausnutzung, dass $*$ ein reeller Operator ist, und indem wir eine Identität ergänzen:

$$\begin{aligned}
&-(-1)^{p+q-1}\sum_{\lambda,\mu}\psi_j^\lambda \wedge \bar{\partial}\left(h_{j\,\lambda\bar{\mu}} * \overline{\varphi_j^\mu}\right) = -(-1)^{p+q-1}\sum_{\lambda,\mu}\psi_j^\lambda \wedge \overline{\partial\left(h_{j\,\mu\bar{\lambda}} * \varphi_j^\mu\right)}\\
&\quad= -(-1)^{p+q-1}\sum_{\lambda}\psi_j^\lambda \wedge \left(\sum_{\tau,\nu} h_{j\,\lambda\bar{\nu}} h_j^{\bar{\nu}\tau}\overline{\sum_\mu \partial\left(h_{j\,\mu\bar{\tau}} * \varphi_j^\mu\right)}\right)\\
&\quad= -(-1)^{p+q-1}\sum_{\lambda,\nu} h_{j\,\lambda\bar{\nu}}\psi_j^\lambda \wedge \overline{\left(\sum_\tau h_j^{\bar{\tau}\nu}\sum_\mu \partial\left(h_{j\,\mu\bar{\tau}} * \varphi_j^\mu\right)\right)}.
\end{aligned}$$

Als nächstes wollen wir einen $**$-Operator ergänzen und überlegen uns zu diesem Zweck, dass die gequerte Form in obigem Term insgesamt eine $(n-p, n-q+1)$-Form ist. Damit können wir weiter umformen:

$$\begin{aligned}
&-(-1)^{p+q-1}\sum_{\lambda,\nu} h_{j\,\lambda\bar{\nu}}\psi_j^\lambda \wedge \overline{\left(\sum_\tau h_j^{\bar{\tau}\nu}\sum_\mu \partial\left(h_{j\,\mu\bar{\tau}} * \varphi_j^\mu\right)\right)}\\
&\quad= -(-1)^{p+q-1+n-p+n-q+1}\sum_{\lambda,\nu} h_{j\,\lambda\bar{\nu}}\psi_j^\lambda \wedge *\overline{\left(*\sum_\tau h_j^{\bar{\tau}\nu}\sum_\mu \partial\left(h_{j\,\mu\bar{\tau}} * \varphi_j^\mu\right)\right)}\\
&\quad= \sum_{\lambda,\nu} h_{j\,\lambda\bar{\nu}}\psi_j^\lambda \wedge *\overline{\left(-\sum_\tau h_j^{\bar{\tau}\nu}\sum_\mu *\partial\left(h_{j\,\mu\bar{\tau}} * \varphi_j^\mu\right)\right)}.
\end{aligned}$$

Da wir nun für alle $(p, q-1)$-Fomen ψ die Gleichung

$$\left\langle \psi, \bar{\partial}^*\varphi\right\rangle = \int_M \sum_{\lambda,\nu} h_{j\,\lambda\bar{\nu}}\psi_j^\lambda \wedge *\overline{\left(-\sum_\tau h_j^{\bar{\tau}\nu}\sum_\mu *\partial\left(h_{j\,\mu\bar{\tau}} * \varphi_j^\mu\right)\right)}$$

nachgewiesen haben, folgt lokal auf U_j:

$$\begin{aligned}
\left(\bar{\partial}^*\varphi\right)_j^\nu &= -\sum_\tau h_j^{\bar{\tau}\nu}\sum_\mu *\partial\left(h_{j\,\mu\bar{\tau}} * \varphi_j^\mu\right) = -\sum_\tau h_j^{\bar{\tau}\nu}\sum_\mu *\left((\partial h_{j\,\mu\bar{\tau}}) \wedge *\varphi_j^\mu + h_{j\,\mu\bar{\tau}}\partial * \varphi_j^\mu\right)\\
&= -\sum_\tau h_j^{\bar{\tau}\nu}\sum_\mu h_{j\,\mu\bar{\tau}} * \partial * \varphi_j^\mu - \sum_\tau h_j^{\bar{\tau}\nu}\sum_\mu *\left((\partial h_{j\,\mu\bar{\tau}}) \wedge *\varphi_j^\mu\right)\\
&= - * \partial * \varphi_j^\nu - \sum_\tau h_j^{\bar{\tau}\nu}\sum_\mu *\left(\left(\sum_\alpha \partial_\alpha h_{j\,\mu\bar{\tau}} dz_j^\alpha\right) \wedge *\varphi_j^\mu\right).
\end{aligned}$$

Wir behaupten, dass es damit genügt, für eine beliebige (p,q)-Form

$$\xi_j = \frac{1}{p!q!}\sum_{\alpha,\beta}\xi_{j\,\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}} dz_j^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\alpha_p} \wedge d\overline{z_j^{\beta_1}} \wedge \ldots \wedge d\overline{z_j^{\beta_q}}$$

sowie beliebige Funktionen c_α auf U_j die Gleichung

$$*\left(\left(\sum_\alpha c_\alpha dz_j^\alpha\right)\wedge *\xi_j\right) = (-1)^p\frac{1}{p!(q-1)!}\sum_{\alpha,\beta}\left(\sum_{\gamma,\mu} g_j^{\overline{\gamma}\mu}c_\mu \xi_{j\,\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\gamma}\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}}\right)dz_j^{\alpha_1}\wedge\ldots\wedge dz_j^{\overline{\beta_{q-1}}}$$

nachzuweisen, denn dann folgt mit Satz 2.13 über $\bar{\partial}^*$ auf Mannigfaltigkeiten die Behauptung:

$$\begin{aligned}
\left(\bar{\partial}^*\varphi\right)_j^\nu &= -(-1)^p\frac{1}{p!(q-1)!}\sum_{\alpha,\beta}\sum_{\gamma,\rho} g_j^{\overline{\gamma}\rho}\nabla_\rho\varphi^\nu_{j\,\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\gamma}\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}}dz_j^{\alpha_1}\wedge\ldots\wedge dz_j^{\overline{\beta_{q-1}}}\\
&\quad -(-1)^p\frac{1}{p!(q-1)!}\sum_{\alpha,\beta}\left(\sum_\tau h_j^{\overline{\tau}\nu}\sum_\mu\sum_{\gamma,\rho} g_j^{\overline{\gamma}\rho}\partial_\rho h_{j\,\mu\overline{\tau}}\varphi^\mu_{j\,\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\gamma}\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}}\right)dz_j^{\alpha_1}\wedge\ldots\wedge dz_j^{\overline{\beta_{q-1}}}\\
&= -(-1)^p\frac{1}{p!(q-1)!}\sum_{\alpha,\beta}\sum_{\gamma,\rho} g_j^{\overline{\gamma}\rho}\left(\nabla_\rho\varphi^\nu_{j\,\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\gamma}\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}}+\sum_\mu\sum_\tau h_j^{\overline{\tau}\nu}\partial_\rho h_{j\,\mu\overline{\tau}}\varphi^\mu_{j\,\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\gamma}\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}}\right)\\
&\qquad dz_j^{\alpha_1}\wedge\ldots\wedge dz_j^{\alpha_p}\wedge dz_j^{\overline{\beta_1}}\wedge\ldots\wedge dz_j^{\overline{\beta_{q-1}}}\\
&= -(-1)^p\frac{1}{p!(q-1)!}\sum_{\alpha,\beta}\sum_{\gamma,\rho} g_j^{\overline{\gamma}\rho}\left(\nabla_\rho\varphi^\nu_{j\,\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\gamma}\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}}+\sum_\mu \Gamma^\nu_{jF\,\rho\mu}\varphi^\mu_{j\,\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\gamma}\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}}\right)\\
&\qquad dz_j^{\alpha_1}\wedge\ldots\wedge dz_j^{\alpha_p}\wedge dz_j^{\overline{\beta_1}}\wedge\ldots\wedge dz_j^{\overline{\beta_{q-1}}}.
\end{aligned}$$

Den Nachweis obiger Gleichung tragen wir mit folgendem Lemma gesondert nach. □

Lemma 2.16. *Es sei (M,g) eine kompakte Kählermannigfaltigkeit und auf einer Koordinatenumgebung (U_j,z_j) von M seien Formen*

$$\varphi = \frac{1}{p!q!}\sum_{\alpha,\beta}\varphi_{\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}}dz_j^{\alpha_1}\wedge\ldots\wedge dz_j^{\alpha_p}\wedge dz_j^{\overline{\beta_1}}\wedge\ldots\wedge dz_j^{\overline{\beta_q}}\quad \textit{sowie}\quad \psi=\sum_\alpha \psi_\alpha dz_j^\alpha$$

gegeben. Dann gilt die Gleichung

$$*(\psi\wedge *\varphi) = (-1)^p\frac{1}{p!(q-1)!}\sum_{\alpha,\beta}\left(\sum_{\gamma,\mu} g_j^{\overline{\gamma}\mu}\psi_\mu\varphi_{\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\gamma}\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}}\right)dz_j^{\alpha_1}\wedge\ldots\wedge dz_j^{\alpha_p}\wedge dz_j^{\overline{\beta_1}}\wedge\ldots\wedge dz_j^{\overline{\beta_{q-1}}}.$$

Beweis. Zunächst haben wir für $*\varphi$ die lokale Gestalt

$$*\varphi = \frac{1}{(n-q)!(n-p)!}\sum_{\alpha,\beta}(*\varphi)_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-q}\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{n-p}}}dz_j^{\alpha_1}\wedge\ldots\wedge dz_j^{\alpha_{n-q}}\wedge dz_j^{\overline{\beta_1}}\wedge\ldots\wedge dz_j^{\overline{\beta_{n-p}}},$$

wobei die schiefsymmetrischen Koeffizienten gemäß (2.46) gerade durch

$$\left(\sqrt{-1}\right)^n(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}+pn}\frac{|g_j|}{p!q!}\sum_{\gamma,\eta,\lambda,\mu}\varepsilon_{\gamma_1\ldots\gamma_q\alpha_1\ldots\alpha_{n-q}}\varepsilon_{\overline{\eta_1}\ldots\overline{\eta_p}\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{n-p}}}g_j^{\overline{\eta_1}\lambda_1}\cdots g_j^{\overline{\eta_p}\lambda_p}g_j^{\overline{\mu_1}\gamma_1}\cdots g_j^{\overline{\mu_q}\gamma_q}\varphi_{\lambda_1\ldots\overline{\mu_q}}$$

gegeben sind. Damit berechnen wir

$$\psi \wedge *\varphi = \frac{1}{(n-q+1)!(n-p)!} \sum_{\alpha,\beta} \sum_{\nu=1}^{n-q+1} (-1)^{\nu+1} \psi_{\alpha_\nu} (*\varphi)_{\alpha_1 \ldots \widehat{\alpha_\nu} \ldots \alpha_{n-q+1} \overline{\beta_1} \ldots \overline{\beta_{n-p}}}$$
$$dz_j^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\alpha_{n-q+1}} \wedge dz_j^{\overline{\beta_1}} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\beta_{n-p}}}.$$

Mit $\tau = \psi \wedge *\varphi$ erhalten wir also für die schiefsymmetrischen Koeffizienten von τ

$$\tau_{\alpha_1 \ldots \alpha_{n-q+1} \overline{\beta_1} \ldots \overline{\beta_{n-p}}} = \left(\sqrt{-1}\right)^n (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}+pn} \frac{|g_j|}{p!q!} \sum_{\nu=1}^{n-q+1} (-1)^{\nu+1} \psi_{\alpha_\nu} \cdot$$
$$\cdot \sum_{\gamma,\eta,\lambda,\mu} \varepsilon_{\gamma_1 \ldots \gamma_q \alpha_1 \ldots \widehat{\alpha_\nu} \ldots \alpha_{n-q+1}} \varepsilon_{\overline{\eta_1} \ldots \overline{\eta_p} \overline{\beta_1} \ldots \overline{\beta_{n-p}}} g_j^{\overline{\eta_1}\lambda_1} \cdots g_j^{\overline{\eta_p}\lambda_p} g_j^{\overline{\mu_1}\gamma_1} \cdots g_j^{\overline{\mu_q}\gamma_q} \varphi_{\lambda_1 \ldots \lambda_p \overline{\mu_1} \ldots \overline{\mu_q}}.$$

Mit dieser Vorbereitung können wir $*\tau = *(\psi \wedge *\varphi)$ ausrechnen. Zunächst ist

$$*\tau = \frac{1}{p!(q-1)!} \sum_{\alpha,\beta} (*\tau)_{\alpha_1 \ldots \alpha_p \overline{\beta_1} \ldots \overline{\beta_{q-1}}} dz_j^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\alpha_p} \wedge dz_j^{\overline{\beta_1}} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\beta_{q-1}}}$$

und für die schiefsymmetrischen Koeffizienten finden wir:

$$(*\tau)_{\alpha_1 \ldots \alpha_p \overline{\beta_1} \ldots \overline{\beta_{q-1}}} = \left(\sqrt{-1}\right)^n (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}+n(n-q+1)} \frac{|g_j|}{(n-q+1)!(n-p)!} \sum_{\tau,\theta,\omega,\chi} \cdot$$
$$\cdot\, \varepsilon_{\tau_1 \ldots \tau_{n-p} \alpha_1 \ldots \alpha_p} \varepsilon_{\overline{\theta_1} \ldots \overline{\theta_{n-q+1}} \overline{\beta_1} \ldots \overline{\beta_{q-1}}} g_j^{\overline{\theta_1}\omega_1} \cdots g_j^{\overline{\theta_{n-q+1}}\omega_{n-q+1}} g_j^{\overline{\chi_1}\tau_1} \cdots g_j^{\overline{\chi_{n-p}}\tau_{n-p}} \tau_{\omega_1 \ldots \omega_{n-q+1} \overline{\chi_1} \ldots \overline{\chi_{n-p}}}$$
$$= \left(\sqrt{-1}\right)^n (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}+n(n-q+1)} \frac{|g_j|}{(n-q+1)!(n-p)!} \left(\sqrt{-1}\right)^n (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}+pn} \frac{|g_j|}{p!q!} \cdot$$
$$\cdot \sum_{\tau,\theta,\omega,\chi} \varepsilon_{\tau_1 \ldots \tau_{n-p} \alpha_1 \ldots \alpha_p} \varepsilon_{\overline{\theta_1} \ldots \overline{\theta_{n-q+1}} \overline{\beta_1} \ldots \overline{\beta_{q-1}}} g_j^{\overline{\theta_1}\omega_1} \cdots g_j^{\overline{\theta_{n-q+1}}\omega_{n-q+1}} g_j^{\overline{\chi_1}\tau_1} \cdots g_j^{\overline{\chi_{n-p}}\tau_{n-p}} \sum_{\nu=1}^{n-q+1} (-1)^{\nu+1} \cdot$$
$$\cdot\, \psi_{\omega_\nu} \sum_{\gamma,\eta,\lambda,\mu} \varepsilon_{\gamma_1 \ldots \gamma_q \omega_1 \ldots \widehat{\omega_\nu} \ldots \omega_{n-q+1}} \varepsilon_{\overline{\eta_1} \ldots \overline{\eta_p} \overline{\chi_1} \ldots \overline{\chi_{n-p}}} g_j^{\overline{\eta_1}\lambda_1} \cdots g_j^{\overline{\eta_p}\lambda_p} g_j^{\overline{\mu_1}\gamma_1} \cdots g_j^{\overline{\mu_q}\gamma_q} \varphi_{\lambda_1 \ldots \lambda_p \overline{\mu_1} \ldots \overline{\mu_q}}.$$

Wir nennen den Vorfaktor R und nutzen aus, dass wir mit $\varepsilon_{\overline{\eta_1} \ldots \overline{\eta_p} \overline{\chi_1} \ldots \overline{\chi_{n-p}}}$ bis auf eine Permutation eine Determinante $|g_j|^{-1}$ in obigem Ausdruck erhalten, um diesen zu vereinfachen:

$$R \frac{1}{|g_j|} \sum_{\tau,\theta,\omega} \varepsilon_{\tau_1 \ldots \tau_{n-p} \alpha_1 \ldots \alpha_p} \varepsilon_{\overline{\theta_1} \ldots \overline{\theta_{n-q+1}} \overline{\beta_1} \ldots \overline{\beta_{q-1}}} g_j^{\overline{\theta_1}\omega_1} \cdots g_j^{\overline{\theta_{n-q+1}}\omega_{n-q+1}} \sum_{\nu=1}^{n-q+1} (-1)^{\nu+1} \cdot$$
$$\cdot\, \psi_{\omega_\nu} \sum_{\gamma,\lambda,\mu} \varepsilon_{\gamma_1 \ldots \gamma_q \omega_1 \ldots \widehat{\omega_\nu} \ldots \omega_{n-q+1}} \varepsilon_{\lambda_1 \ldots \lambda_p \tau_1 \ldots \tau_{n-p}} g_j^{\overline{\mu_1}\gamma_1} \cdots g_j^{\overline{\mu_q}\gamma_q} \varphi_{\lambda_1 \ldots \lambda_p \overline{\mu_1} \ldots \overline{\mu_q}}.$$

Das bei dieser Umformung neu entstandene Levi-Civita-Symbol permutieren wir nun, so dass wir es in Verbindung mit dem bereits vorhandenen $\varepsilon_{\tau_1 \ldots \tau_{n-p} \alpha_1 \ldots \alpha_p}$ dazu nutzen können, die Indizes λ

mit den α zu identifizieren. Dies liefert einen zusätzlichen Faktor $p!$ und vereinfacht den Ausdruck weiter zu

$$R\frac{p!}{|g_j|}(-1)^{p(n-p)}\sum_{\tau,\theta,\omega}\varepsilon_{\tau_1\ldots\tau_{n-p}\alpha_1\ldots\alpha_p}\varepsilon_{\overline{\theta_1}\ldots\overline{\theta_{n-q+1}\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}}g_j^{\overline{\theta_1}\omega_1}\cdots g_j^{\overline{\theta_{n-q+1}}\omega_{n-q+1}}\sum_{\nu=1}^{n-q+1}(-1)^{\nu+1}\cdot$$
$$\cdot\,\psi_{\omega_\nu}\sum_{\gamma,\mu}\varepsilon_{\gamma_1\ldots\gamma_q\omega_1\ldots\widehat{\omega_\nu}\ldots\omega_{n-q+1}}\varepsilon_{\tau_1\ldots\tau_{n-p}\alpha_1\ldots\alpha_p}g_j^{\overline{\mu_1}\gamma_1}\cdots g_j^{\overline{\mu_q}\gamma_q}\varphi_{\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\mu_1}\ldots\overline{\mu_q}}.$$

Die beiden doppelten Levi-Civita-Symbole können nun wegfallen, wodurch auch die Summation über τ unnötig wird, was einen weiteren Faktor $(n-p)!$ ergibt:

$$R\frac{(n-p)!p!}{|g_j|}(-1)^{p(n-p)}\sum_{\theta,\omega,\gamma,\mu}\sum_{\nu=1}^{n-q+1}(-1)^{\nu+1}\varepsilon_{\overline{\theta_1}\ldots\overline{\theta_{n-q+1}\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}}\varepsilon_{\gamma_1\ldots\gamma_q\omega_1\ldots\widehat{\omega_\nu}\ldots\omega_{n-q+1}}\cdot$$
$$\cdot\,g_j^{\overline{\theta_1}\omega_1}\cdots g_j^{\overline{\theta_{n-q+1}}\omega_{n-q+1}}g_j^{\overline{\mu_1}\gamma_1}\cdots g_j^{\overline{\mu_q}\gamma_q}\psi_{\omega_\nu}\varphi_{\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\mu_1}\ldots\overline{\mu_q}}.$$

Wir isolieren $\overline{\theta_\nu}$ und erhalten

$$R\frac{(n-p)!p!}{|g_j|}(-1)^{p(n-p)}\sum_{\theta,\omega,\gamma,\mu}\sum_{\nu=1}^{n-q+1}\varepsilon_{\overline{\theta_\nu\theta_1}\ldots\widehat{\overline{\theta_\nu}}\ldots\overline{\theta_{n-q+1}\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}}\varepsilon_{\gamma_1\ldots\gamma_q\omega_1\ldots\widehat{\omega_\nu}\ldots\omega_{n-q+1}}\cdot$$
$$\cdot\,g_j^{\overline{\theta_\nu}\omega_\nu}g_j^{\overline{\theta_1}\omega_1}\cdots\widehat{g_j^{\overline{\theta_\nu}\omega_\nu}}\cdots g_j^{\overline{\theta_{n-q+1}}\omega_{n-q+1}}g_j^{\overline{\mu_1}\gamma_1}\cdots g_j^{\overline{\mu_q}\gamma_q}\psi_{\omega_\nu}\varphi_{\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\mu_1}\ldots\overline{\mu_q}}.$$

Nun benennen wir $\overline{\theta_\nu}$ und ω_ν um und lassen die Summe über ν fort, so dass folgt:

$$R\frac{(n-p)!p!}{|g_j|}(-1)^{p(n-p)}(n-q+1)\sum_{\theta,\omega,\gamma,\mu,\rho,\sigma}\varepsilon_{\overline{\rho}\overline{\theta_1}\ldots\overline{\theta_{n-q}\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}}\varepsilon_{\gamma_1\ldots\gamma_q\omega_1\ldots\omega_{n-q}}\cdot$$
$$\cdot\,g_j^{\overline{\rho}\sigma}g_j^{\overline{\theta_1}\omega_1}\cdots g_j^{\overline{\theta_{n-q}}\omega_{n-q}}g_j^{\overline{\mu_1}\gamma_1}\cdots g_j^{\overline{\mu_q}\gamma_q}\psi_\sigma\varphi_{\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\mu_1}\ldots\overline{\mu_q}}.$$

Das Levi-Civita-Symbol $\varepsilon_{\gamma_1\ldots\gamma_q\omega_1\ldots\omega_{n-q}}$ ergibt nach einer Permutation erneut eine Determinante und indem wir auch das verbleibende Levi-Civita-Symbol permutieren, erhalten wir

$$R\frac{(n-p)!p!}{|g_j|}(-1)^{p(n-p)}(-1)^{n-q}(-1)^{q(n-q)}\frac{(n-q+1)}{|g_j|}\cdot$$
$$\cdot\sum_{\theta,\mu,\rho,\sigma}\varepsilon_{\overline{\theta_1}\ldots\overline{\theta_{n-q}}\overline{\rho}\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}}\varepsilon_{\overline{\theta_1}\ldots\overline{\theta_{n-q}}\overline{\mu_1}\ldots\overline{\mu_q}}g_j^{\overline{\rho}\sigma}\psi_\sigma\varphi_{\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\mu_1}\ldots\overline{\mu_q}}.$$

Die verbliebenen Levi-Civita-Symbole nutzen wir noch einmal zur Identifikation der μ:

$$R\frac{(n-p)!p!}{|g_j|}(-1)^{p(n-p)}(-1)^{n-q}(-1)^{q(n-q)}\frac{(n-q+1)!q!}{|g_j|}\sum_{\rho,\sigma}g_j^{\overline{\rho}\sigma}\psi_\sigma\varphi_{\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\rho}\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}}.$$

Rechnet man noch den entstandenen Vorfaktor aus, so ergibt sich gerade $(-1)^p$. □

2.5. Stabilität und Hermite-Einstein-Metriken

Wir fixieren eine kompakte, komplexe Mannigfaltigkeit X. Möchte man alle holomorphen Vektorbündel auf X bis auf Isomorphie klassifizieren, so stellt man zunächst fest, dass es wie im klassischen Fall der Klassifikation Riemannscher Flächen in der Teichmüllertheorie holomorphe Familien von Vektorbündeln gibt, d.h. Familien in denen die einzelnen Bündel holomorph von einem Parameter abhängen. Um dies zu präzisieren definieren wir:

Definition 2.17. Ist X eine kompakte, komplexe Mannigfaltigkeit, dann verstehen wir unter einer *Familie holomorpher Vektorbündel* auf X, parametrisiert durch einen komplexen Raum S, ein holomorphes Vektorbündel $F \to X \times S$. Für jeden Punkt $s \in S$ ist dann der Pullback $F_s := \iota_s^* F$ von F unter der Abbildung $\iota_s : X \to X \times S$, welche $x \in X$ auf (x, s) abbildet, ein holomorphes Vektorbündel auf X, die *Faser* F_s über dem Punkt s.

Die Menge aller Isomorphieklassen holomorpher Vektorbündel auf X sei von nun an mit $\mathcal{M}$ bezeichnet. Die Existenz holomorpher Familien zeigt, dass die Untersuchung dieser Menge $\mathcal{M}$ auf ein Modulproblem führt: Die Menge $\mathcal{M}$ muss mit einer geeigneten Struktur, beispielsweise der eines komplexen Raums, ausgestattet werden, so dass die Struktur von Familien holomorpher Vektorbündel in einem geeigneten Sinne berücksichtigt wird.

Dazu wollen wir zunächst kurz daran erinnern, wie das entsprechende Modulproblem formuliert werden muss (vergleiche [Ne78] für einen Überblick). Ist ein Morphismus $f : S' \to S$ komplexer Räume gegeben, dann definiert man die induzierte Familie f^*F, welche durch S' parametrisiert wird, als Pullback von F unter $(\mathrm{id}_X \times f)$. Um nun ein wohlformuliertes Modulproblem zu erhalten, ist nur noch die Definition einer Äquivalenzrelation für Familien erforderlich. Diese ist so zu wählen, dass die Vektorbündelisomorphie, welche die betrachtete Äquivalenzrelation auf den einzelnen Vektorbündeln ist, wiedergewonnen wird, sobald ein einelementiger Parameterraum vorliegt. Man erklärt für einen gegebenen komplexen Raum S zwei holomorphe Familien $F_1 \to X \times S$ und $F_2 \to X \times S$ als äquivalent, falls für irgendein holomorphes Geradenbündel $E \to S$ die Isomorphie

$$F_1 \simeq F_2 \otimes p_S^*(E) \tag{2.64}$$

im Sinne von Vektorbündeln über $X \times S$ gilt, wobei $p_S : X \times S \to S$ die Projektion auf den zweiten Faktor ist. Wir erinnern an dieser Stelle kurz daran, warum die naheliegende Äquivalenzrelation der Isomorphie von F_1 und F_2 als Vektorbündel über $X \times S$ ungeeignet ist und betrachten den diesem Modulproblem zugeordneten kontravarianten Familienfunktor $\mathcal{F}$ der Kategorie der komplexen Räume in die Kategorie der Mengen, welcher einem komplexen Raum S die Menge $\mathcal{F}(S)$ der Äquivalenzklassen von Familien parametrisiert durch S zuordnet und einem Morphismus $f : S' \to S$ den Pullback $[(\mathrm{id}_X \times f)^*]$. Nehmen wir an, $\mathcal{M}$ wäre in diesem Fall mit der Struktur eines komplexen Raums ausgestattet ein feiner Modulraum zum vorgelegten Modulproblem. Dann wäre die natürliche Transformation $\Phi : \mathcal{F} \to \mathrm{Hom}(\,\cdot\,, \mathcal{M})$, welche wir erhalten, indem wir für einen komplexen Raum S einer Äquivalenzklasse $[F \to X \times S]$ von Familien den Morphismus

$$\nu_{[F \to X \times S]} : S \to \mathcal{M}, \qquad \nu_{[F \to X \times S]}(s) = [F_s] \tag{2.65}$$

zuordnen, ein Isomorphismus von Funktoren. Insbesondere wären also die Abbildungen $[F \to X \times S] \mapsto \nu_{[F \to X \times S]}$ bijektiv. Wählen wir jedoch einen komplexen Raum S mit einem nicht-trivialen holomorphen Geradenbündel $E \to S$ und betrachten eine Familie $F \to X \times S$, dann können wir die offenbar nicht äquivalente Familie $F \otimes p_S^*(E) \to X \times S$ bilden. Da aber offenbar für jeden Punkt $s \in S$ ein Isomorphismus

$$F_s \simeq (F \otimes p_S^*(E))_s$$

vorliegt, folgt für die induzierten Morphismen $\nu_{[F \to X \times S]} = \nu_{[F \otimes p_S^*(E) \to X \times S]}$, was der Bijektivität widerspricht.

Um das eben formulierte Modulproblem zu lösen, muss man zunächst diskrete Invarianten wie etwa den Rang r und den Grad d der betrachteten Vektorbündel festhalten. Man betrachtet also die Teilmengen $\mathcal{M}_{r,d} \subset \mathcal{M}$ der Isomorphieklassen von Vektorbündeln mit festem Rang r und Grad d. In der einfachsten Situation ist das Modulproblem dann lösbar:

Theorem 2.18. *Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche. Dann besitzt das Modulproblem für die Isomorphieklassen $\mathcal{M}_{1,0}$ von holomorphen Geradenbündeln vom Grad 0 eine Lösung in Form eines feinen Modulraums. Dieser ist durch die Jacobische Varietät $J(X)$ gegeben, ein X zugeordneter, g-dimensionaler komplexer Torus, wobei g das Geschlecht von X bezeichne.*

Einen Beweis dieses klassischen Resultats findet der Leser beispielsweise in [Ba10]. Die Situation ist bekanntlich bereits für Vektorbündel vom Rang 2 oder wenn X eine kompakte, komplexe Mannigfaltigkeit einer Dimension größer als 1 ist viel schlechter. Eine Möglichkeit das Modulproblem dennoch zu lösen besteht darin, die betrachtete Klasse der Objekte zu verkleinern, d.h. im vorliegenden Fall nicht mehr alle holomorphen Vektorbündel aus $\mathcal{M}_{r,d}$ zu betrachten, sondern nur noch solche, die bestimmte zusätzliche Eigenschaften besitzen, so dass unerwünschte Extremfälle ausgeschlossen werden. Eine solche Eigenschaft ist das Stabilitätskonzept nach Mumford-Takemoto aus der geometrischen Invariantentheorie, welches wir für unsere Situation kurz wiederholen wollen (für ein tieferes Verständnis sei auf [MFK94] verwiesen).

Es sei dazu (X, g) eine kompakte Kählermannigfaltigkeit der Dimension n. Bekanntlich können die holomorphen Vektorbündel auf X mit den bezüglich der Strukturgarbe $\mathcal{O}_X$ von X lokal freien Garben auf X identifiziert werden, wobei eine Garbe $\mathcal{F}$ von $\mathcal{O}_X$-Moduln über X lokal frei ist, wenn es für jeden Punkt $x \in X$ eine Umgebung U um x und eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X^q\big|_U \longrightarrow \mathcal{F}|_U \longrightarrow 0 \tag{2.66}$$

gibt, d.h. wenn $\mathcal{F}$ lokal auf U isomorph zu der freien Garbe $\mathcal{O}_X^q\big|_U$ ist. Als Verallgemeinerung dieses Konzeptes nennt man eine Garbe $\mathcal{F}$ von $\mathcal{O}_X$-Moduln über X kohärent, wenn es für jeden Punkt $x \in X$ eine Umgebung U um x und eine exakte Sequenz

$$\mathcal{O}_X^p\big|_U \longrightarrow \mathcal{O}_X^q\big|_U \longrightarrow \mathcal{F}|_U \longrightarrow 0 \tag{2.67}$$

gibt. Ist nun $\mathcal{F}$ eine kohärente Garbe auf X, so zeigt man, dass die Menge

$$S_{\mathcal{F}} = \{x \in X \mid \mathcal{F}_x \text{ ist nicht frei}\} \subset X \tag{2.68}$$

eine abgeschlossene, analytische Teilmenge von X einer Dimension $\leqslant n-1$ ist (wegen eines Beweises siehe beispielsweise [Sc64]). Entsprechend ist die Garbe $\mathcal{F}$ außerhalb der Menge $S_{\mathcal{F}}$

lokal frei, wodurch es möglich wird, den Begriff des Rangs eines Vektorbündels wie folgt zu verallgemeinern:

$$\mathrm{rk}(\mathcal{F}) := \mathrm{rk}(\mathcal{F}_x) \quad \text{für irgendein} \quad x \in X \setminus S_{\mathcal{F}}. \tag{2.69}$$

Ist ferner jeder Halm $\mathcal{F}_x$ von $\mathcal{F}$ torsionsfrei, dann nennen wir die Garbe $\mathcal{F}$ torsionsfrei. Zu jeder kohärenten Garbe kann als Verallgemeinerung des Determinantenbündels eines Vektorbündels ein Geradenbündel $\det(\mathcal{F}) \to X$ konstruiert werden und falls $\mathcal{F}$ torsionsfrei ist, gilt konkret (vergleiche [Kb87])

$$\det(\mathcal{F}) = \left(\bigwedge^{\mathrm{rk}(\mathcal{F})} \mathcal{F} \right)^{**}. \tag{2.70}$$

Auf diese Weise können wir für jede kohärente Garbe die erste Chern-Klasse $c_1(\mathcal{F})$ vermöge

$$c_1(\mathcal{F}) := c_1(\det(\mathcal{F})) \tag{2.71}$$

erklären. Bezeichnen wir die Kählerform von (X, g) mit $\omega \in \Gamma\left(X, \mathcal{A}^{1,1}(X)\right)$, dann können wir mit diesem Begriff ferner den Grad einer torsionsfreien, kohärenten Garbe $\mathcal{F}$ auf X durch

$$\deg(\mathcal{F}) := \int_X c_1(\mathcal{F}) \wedge \omega^{n-1} \tag{2.72}$$

definieren. Außerdem erklären wir den Slope von $\mathcal{F}$ durch

$$\mu(\mathcal{F}) := \frac{\deg(\mathcal{F})}{\mathrm{rk}(\mathcal{F})}. \tag{2.73}$$

Mit diesen Vorbereitungen erhalten wir den Stabilitätsbegriff nach Mumford-Takemoto wie folgt:

Definition 2.19. Sei $\mathcal{F}$ eine torsionsfreie, kohärente Garbe auf der kompakten Kählermannigfaltigkeit (X, g).

(i) $\mathcal{F}$ heißt *semistabil*, falls für jede kohärente Untergarbe $\mathcal{F}'$ von $\mathcal{F}$ mit $0 < \mathrm{rk}(\mathcal{F}')$ gilt:

$$\mu(\mathcal{F}') \leqslant \mu(\mathcal{F}).$$

(ii) $\mathcal{F}$ heißt *stabil*, falls $\mathcal{F}$ semistabil ist und für jede kohärente Untergarbe $\mathcal{F}'$ von $\mathcal{F}$, welche $0 < \mathrm{rk}(\mathcal{F}') < \mathrm{rk}(\mathcal{F})$ erfüllt, gilt:

$$\mu(\mathcal{F}') < \mu(\mathcal{F}).$$

(iii) Ein holomorphes Vektorbündel $E \to X$ heißt *semistabil* beziehungsweise *stabil*, falls die zugehörige lokal freie Garbe $\mathcal{O}(E)$ semistabil beziehungsweise stabil ist.

Diese Begriffe ermöglichen es uns, folgendes allgemeine Resultat über die Existenz einer Lösung zu dem Modulproblem der stabilen Vektorbündel zu zitieren:

Theorem 2.20. *Ist (X, g) eine kompakte Kählermannigfaltigkeit und $E \to X$ ein festes differenzierbares, komplexes Vektorbündel, dann gibt es in der Kategorie der komplexen Räume einen groben Modulraum $\mathcal{M}^{\mathrm{st}}(E)$ für das Modulproblem der stabilen Vektorbündel, welche $E \to X$ als unterliegendes differenzierbares Bündel besitzen.*

Wegen eines Beweises dieser Aussage sei auf [Mi89, FS87, LT95] verwiesen. Um die Existenz einer Lösung des Modulproblems zu erhalten, wurde also der unterliegende topologische Typ der betrachteten Vektorbündel fixiert und die Menge der zu klassifizierenden Vektorbündel auf die bezüglich (X, g) stabilen Bündel eingeschränkt.

Der Stabilitätsbegriff nach Mumford-Takemoto ist ein rein algebraischer Begriff und es liegt daher nahe, nach einer analytischen Charakterisierung zu fragen. Als Verallgemeinerung von Kähler-Einstein-Metriken hat S. Kobayashi in [Kb80] den Begriff einer Hermite-Einstein-Metrik in einem beliebigen holomorphen Vektorbündel eingeführt:

Definition 2.21. Sei $E \to X$ ein holomorphes Vektorbündel mit hermitescher Metrik h auf der kompakten Kählermannigfaltigkeit (X, g) und bezeichne $\Omega \in \Gamma\left(X, \mathcal{A}^{1,1}(\mathrm{End}(E))\right)$ die Krümmung von h.

(i) Die *mittlere Krümmung* $R \in \Gamma\left(X, \mathcal{A}^{0,0}(\mathrm{End}(E))\right)$ der Metrik h auf E ist gegeben durch

$$R = \sqrt{-1}\Lambda_g \Omega.$$

(ii) Das hermitesche Vektorbündel (E, h) genügt der *schwachen Einstein-Bedingung*, falls für eine reelle Funktion $\varphi : X \to \mathbb{R}$ gilt:

$$R = \varphi \, \mathrm{id}_E \, .$$

(iii) Das hermitesche Vektorbündel (E, h) genügt der *Einstein-Bedingung*, falls es der schwachen Einstein-Bedingung mit einer auf X konstanten Funktion φ genügt. In diesem Fall heißt (E, h) *Hermite-Einstein-Vektorbündel* und $\kappa := \varphi \in \mathbb{R}$ die *Hermite-Einstein-Konstante* des Bündels. Außerdem nennt man ein solches h auch *Hermite-Einstein-Metrik*.

Der Begriff der Hermite-Einstein-Metrik ist offenbar rein analytisch und als einen ersten Bezug zwischen Stabilität und Einstein-Bedingung zitieren wir:

Theorem 2.22. *Sei $E \to X$ ein holomorphes Vektorbündel auf der kompakten Kählermannigfaltigkeit (X, g) und h eine Hermite-Einstein-Metrik in E mit der Hermite-Einstein-Konstante κ. Dann ist E semistabil und es gibt eine bezüglich h orthogonale direkte Summenzerlegung*

$$E = E_1 \oplus \ldots \oplus E_k$$

in stabile Vektorbündel $E_j \to X$, so dass die von h auf den E_j induzierten Metriken h_j jeweils Hermite-Einstein-Metriken mit derselben Hermite-Einstein-Konstante κ sind.

Für Hintergründe sowie Beweise dieses Resultats sei auf [Kb82, Lue83, Kb87] verwiesen. Um die Zerlegung in mehrere direkte Summanden stabiler Bündel zu verhindern, so dass unmittelbar die Stabilität des Ausgangsbündels gefolgert werden kann, genügt es, vom betrachteten Vektorbündel die Irreduzibilität oder, was in diesem Zusammenhang gleichbedeutend ist, die Einfachheit zu fordern:

Definition 2.23. Sei $E \to X$ ein holomorphes Vektorbündel auf der kompakten Kählermannigfaltigkeit (X, g). Dann heißt E *einfach*, falls jeder Garbenhomomorphismus $f : \mathcal{O}(E) \to \mathcal{O}(E)$ ein skalares Vielfaches der Identität ist, d.h. wenn $\Gamma(X, \mathcal{O}(\mathrm{End}(E))) = \mathbb{C} \cdot \mathrm{id}_E$ gilt.

Wir erhalten damit, dass jedes einfache Hermite-Einstein-Vektorbündel $(E, h) \to X$ auf einer kompakten Kählermannigfaltigkeit (X, g) stabil ist. Umgekehrt sind stabile Vektorbündel bekanntlich einfach. Dass in stabilen Vektorbündeln auch stets Hermite-Einstein-Metriken existieren ist ein berühmtes Resultat, welches im allgemeinen Fall erstmals in [LY87] bewiesen wurde. Zusammenfassend gilt also folgendes Theorem:

Theorem 2.24. *Sei (X, g) eine kompakte Kählermannigfaltigkeit und $E \to X$ ein holomorphes Vektorbündel. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) Das Vektorbündel E ist stabil.

(ii) Das Vektorbündel E ist einfach und es gibt eine Hermite-Einstein-Metrik h in E.

Da auch die auf den Modulräumen der Hermite-Einstein-Vektorbündel und der stabilen Vektorbündel existierenden Strukturen komplexer Räume nach der Kobayashi-Hitchin-Korrespondenz übereinstimmen (siehe [LT95] wegen Details), kann der Modulraum der stabilen Vektorbündel lokal mit Familien von Hermite-Einstein-Vektorbündeln untersucht werden. In der vorliegenden Arbeit wählen wir diesen Ansatz und halten aus diesem Grund noch einmal fest:

Definition 2.25. Sei (X, g) eine kompakte Kählermannigfaltigkeit und S ein komplexer Raum.

(i) Eine *Familie von hermiteschen, holomorphen Vektorbündeln* auf X, parametrisiert durch S, ist eine Familie $F \to X \times S$ von holomorphen Vektorbündeln auf X zusammen mit einer hermiteschen Metrik h auf F. Die Einschränkung $h|_s$ von h ist für jeden Punkt $s \in S$ eine hermitesche Metrik h_s auf der Faser $F_s \to X$.

(ii) Eine *Familie von Hermite-Einstein-Vektorbündeln* auf X, parametrisiert durch S, ist eine Familie $(F, h) \to X \times S$ von hermiteschen, holomorphen Vektorbündeln, so dass für jeden Punkt $s \in S$ die hermitesche Metrik h_s auf der Faser $F_s \to X$ eine Hermite-Einstein-Metrik ist. Die Hermite-Einstein-Konstanten fassen wir in dieser Situation stets zu einer Funktion $\kappa : S \to \mathbb{R}$ zusammen.

3. Familien von Hermite-Einstein-Vektorbündeln

In diesem Kapitel fassen wir bekannte Resultate über Familien von Hermite-Einstein-Vektorbündeln zusammen. Nachdem wir unsere Notationen zum lokalen Rechnen in Familien festgelegt haben, beginnen wir mit der Konstruktion des Faserintegrals und der Herleitung einiger seiner Eigenschaften. Das Faserintegral ist für diese Arbeit ein unverzichtbares Werkzeug und als eine erste Anwendung nutzen wir es im dritten Abschnitt, um zu zeigen, dass einige Eigenschaften von Vektorbündeln in holomorphen Familien nicht von der Faser abhängen. Genauer weisen wir nach, dass der Grad, der Slope und die Euler-Poincaré-Charakteristik in jeder Familie von hermiteschen, holomorphen Vektorbündeln sowie die Hermite-Einstein-Konstante in Familien von Hermite-Einstein-Vektorbündeln als Funktionen auf dem Parameterraum lokal konstant sind. Anschließend konstruieren wir für eine Familie von holomorphen Vektorbündeln die Kodaira-Spencer-Abbildung nach [FK74], wobei diese Konstruktion explizit mit Kozykeln in der Čech-Kohomologie arbeitet. Da diese Sichtweise der Kohomologie für unsere Zwecke weniger geeignet ist, geben wir einen Beweis für die Darstellung der Kodaira-Spencer-Abbildung in der Dolbeault-Kohomologie nach [Ov92]. Hierauf aufbauend leiten wir ebenfalls an [Ov92] orientiert zumindest für Familien von Hermite-Einstein-Vektorbündeln eine Formel für die harmonischen Repräsentanten der Kodaira-Spencer-Abbildung her. Wir nutzen schließlich diese Darstellung, um mit dem natürlichen L_2-Skalarprodukt für harmonische Formen die Weil-Petersson-Metrik auf dem Parameterraum von Familien von Hermite-Einstein-Vektorbündeln zu konstruieren, und zeigen mit Hilfe einer Faserintegralformel für die zugehörige Kählerform, dass die Weil-Petersson-Metrik eine Kählermetrik ist.

3.1. Notationen

Es sei X eine kompakte, komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension n und S eine komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension m. Ferner sei $F \to X \times S$ eine Familie holomorpher Vektorbündel vom Rang r auf X, parametrisiert durch S. Da wir die Modulräume von Vektorbündeln nur lokal untersuchen, fixieren wir häufig einen Punkt $s_0 \in S$ und interpretieren die Fasern $F_s \to X$ der Familie als Deformationen des festen Vektorbündels $F_{s_0} \to X$. In diesem Abschnitt stellen wir einige Notationen zum lokalen Arbeiten mit Familien bereit, welche genau auf diese Sichtweise zugeschnitten sind.

Zunächst gibt es für jeden Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung $W \subset X \times S$ um den Punkt (x, s_0), über der F trivialisiert werden kann. Nach eventuellem Verkleinern von W sehen wir, dass es zu dem betrachteten Punkt x eine offene Umgebung $U_x \subset X$ um x sowie eine offene Umgebung $V_x \subset S$ um s_0 gibt, so dass F über $U_x \times V_x$ trivialisiert werden kann. Indem wir diese Umgebungen gegebenenfalls weiter verkleinern, dürfen wir außerdem annehmen, dass auf

U_x beziehungsweise V_x holomorphe Koordinaten von X beziehungsweise S existieren. Da X als kompakt vorausgesetzt wurde, gibt es endlich viele Punkte $x_j \in X$ mit $j \in J$, so dass X bereits durch die endlich vielen offenen Koordinatenumgebungen $U_j := U_{x_j}$ mit holomorphen Koordinaten $z_j = (z_j^1, \ldots, z_j^n)$ überdeckt werden kann. Wir definieren in dieser Situation

$$V := \bigcap_{j \in J} V_{x_j}$$

und erhalten eine offene Umgebung $V \subset S$ um s_0 mit holomorphen Koordinaten $s = (s^1, \ldots, s^m)$, so dass F über allen Mengen $U_j \times V$ trivialisiert werden kann. Insgesamt haben wir gezeigt:

Notation 3.1. *Ist $s_0 \in S$ fest, dann gibt es eine holomorphe Koordinatenumgebung (V, s) um $s_0 \in S$ sowie eine Überdeckung von X durch endlich viele holomorphe Koordinatenumgebungen (U_j, z_j) für $j \in J$, so dass die Familie $\pi : F \to X \times S$ holomorpher Vektorbündel jeweils über $U_j \times V$ vermöge*

$$f_j : \pi^{-1}(U_j \times V) \longrightarrow (U_j \times V) \times \mathbb{C}^r$$

trivialisiert werden kann, d.h. es wird $F|_{X \times V} \to X \times V$ lokal durch die Transitionsfunktionen

$$f_{jk} : (U_j \times V) \cap (U_k \times V) \longrightarrow \mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$$

mit $f_{jk}((x,t)) = \pi_2 \circ f_j \circ f_k^{-1}((x,t), \cdot)$ beschrieben. Ferner sind die $U_j \times V$ holomorphe Koordinatenumgebungen auf $X \times S$ mit Koordinaten $(z_j^1, \ldots, z_j^n, s^1, \ldots, s^m)$, welche wir gelegentlich einheitlich mit $w_j = (w_j^1, \ldots, w_j^{n+m})$ bezeichnen.

Ist in dieser Situation ein Punkt $t \in V$ gegeben, dann ist die Faser $F_t = \iota_t^* F$ ein holomorphes Vektorbündel auf X (vergleiche Definition 2.17), dessen lokale Beschreibung durch Transitionsfunktionen bezüglich der Überdeckung $\{U_j\}$ von X wir herleiten wollen. Zu diesem Zweck erinnern wir kurz an den Pullback von Vektorbündeln in unserer Situation: Sind M und N komplexe Mannigfaltigkeiten und ist $\pi : E \to N$ ein holomorphes Vektorbündel sowie $f : M \to N$ eine holomorphe Abbildung, dann wird der Pullback

$$\begin{tikzcd} f^*E \arrow[r] \arrow[d, "\pi'"'] & E \arrow[d, "\pi"] \\ M \arrow[r, "f"] & N \end{tikzcd}$$

durch $f^*E = \{(p,e) \in M \times E \mid f(p) = \pi(e)\}$ mit $\pi' = \pi_1$ definiert. Ist eine lokale Trivialisierung

$$\varphi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{C}^r$$

von E über einer offenen Menge $U \subset N$ gegeben, dann ist bekanntlich

$$\psi : (\pi')^{-1}(f^{-1}(U)) \longrightarrow f^{-1}(U) \times \mathbb{C}^r, \qquad (p,e) \longmapsto (p, \pi_2(\varphi(e))) \tag{3.1}$$

eine lokale Trivialisierung von f^*E über $f^{-1}(U) \subset M$ (vergleiche beispielsweise [We07]).

Bezeichnen wir nun die Transitionsfunktionen der Faser F_t, welche wir berechnen wollen, mit

$$g_{jk} : U_j \cap U_k \longrightarrow \mathrm{GL}(r, \mathbb{C}).$$

Da die Faser als Pullback von F unter der Inklusion $\iota_t : X \to X \times S$ mit $\iota_t(x) = (x, t)$ entsteht, erhalten wir aus der Trivialisierung $f_j : \pi^{-1}(U_j \times V) \to (U_j \times V) \times \mathbb{C}^r$ von $\pi : F \to X \times S$ über $U_j \times V$ gemäß (3.1) jeweils eine Trivialisierung

$$g_j : (\pi')^{-1}(\iota_t^{-1}(U_j \times V)) \longrightarrow \iota_t^{-1}(U_j \times V) \times \mathbb{C}^r, \qquad (x, e) \longmapsto (x, \pi_2(f_j(e)))$$

von F_t über $\iota_t^{-1}(U_j \times V) = U_j$, so dass die Transitionsfunktionen g_{jk} der Faser durch $g_{jk}(x) = \pi_2 \circ g_j \circ g_k^{-1}(x, \cdot)$ gegeben werden. Wir berechnen $g_{jk}(x)(v)$ für einen Vektor $v \in \mathbb{C}^r$ und halten dazu vorab fest, dass es genau ein $p \in (\pi')^{-1}(\iota_t^{-1}(U_k \times V)) = (\pi')^{-1}(U_k) \subset F_t$ gibt, mit $g_k(p) = (x, v)$, d.h. $g_k^{-1}(x, v) = p$. Wir schreiben $p = (y, e)$ mit $y \in \iota_t^{-1}(U_k \times V) = U_k$ und $e \in F$. Wegen $(x, v) = g_k(p) = g_k(y, e) = (y, \pi_2(f_k(e)))$ muss $y = x$ sowie $v = \pi_2(f_k(e))$ gelten. Da außerdem $(x, e) = p \in F_t$ und damit $\iota_t(x) = \pi(e)$, d.h. $\pi(e) = (x, t)$ gilt, erhalten wir $f_k(e) = ((x, t), v)$ und damit $e = f_k^{-1}((x, t), v)$. Nun ist

$$g_j \circ g_k^{-1}(x, v) = g_j(x, e) = (x, \pi_2(f_j(e)))$$

und damit folgt

$$g_{jk}(x)(v) = \pi_2 \circ g_j \circ g_k^{-1}(x, v) = \pi_2(f_j(e)) = \pi_2 \circ f_j \circ f_k^{-1}((x, t), v) = f_{jk}(x, t)(v).$$

Wir haben also gezeigt:

Proposition 3.2. *In der Situation aus Notation 3.1 wird die Faser $F_t \to X$ für $t \in V$ bezüglich der Koordinatenumgebungen (U_j, z_j) von X gerade durch die Transitionsfunktionen*

$$f_{jk}(t) : U_j \cap U_k \longrightarrow \mathrm{GL}(r, \mathbb{C}), \qquad f_{jk}(t)(x) := f_{jk}(x, t)$$

beschrieben.

Ist nun ein Schnitt $\varphi \in \Gamma(X \times S, \mathcal{O}(F))$ gegeben, dann definieren wir den auf die Faser F_t zu $t \in V$ eingeschränkten Schnitt $\varphi|_t$ als Pullback unter ι_t, d.h.

$$\varphi|_t := \iota_t^* \varphi \in \Gamma(X, \mathcal{O}(F_t)). \tag{3.2}$$

Beschreiben wir φ bezüglich $U_j \times V$ durch holomorphe Funktionen $\varphi_j : U_j \times V \to \mathbb{C}^r$, dann wird also der eingeschränkte Schnitt auf den U_j durch $\varphi_j(t) : U_j \to \mathbb{C}^r$ mit $\varphi_j(t)(x) := \varphi_j(x, t)$ beschrieben. Völlig analog können wir auch differenzierbare Schnitte einschränken oder Schnitte, die nicht auf ganz $X \times S$ definiert sind.

Ist unabhängig von der Familie $F \to X \times S$ eine (p, q)-Form $\psi \in \Gamma(X \times S, \mathcal{A}^{p,q}(X \times S))$ auf $X \times S$ gegeben, dann können wir für $t \in V$ ebenfalls den Pullback unter ι_t bilden und erhalten die eingeschränkte (eigentlich: zurückgezogene) Form

$$\psi|_t = \iota_t^* \psi \in \Gamma(X, \mathcal{A}^{p,q}(X)). \tag{3.3}$$

Wir wollen für derartige Situationen eine lokale Notation festlegen, die wir später häufiger einsetzen und die zu Notation 3.1 passt. Zunächst gilt für ψ auf $U_j \times V$ die Gleichung

$$\psi_j = \frac{1}{p!q!} \sum_{\alpha,\beta} \psi_{j\,\alpha_1 \ldots \alpha_p \overline{\beta_1} \ldots \overline{\beta_q}} dw_j^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dw_j^{\alpha_p} \wedge dw_j^{\overline{\beta_1}} \wedge \ldots \wedge dw_j^{\overline{\beta_q}}.$$

Gemäß unserer Konvention besteht w_j aus Koordinaten $z_j = (z_j^1, \ldots, z_j^n)$ auf X sowie Koordinaten $s = (s^1, \ldots, s^m)$ auf S. Wir teilen die Summanden folgendermaßen auf

$$\psi_j = \frac{1}{p!q!} \sum_{\alpha,\beta} \psi_{j\,\alpha_1 \ldots \alpha_p \overline{\beta_1} \ldots \overline{\beta_q}} dz_j^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\alpha_p} \wedge dz_j^{\overline{\beta_1}} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\beta_q}}$$
$$+ \text{Summanden mit } ds\text{- oder } d\overline{s}\text{-Faktoren},$$

wobei die Summation in der vorherigen Gleichung über $\alpha, \beta \in \{1, \ldots, n+m\}$ verläuft, wohingegen jetzt nur noch über $\alpha, \beta \in \{1, \ldots, n\}$ summiert wird, was wir nicht explizit notieren. Wegen

$$\iota_t^*(ds^k) = d(\iota_t^* s^k) = d(\underbrace{s^k \circ \iota_t}_{\equiv t_k}) = 0$$

und analog $\iota_t^*(ds^{\overline{k}}) = 0$ für alle $1 \leqslant k \leqslant m$ bleiben in $\iota_t^* \psi_j$ nur Summanden übrig, in denen keine ds- beziehungsweise $d\overline{s}$-Faktoren enthalten sind. Da ferner mit unseren Bezeichnungen offenbar $\iota_t^* dz^k = dz^k$ sowie $\iota_t^* dz^{\overline{k}} = dz^{\overline{k}}$ für $1 \leqslant k \leqslant n$ gilt, erhalten wir schließlich als lokale Beschreibung von $\psi|_t$ auf U_j

$$(\psi|_t)_j = \frac{1}{p!q!} \sum_{\alpha,\beta} \psi_{j\,\alpha_1 \ldots \alpha_p \overline{\beta_1} \ldots \overline{\beta_q}}(t) dz_j^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\alpha_p} \wedge dz_j^{\overline{\beta_1}} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\beta_q}},$$

wobei wir natürlich $\psi_{j\,\alpha_1 \ldots \alpha_p \overline{\beta_1} \ldots \overline{\beta_q}}(t)(x) = \psi_{j\,\alpha_1 \ldots \alpha_p \overline{\beta_1} \ldots \overline{\beta_q}}(x,t)$ meinen.

Sei nun $\tau \in \Gamma(X \times S, \mathcal{A}^{p,q}(F))$ eine (p,q)-Form mit Werten im Bündel $F \to X \times S$, welche wir lokal auf $U_j \times V$ durch

$$\tau_j = \left(\tau_j^1, \ldots, \tau_j^r\right)^t \quad \text{mit} \quad \tau_j^l \in \Gamma(U_j \times V, \mathcal{A}^{p,q}(X \times S))$$

beschreiben. Dann können wir ganz analog zu unseren bisherigen Überlegungen für $t \in V$ die eingeschränkte Form $\tau|_t \in \Gamma(X, \mathcal{A}^{p,q}(F_t))$ bilden, welche auf U_j beschrieben wird durch

$$(\tau|_t)_j = \Big((\tau_j^1)\big|_t, \ldots, (\tau_j^r)\big|_t \Big)^t.$$

Sei zuletzt eine hermitesche Metrik h in der Familie $F \to X \times S$ gegeben. In Abschnitt 2.5 haben wir festgehalten, dass dann für alle Punkte $s \in S$ die Einschränkung $h|_s$ eine hermitesche Metrik auf der Faser $F_s \to X$ induziert. Beschreiben wir h auf $U_j \times V$ durch differenzierbare Funktionen $h_j : U_j \times V \to \mathbb{C}^{r \times r}$, dann wird $h|_t$ für $t \in V$ auf U_j offenbar durch die Funktionen

$$h_j(t) : U_j \longrightarrow \mathbb{C}^{r \times r}, \qquad h_j(t)(x) := h_j(x,t) \tag{3.4}$$

beschrieben. Als Anwendung der Überlegungen aus diesem Abschnitt zeigen wir abschließend folgende Beziehung zwischen der Krümmung der Familie und den Krümmungen der Fasern:

Proposition 3.3. *Sei $(F,h) \to X \times S$ eine Familie hermitescher, holomorpher Vektorbündel auf der kompakten, komplexen Mannigfaltigkeit X, parametrisiert durch die komplexe Mannigfaltigkeit S. Bezeichnen wir die Krümmung von h mit $\Omega \in \Gamma\left(X \times S, \mathcal{A}^{1,1}(\operatorname{End}(F))\right)$ sowie für $s \in S$ die Krümmung der auf die Faser $F_s \to X$ eingeschränkten Metrik $h|_s$ mit $\Omega_s \in \Gamma\left(X, \mathcal{A}^{1,1}(\operatorname{End}(F_s))\right)$, dann gilt für alle $s \in S$ die Identität*

$$\Omega_s = \Omega|_s .$$

Beweis. Es genügt offenbar, die Aussage für einen festen Punkt $s_0 \in S$ nachzuweisen und entsprechend arbeiten wir mit unseren Notationen 3.1 bezüglich des Punktes s_0. Wegen

$$R^{\rho}_{jF_{s_0}\,\sigma\alpha\overline{\beta}} = -\partial_{\overline{\beta}} \sum_{\tau} h_j^{\overline{\tau}\rho}(s_0)\partial_\alpha h_{j\,\sigma\overline{\tau}}(s_0) = \left(-\partial_{\overline{\beta}} \sum_{\tau} h_j^{\overline{\tau}\rho}\partial_\alpha h_{j\,\sigma\overline{\tau}}\right)(s_0) = R^{\rho}_{jF\,\sigma\alpha\overline{\beta}}(s_0)$$

folgt die Aussage mit unseren Überlegungen unmittelbar aus der Rechnung

$$\Theta^{\rho}_{jF\,\sigma}\Big|_{s_0} = \iota^*_{s_0}\left(\sum_{\alpha,\beta} R^{\rho}_{jF\,\sigma\alpha\overline{\beta}} dw_j^{\alpha} \wedge dw_j^{\overline{\beta}}\right) = \sum_{\alpha,\beta} R^{\rho}_{jF\,\sigma\alpha\overline{\beta}}(s_0) dz_j^{\alpha} \wedge dz_j^{\overline{\beta}} = \Theta^{\rho}_{jF_{s_0}\,\sigma}.$$

□

3.2. Das Faserintegral

In diesem Abschnitt stellen wir mit dem Faserintegral ein für unsere Arbeit wichtiges Werkzeug bereit. Das Ziel besteht darin, auf einem Raum, welcher eine gewisse Produktstruktur trägt, den Satz von Fubini im Differentialformenkalkül zu etablieren. Einen natürlichen Rahmen hierfür bieten glatte Faserbündel. Dabei besteht ein glattes Faserbündel (E, π, B, F) aus differenzierbaren Mannigfaltigkeiten E, B und F sowie einer glatten Abbildung $\pi : E \to B$, so dass gilt: Es existiert eine offene Überdeckung $\{U_j\}$ von B und eine Familie von Diffeomorphismen $\psi_j : \pi^{-1}(U_j) \to U_j \times F$, so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U_j) \arrow[rr, "\psi_j"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U_j \times F \arrow[dl, "\pi_1"] \\ & U_j & \end{tikzcd}$$

für alle Indizes j kommutiert. Offenbar sind Vektorbündel über B spezielle Faserbündel. Wenn nun eine Orientierung im Faserbündel vorliegt, dann kann man für $k \geqslant \dim(F)$ auf dem Raum $\mathcal{A}^k_F(E)(U)$ der k-Formen über U mit faserkompaktem Träger, d.h. der Differentialformen $\omega \in \Gamma\left(U, \mathcal{A}^k(E)\right)$, so dass für alle kompakten Teilmengen $K \subset B$ auch die Menge $\pi^{-1}(K) \cap \operatorname{supp}(\omega)$

kompakt ist, stets ein Faserintegral erklären, welches $\mathbb{R}$-linear und homogen vom Grad $-\dim(F)$ ist sowie als Abbildung die Gestalt

$$\int_{E/B} : \mathcal{A}_F^k(E) \longrightarrow \mathcal{A}^{k-\dim(F)}(B) \tag{3.5}$$

besitzt, so dass ferner der Satz von Fubini für Differentialformen maximalen Grades in der Form

$$\int_E = \int_B \circ \int_{E/B} \tag{3.6}$$

erfüllt ist. Dabei besitzt dieses Faserintegral noch viele weitere nützliche Eigenschaften, beispielsweise kommutiert es mit dem äußeren Differential:

$$d \circ \int_{E/B} = \int_{E/B} \circ\, d. \tag{3.7}$$

Für die Anwendungen in dieser Arbeit benötigen wir das Faserintegral lediglich für triviale Produktstrukturen der Form $X \times S \to S$. Da wir außerdem hauptsächlich an konkreten Rechnungen interessiert sind, geben wir in diesem Abschnitt in knapper Form eine Herleitung des Faserintegrals für derartige Räume an, wobei wir uns an konkreten Formeln orientieren, anstatt eine axiomatische Theorie aufzubauen. Der an der allgemeinen Theorie interessierte Leser findet einen entsprechenden Zugang in der Situation reeller Mannigfaltigkeiten und Faserbündel beispielsweise in [GHV72].

Im gesamten Abschnitt seien X und S komplexe Mannigfaltigkeiten der Dimension n beziehungsweise m, wobei wir X im Hinblick auf unsere Anwendungen ferner als kompakt voraussetzen. Zur Definition des Faserintegrals gehen wir in zwei Schritten vor.

Zunächst sei eine holomorphe Koordinatenumgebung (V, s) auf S sowie eine komplexe Differentialform $\eta \in \Gamma\left(X \times V, \mathcal{A}^{2n+r}(X \times S)\right)$ gegeben. Wir wollen das Faserintegral

$$\int_{X\times S/S} \eta \in \Gamma\left(V, \mathcal{A}^r(S)\right) \tag{3.8}$$

definieren. Dazu wählen wir eine Überdeckung von X durch endlich viele (denn X ist kompakt) holomorphe Karten (U_j, z_j) und eine dieser Überdeckung untergeordnete glatte Partition der Eins $\{p_j\}$. Aus der komplexen Karte (U_j, z_j) erhalten wir jeweils eine reelle Karte (U_j, x_j) der unterliegenden differenzierbaren Mannigfaltigkeit mit den reellen Koordinaten

$$z_j^\alpha =: x_j^{2\alpha-1} + \sqrt{-1}x_j^{2\alpha}. \tag{3.9}$$

Mit den $\{(U_j, x_j)\}$ und den $\{p_j\}$ haben wir also eine positiv orientierte Überdeckung von X mit einer untergeordneten glatten Partition der Eins konstruiert, welche folglich zur Integration auf X verwendet werden kann. Völlig analog erhalten wir aus der holomorphen Karte (V, s) auf S eine differenzierbare Karte (V, t) indem wir durch

$$s^l =: t^{2l-1} + \sqrt{-1}t^{2l} \tag{3.10}$$

reelle Koordinaten konstruieren. Da die $U_j \times V$ eine Überdeckung von $X \times V$ durch Koordinatenumgebungen bilden, können wir die Differentialform η lokal in der Gestalt

$$\eta|_{U_j \times V} = \frac{1}{r!} \sum_{\gamma} \eta_{j\,\gamma_1 \ldots \gamma_r} dt^{\gamma_1} \wedge \ldots \wedge dt^{\gamma_r} \wedge dx_j^1 \wedge \ldots \wedge dx_j^{2n}$$
$$+ \text{ Summanden mit mehr als } r\ dt\text{-Faktoren}$$

schreiben. Hiervon ausgehend definieren wir

$$\int_{X \times S/S} \eta := \frac{1}{r!} \sum_{\gamma} \left(\sum_j \int_{U_j} p_j \eta_{j\,\gamma_1 \ldots \gamma_r}(s) dx_j^1 \wedge \ldots \wedge dx_j^{2n} \right) dt^{\gamma_1} \wedge \ldots \wedge dt^{\gamma_r}, \tag{3.11}$$

wobei das auftretende Integral wie üblich für eine Form ω mit $\operatorname{supp}(\omega) \subset U_j$ vermöge

$$\int_{U_j} \omega := \int_{x_j(U_j)} (x_j^{-1})^* \omega$$

auf das gewöhnliche Integral im $\mathbb{R}^{2n}$ zurückgeführt wird. Da der Anteil von η, den wir integrieren, beim Übergang von $U_j \times V$ nach $U_k \times V$ offenbar das Transformationsverhalten einer $2n$-Form auf X besitzt, ist das Faserintegral für Differentialformen auf $X \times V$ wohldefiniert und man überlegt sich wie beim gewöhnlichen Integral auf X, dass die Definition weder von der Wahl der Überdeckung $\{U_j\}$ von X noch von der Wahl der Partition der Eins $\{p_j\}$ abhängt.

Sei nun allgemeiner eine Form $\eta \in \Gamma\left(X \times S, \mathcal{A}^{2n+r}(X \times S)\right)$ auf ganz $X \times S$ gegeben. Wir wollen das Faserintegral

$$\int_{X \times S/S} \eta \in \Gamma(S, \mathcal{A}^r(S)) \tag{3.12}$$

definieren. Dazu wählen wir eine Überdeckung von S durch holomorphe Koordinatenumgebungen (V_α, s_α) und konstruieren wie in (3.10) reelle Karten (V_α, t_α). Für jeden Index α ist dann

$$\int_{X \times S/S} \eta|_{X \times V_\alpha} \in \Gamma(V_\alpha, \mathcal{A}^r(S)) \tag{3.13}$$

jeweils eine wohldefinierte r-Form auf V_α. Wir behaupten, dass diese r-Formen auf den Koordinatenumgebungen V_α das Transformationsverhalten einer r-Form auf S besitzen, d.h. zu einem $\tau \in \Gamma(S, \mathcal{A}^r(S))$ Anlass geben und definieren das Faserintegral durch

$$\int_{X \times S/S} \eta := \tau. \tag{3.14}$$

Um das Transformationsverhalten nachzurechnen, schreiben wir mit obigen Notationen

$$\eta|_{U_j \times V_\alpha} = \frac{1}{r!} \sum_{\gamma} \eta_{j\alpha\,\gamma_1 \ldots \gamma_r} dt_\alpha^{\gamma_1} \wedge \ldots \wedge dt_\alpha^{\gamma_r} \wedge dx_j^1 \wedge \ldots \wedge dx_j^{2n}$$
$$+ \text{ Summanden mit mehr als } r\ dt_\alpha\text{-Faktoren,}$$

wobei wir mit der Verwendung von α als Index für die Koordinatenumgebung auf S in dieser Rechnung eine Kollision mit unserer bislang vereinbarten Notation in Kauf nehmen. Der Einfachheit halber vereinbaren wir die Abkürzung

$$\tau_\alpha := \int_{X\times S/S} \eta|_{X\times V_\alpha} = \frac{1}{r!}\sum_\gamma \left(\sum_j \int_{U_j} p_j \eta_{j\alpha\,\gamma_1\ldots\gamma_r}(s) dx_j^1 \wedge \ldots \wedge dx_j^{2n}\right) dt_\alpha^{\gamma_1} \wedge \ldots \wedge dt_\alpha^{\gamma_r}.$$

Wir fixieren einen Index j und berechnen das Transformationsverhalten der $\eta|_{U_j\times V_\alpha}$ beim Übergang von V_α nach V_β. Zunächst erhalten wir auf der Menge $(U_j\times V_\alpha)\cap(U_j\times V_\beta) = U_j\times(V_\alpha\cap V_\beta)$ aus Gründen der linearen Unabhängigkeit durch Vergleichen

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{r!}\sum_\gamma \eta_{j\alpha\,\gamma_1\ldots\gamma_r} dt_\alpha^{\gamma_1}\wedge\ldots\wedge dt_\alpha^{\gamma_r}\wedge dx_j^1\wedge\ldots\wedge dx_j^{2n}\\
&\qquad = \frac{1}{r!}\sum_\gamma \eta_{j\beta\,\gamma_1\ldots\gamma_r} dt_\beta^{\gamma_1}\wedge\ldots\wedge dt_\beta^{\gamma_r}\wedge dx_j^1\wedge\ldots\wedge dx_j^{2n}\\
&\qquad = \frac{1}{r!}\sum_\delta \left(\sum_\gamma \frac{\partial t_\beta^{\gamma_1}}{\partial t_\alpha^{\delta_1}}\cdots\frac{\partial t_\beta^{\gamma_r}}{\partial t_\alpha^{\delta_r}}\eta_{j\beta\,\gamma_1\ldots\gamma_r}\right) dt_\alpha^{\delta_1}\wedge\ldots\wedge dt_\alpha^{\delta_r}\wedge dx_j^1\wedge\ldots\wedge dx_j^{2n}.
\end{aligned}$$

Auf $U_j\times(V_\alpha\cap V_\beta)$ weisen die oben betrachteten Koeffizienten, welche für uns relevant sind, folglich das Transformationsverhalten

$$\eta_{j\alpha\,\delta_1\ldots\delta_r} = \sum_\gamma \frac{\partial t_\beta^{\gamma_1}}{\partial t_\alpha^{\delta_1}}\cdots\frac{\partial t_\beta^{\gamma_r}}{\partial t_\alpha^{\delta_r}}\eta_{j\beta\,\gamma_1\ldots\gamma_r}$$

auf. Mit dieser Identität berechnen wir auf $V_\alpha\cap V_\beta$:

$$\begin{aligned}
\tau_\beta &= \frac{1}{r!}\sum_\gamma\left(\sum_j\int_{U_j} p_j\eta_{j\beta\,\gamma_1\ldots\gamma_r}(s)dx_j^1\wedge\ldots\wedge dx_j^{2n}\right) dt_\beta^{\gamma_1}\wedge\ldots\wedge dt_\beta^{\gamma_r}\\
&= \frac{1}{r!}\sum_\delta\sum_\gamma \underbrace{\frac{\partial t_\beta^{\gamma_1}}{\partial t_\alpha^{\delta_1}}\cdots\frac{\partial t_\beta^{\gamma_r}}{\partial t_\alpha^{\delta_r}}}_{\text{konstant auf } U_j}\left(\sum_j\int_{U_j} p_j\eta_{j\beta\,\gamma_1\ldots\gamma_r}(s)dx_j^1\wedge\ldots\wedge dx_j^{2n}\right) dt_\alpha^{\delta_1}\wedge\ldots\wedge dt_\alpha^{\delta_r}\\
&= \frac{1}{r!}\sum_\delta\left(\sum_j\int_{U_j} p_j\left(\sum_\gamma \frac{\partial t_\beta^{\gamma_1}}{\partial t_\alpha^{\delta_1}}\cdots\frac{\partial t_\beta^{\gamma_r}}{\partial t_\alpha^{\delta_r}}\eta_{j\beta\,\gamma_1\ldots\gamma_r}(s)\right)dx_j^1\wedge\ldots\wedge dx_j^{2n}\right) dt_\alpha^{\delta_1}\wedge\ldots\wedge dt_\alpha^{\delta_r}\\
&= \frac{1}{r!}\sum_\delta\left(\sum_j\int_{U_j} p_j\eta_{j\alpha\,\delta_1\ldots\delta_r}(s)dx_j^1\wedge\ldots\wedge dx_j^{2n}\right) dt_\alpha^{\delta_1}\wedge\ldots\wedge dt_\alpha^{\delta_r}\\
&= \tau_\alpha.
\end{aligned}$$

Damit haben wir das erforderliche Transformationsverhalten der τ_α nachgerechnet, womit das Faserintegral aus der Definition (3.14) wohldefiniert ist. Die Unabhängigkeit von der gewählten Überdeckung (V_j, s_j) von S ist klar.

Wir stellen nun einige Eigenschaften des Faserintegrals zusammen, wobei wir vorab festhalten, dass es offenbar $\mathbb{C}$-linear ist. Zunächst können wir entsprechend (3.7) zeigen:

Satz 3.4. *Das Faserintegral kommutiert mit dem äußeren Differential, d.h. für eine Differentialform* $\eta \in \Gamma\left(X \times U, \mathcal{A}^{2n+r}(X \times S)\right)$ *gilt stets:*

$$d \int_{X \times S/S} \eta = \int_{X \times S/S} d\eta.$$

Beweis. Da es genügt, die beiden Formen aus $\Gamma\left(U, \mathcal{A}^{r+1}(S)\right)$ lokal zu vergleichen, zeigen wir die behauptete Formel für $\eta \in \Gamma\left(X \times V, \mathcal{A}^{2n+r}(X \times S)\right)$ auf einer holomorphen Koordinatenumgebung (V, s) von S. Wir schreiben dazu mit den Bezeichnungen aus der Konstruktion

$$\begin{aligned}\eta|_{U_j \times V} = {} & \frac{1}{r!} \sum_\gamma \eta_{j\,\gamma_1 \ldots \gamma_r} dt^{\gamma_1} \wedge \ldots \wedge dt^{\gamma_r} \wedge dx_j^1 \wedge \ldots \wedge dx_j^{2n} \\ & + \frac{1}{(r+1)!} \sum_\gamma \sum_\nu \eta_{j\,\gamma_1 \ldots \gamma_{r+1} \nu} dt^{\gamma_1} \wedge \ldots \wedge dt^{\gamma_{r+1}} \wedge dx_j^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j^\nu} \wedge \ldots \wedge dx_j^{2n} \\ & + \text{Summanden mit mehr als } r+1 \ dt\text{-Faktoren}\end{aligned}$$

und berechnen einerseits die linke Seite der Behauptung:

$$\begin{aligned} d \int_{X \times S/S} \eta & = d \left(\frac{1}{r!} \sum_\gamma \left(\sum_j \int_{U_j} p_j \eta_{j\,\gamma_1 \ldots \gamma_r}(s) dx_j^1 \wedge \ldots \wedge dx_j^{2n} \right) dt^{\gamma_1} \wedge \ldots \wedge dt^{\gamma_r} \right) \\ & = \frac{1}{(r+1)!} \sum_\gamma \sum_\nu (-1)^{\nu+1} \partial_{t^{\gamma_\nu}} \left(\sum_j \int_{U_j} p_j \eta_{j\,\gamma_1 \ldots \widehat{\gamma_\nu} \ldots \gamma_{r+1}}(s) dx_j^1 \wedge \ldots \wedge dx_j^{2n} \right) dt^{\gamma_1} \wedge \ldots \wedge dt^{\gamma_{r+1}} \\ & = \frac{1}{(r+1)!} \sum_\gamma \left(\sum_j \int_{U_j} p_j \sum_\nu (-1)^{\nu+1} \partial_{t^{\gamma_\nu}} \eta_{j\,\gamma_1 \ldots \widehat{\gamma_\nu} \ldots \gamma_{r+1}}(s) dx_j^1 \wedge \ldots \wedge dx_j^{2n} \right) dt^{\gamma_1} \wedge \ldots \wedge dt^{\gamma_{r+1}}. \end{aligned}$$

Um andererseits $\int_{X \times S/S} d\eta$ zu berechnen, erhalten wir zunächst für $d\eta$:

$$\begin{aligned}(d\eta)|_{U_j \times V} = {} & \frac{1}{r!} \sum_\gamma \sum_\beta \partial_{t^\beta} \eta_{j\,\gamma_1 \ldots \gamma_r} dt^\beta \wedge dt^{\gamma_1} \wedge \ldots \wedge dt^{\gamma_r} \wedge dx_j^1 \wedge \ldots \wedge dx_j^{2n} \\ & + \frac{1}{r!} \sum_\gamma \sum_\nu \partial_{x_j^\nu} \eta_{j\,\gamma_1 \ldots \gamma_r} dx_j^\nu \wedge dt^{\gamma_1} \wedge \ldots \wedge dt^{\gamma_r} \wedge dx_j^1 \wedge \ldots \wedge dx_j^{2n} \\ & + \frac{1}{(r+1)!} \sum_\gamma \sum_{\nu_1} \sum_{\nu_2} \partial_{x_j^{\nu_2}} \eta_{j\,\gamma_1 \ldots \gamma_{r+1} \nu_1} dx_j^{\nu_2} \wedge dt^{\gamma_1} \wedge \ldots \wedge dt^{\gamma_{r+1}} \wedge dx_j^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j^{\nu_1}} \wedge \ldots \wedge dx_j^{2n} \\ & + \text{Summanden mit mehr als } r+1 \ dt\text{-Faktoren.}\end{aligned}$$

Da der zweite Summand wegen $\dim_{\mathbb{R}} X = 2n$ verschwindet, ergibt eine direkte Umformung:

$$(d\eta)|_{U_j \times V} = \frac{1}{(r+1)!} \sum_{\gamma} \left(\sum_{\nu} (-1)^{\nu+1} \partial_{t^{\gamma_\nu}} \eta_{j\, \gamma_1 \ldots \widehat{\gamma_\nu} \ldots \gamma_{r+1}} \right) dt^{\gamma_1} \wedge \ldots \wedge dt^{\gamma_{r+1}} \wedge dx_j^1 \wedge \ldots \wedge dx_j^{2n}$$
$$+ \frac{1}{(r+1)!} \sum_{\gamma} \left(\sum_{\nu} (-1)^{r+\nu} \partial_{x_j^\nu} \eta_{j\, \gamma_1 \ldots \gamma_{r+1} \nu} \right) dt^{\gamma_1} \wedge \ldots \wedge dt^{\gamma_{r+1}} \wedge dx_j^1 \wedge \ldots \wedge dx_j^{2n}$$
$$+ \text{Summanden mit mehr als } r+1 \; dt\text{-Faktoren.}$$

Für feste Indizes $\gamma_1, \ldots, \gamma_{r+1}$ und festes $s \in V$ definieren wir nun eine Differentialform

$$\tau(\gamma_1, \ldots, \gamma_{r+1}, s) \in \Gamma\left(X, \mathcal{A}^{2n-1}(X)\right),$$

indem wir lokal auf U_j jeweils die Form

$$\tau(\gamma_1, \ldots, \gamma_{r+1}, s)|_{U_j} := \sum_{\nu} (-1)^{r+1} \eta_{j\, \gamma_1 \ldots \gamma_{r+1} \nu}(s) dx_j^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j^\nu} \wedge \ldots \wedge dx_j^{2n}$$

vorschreiben. Wegen des Transformationsverhaltens der $\eta_{j\, \gamma_1 \ldots \gamma_{r+1} \nu}(s)$ ist diese Form wohldefiniert. Durch Anwenden des äußeren Differentials erhalten wir hieraus:

$$(d\tau(\gamma_1, \ldots, \gamma_{r+1}, s))|_{U_j} = \sum_{\nu} (-1)^{r+1+\nu+1} \partial_{x_j^\nu} \eta_{j\, \gamma_1 \ldots \gamma_{r+1} \nu}(s) dx_j^1 \wedge \ldots \wedge dx_j^{2n}.$$

Mit diesen Vorbereitungen finden wir wegen

$$\int_{X \times S/S} d\eta =$$
$$= \frac{1}{(r+1)!} \sum_{\gamma} \left(\sum_j \int_{U_j} p_j \sum_{\nu} (-1)^{\nu+1} \partial_{t^{\gamma_\nu}} \eta_{j\, \gamma_1 \ldots \widehat{\gamma_\nu} \ldots \gamma_{r+1}}(s)\, dx_j^1 \wedge \ldots \wedge dx_j^{2n} \right) dt^{\gamma_1} \wedge \ldots \wedge dt^{\gamma_{r+1}}$$
$$+ \frac{1}{(r+1)!} \sum_{\gamma} \left(\sum_j \int_{U_j} p_j \sum_{\nu} (-1)^{\nu+r} \partial_{x_j^\nu} \eta_{j\, \gamma_1 \ldots \gamma_{r+1} \nu}(s)\, dx_j^1 \wedge \ldots \wedge dx_j^{2n} \right) dt^{\gamma_1} \wedge \ldots \wedge dt^{\gamma_{r+1}}$$
$$= d \int_{X \times S/S} \eta + \frac{1}{(r+1)!} \sum_{\gamma} \underbrace{\left(\int_X d\tau(\gamma_1, \ldots, \gamma_{r+1}, s) \right)}_{=0 \text{ nach Stokes}} dt^{\gamma_1} \wedge \ldots \wedge dt^{\gamma_{r+1}}$$
$$= d \int_{X \times S/S} \eta$$

schließlich die behauptete Gleichung. $\square$

Als nächstes halten wir folgendes Resultat speziell über die Integration von $2n$-Formen fest:

Satz 3.5. *Das Faserintegral einer 2n-Form* $\eta \in \Gamma\left(X \times S, \mathcal{A}^{2n}(X \times S)\right)$ *ist eine glatte Funktion und es gilt*

$$\left(\int_{X \times S/S} \eta\right)(s) = \int_X \eta|_s \qquad \textit{für alle } s \in S.$$

Beweis. Es genügt, die behauptete Gleichung in einem festen Punkt $s_0 \in V \subset S$ für eine holomorphe Koordinatenumgebung (V, s) auf S zu zeigen. Dazu schreiben wir

$$\eta|_{U_j \times V} = \eta_j dx_j^1 \wedge \ldots \wedge dx_j^{2n} + \text{Summanden mit } dt\text{-Faktoren}$$

und berechnen einerseits

$$\left(\int_{X \times S/S} \eta\right)(s_0) = \left(\int_{X \times S/S} \eta|_{X \times V}\right)(s_0) = \sum_j \int_{U_j} p_j \eta_j(s_0)\, dx_j^1 \wedge \ldots \wedge dx_j^{2n}.$$

Andererseits berechnet sich der Pullback lokal zu $\left(\eta|_{s_0}\right)_j = \eta_j(s_0) dx_j^1 \wedge \ldots \wedge dx_j^{2n}$, so dass wir schließen können:

$$\int_X \eta|_{s_0} = \sum_j \int_{U_j} p_j \eta_j(s_0)\, dx_j^1 \wedge \ldots \wedge dx_j^{2n} = \left(\int_{X \times S/S} \eta\right)(s_0).$$

□

Entsprechend (3.6) zeigen wir nun folgende Variante des Satzes von Fubini:

Satz 3.6. *Für eine Differentialform* $\eta \in \Gamma\left(X \times S, \mathcal{A}^{2n+2m}(X \times S)\right)$ *mit kompaktem Träger gilt*

$$\int_{X \times S} \eta = \int_S \int_{X \times S/S} \eta.$$

Beweis. Wir übernehmen wieder die früheren Notationen. Insbesondere haben wir zur Überdeckung $\{U_j\}$ von X die untergeordnete glatte Partition der Eins $\{p_j\}$. Zur Überdeckung $\{V_\alpha\}$ von S wählen wir eine untergeordnete glatte Partition der Eins $\{q_\alpha\}$. Dann haben wir die Überdeckung $\{U_j \times V_\alpha\}$ von $X \times S$ und erhalten durch

$$p_j q_\alpha : X \times S \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad (x, s) \longmapsto p_j(x) \cdot q_\alpha(s)$$

eine dieser Überdeckung untergeordnete glatte Partition der Eins, so dass wir auf $X \times S$ vermöge dieser Partition integrieren können. Da wir mit η eine $(2n + 2m)$-Form gegeben haben, können wir lokal, ohne Summanden zu vernachlässigen, schreiben:

$$\eta|_{U_j \times V_\alpha} = \eta_{j\alpha} dt_\alpha^1 \wedge \ldots \wedge dt_\alpha^{2m} \wedge dx_j^1 \wedge \ldots \wedge dx_j^{2n}.$$

Damit finden wir unmittelbar

$$\int_{X \times S} \eta = \sum_{j,\alpha} \int_{U_j \times V_\alpha} p_j q_\alpha \eta_{j\alpha} dt_\alpha^1 \wedge \ldots \wedge dt_\alpha^{2m} \wedge dx_j^1 \wedge \ldots \wedge dx_j^{2n}.$$

Andererseits berechnen wir

$$\left(\int_{X\times S/S}\eta\right)\Bigg|_{V_\alpha} = \left(\sum_j\int_{U_j} p_j\eta_{j\alpha}dx_j^1\wedge\ldots\wedge dx_j^{2n}\right)dt_\alpha^1\wedge\ldots\wedge dt_\alpha^{2m}$$

und damit folgt unter Verwendung des Satzes von Fubini im $\mathbb{R}^{2n+2m}$

$$\begin{aligned}\int_S\int_{X\times S/S}\eta &= \sum_\alpha\int_{V_\alpha} q_\alpha\left(\sum_j\int_{U_j} p_j\eta_{j\alpha}dx_j^1\wedge\ldots\wedge dx_j^{2n}\right)dt_\alpha^1\wedge\ldots\wedge dt_\alpha^{2m}\\ &= \sum_{j,\alpha}\int_{U_j}\left(\int_{V_\alpha} p_jq_\alpha\eta_{j\alpha}dt_\alpha^1\wedge\ldots\wedge dt_\alpha^{2m}\right)dx_j^1\wedge\ldots\wedge dx_j^{2n}\\ &= \sum_{j,\alpha}\int_{U_j\times V_\alpha} p_jq_\alpha\eta_{j\alpha}dt_\alpha^1\wedge\ldots\wedge dt_\alpha^{2m}\wedge dx_j^1\wedge\ldots\wedge dx_j^{2n}\\ &= \int_{X\times S}\eta,\end{aligned}$$

womit bereits alles gezeigt ist. □

Die folgende Eigenschaft ist für unsere Anwendung des Faserintegrals wesentlich:

Satz 3.7. *Das Faserintegral respektiert die p-q-Zerlegung in folgendem Sinne: Ist eine Differentialform $\eta\in\Gamma\left(X\times S,\mathcal{A}^{n+p,n+q}\left(X\times S\right)\right)$ gegeben, dann ist*

$$\int_{X\times S/S}\eta\in\Gamma\left(S,\mathcal{A}^{p,q}\left(S\right)\right).$$

Ist konkret eine Differentialform $\eta\in\Gamma\left(X\times V,\mathcal{A}^{n+p,n+q}\left(X\times S\right)\right)$ für eine holomorphe Koordinatenumgebung (V,s) auf S gegeben, welche bezüglich einer Überdeckung von X durch Koordinatenumgebungen (U_j,z_j) mit untergeordneter glatter Partition der Eins $\{p_j\}$ lokal als

$$\begin{aligned}\eta|_{U_j\times V} = \frac{1}{p!q!}\sum_{\alpha,\beta}\eta_{j\,\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}}ds^{\alpha_1}\wedge\ldots\wedge ds^{\alpha_p}\wedge ds^{\overline{\beta_1}}\wedge\ldots\wedge ds^{\overline{\beta_q}}\wedge dz_j^1\wedge dz_j^{\overline{1}}\wedge\ldots\wedge dz_j^n\wedge dz_j^{\overline{n}}\\ +\ \textit{Summanden mit weniger } dz_j\textit{-Faktoren}\end{aligned}$$

geschrieben wird, dann berechnet sich das Faserintegral zu

$$\int_{X\times S/S}\eta = \frac{1}{p!q!}\sum_{\alpha,\beta}\psi_{\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}}ds^{\alpha_1}\wedge\ldots\wedge ds^{\alpha_p}\wedge ds^{\overline{\beta_1}}\wedge\ldots\wedge ds^{\overline{\beta_q}}$$

mit den schiefsymmetrischen Koeffizienten

$$\psi_{\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}} = \sum_j\int_{U_j} p_j\eta_{j\,\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}}(s)dz_j^1\wedge dz_j^{\overline{1}}\wedge\ldots\wedge dz_j^n\wedge dz_j^{\overline{n}}.$$

Beweis. Offenbar genügt es, die zweite Aussage für Differentialformen auf einer Koordinatenumgebung (V, s) von S nachzuweisen. Wir setzen also unter Verwendung der vorherigen Notationen $\eta \in \Gamma\left(X \times V, \mathcal{A}^{n+p,n+q}(X \times S)\right)$ voraus und schreiben η lokal wie in der Formulierung der Aussage. Wegen

$$dz_j^\gamma \wedge dz_j^{\overline{\gamma}} = \left(dx_j^{2\gamma-1} + \sqrt{-1}dx_j^{2\gamma}\right) \wedge \left(dx_j^{2\gamma-1} - \sqrt{-1}dx_j^{2\gamma}\right) = -2\sqrt{-1}dx_j^{2\gamma-1} \wedge dx_j^{2\gamma}$$

gilt die Beziehung

$$dz_j^1 \wedge dz_j^{\overline{1}} \wedge \ldots \wedge dz_j^n \wedge dz_j^{\overline{n}} = \left(-2\sqrt{-1}\right)^n dx_j^1 \wedge \ldots \wedge dx_j^{2n}.$$

Der Einfachheit halber vereinbaren wir die Abkürzung $dx_j := dx_j^1 \wedge \ldots \wedge dx_j^{2n}$ und indem wir die Summanden aus $\eta|_{U_j \times V}$ mit weniger als $2n$ dz_j-Faktoren mit R bezeichnen, erhalten wir

$$\eta|_{U_j \times V} = \frac{1}{p!q!} \sum_{\alpha,\beta} \left(-2\sqrt{-1}\right)^n \eta_{j\,\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}} ds^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge ds^{\alpha_p} \wedge ds^{\overline{\beta_1}} \wedge \ldots \wedge ds^{\overline{\beta_q}} \wedge dx_j + R.$$

Um auch die ds-Faktoren reell schreiben zu können, definieren wir folgende Vorzeichen:

$$\nu_k := \begin{cases} 1 & \text{falls } k \text{ ungerade} \\ \sqrt{-1} & \text{falls } k \text{ gerade} \end{cases} \qquad \overline{\nu}_k := \begin{cases} 1 & \text{falls } k \text{ ungerade} \\ -\sqrt{-1} & \text{falls } k \text{ gerade.} \end{cases}$$

Damit schreiben wir η lokal um:

$$\begin{aligned}
\eta|_{U_j \times V} - R &= \frac{1}{p!q!} \sum_{\alpha,\beta} \left(-2\sqrt{-1}\right)^n \eta_{j\,\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}} ds^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge ds^{\alpha_p} \wedge ds^{\overline{\beta_1}} \wedge \ldots \wedge ds^{\overline{\beta_q}} \wedge dx_j \\
&= \frac{1}{p!q!} \sum_{\alpha,\beta} \left(-2\sqrt{-1}\right)^n \eta_{j\,\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}} \left(dt^{2\alpha_1-1} + \sqrt{-1}dt^{2\alpha_1}\right) \wedge ds^{\alpha_2} \wedge \ldots \wedge ds^{\overline{\beta_q}} \wedge dx_j \\
&= \frac{1}{p!q!} \sum_{k_1} \sum_{\alpha,\beta} \left(-2\sqrt{-1}\right)^n \nu_{k_1} \eta_{j\,\left\lceil \frac{k_1}{2} \right\rceil \alpha_2\ldots\alpha_p\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}} dt^{k_1} \wedge ds^{\alpha_2} \wedge \ldots \wedge ds^{\overline{\beta_q}} \wedge dx_j \\
&= \ldots \quad \text{(analog für alle } \alpha_i \text{ und } \beta_i \text{ wiederholen)} \\
&= \frac{1}{p!q!} \sum_{k} \left(-2\sqrt{-1}\right)^n \nu_{k_1} \cdots \nu_{k_p} \overline{\nu}_{k_{p+1}} \cdots \overline{\nu}_{k_{p+q}} \eta_{j\,\left\lceil \frac{k_1}{2} \right\rceil \ldots \left\lceil \frac{k_p}{2} \right\rceil \overline{\left\lceil \frac{k_{p+1}}{2} \right\rceil} \ldots \overline{\left\lceil \frac{k_{p+q}}{2} \right\rceil}} dt^{k_1} \wedge \ldots \wedge dt^{k_{p+q}} \wedge dx_j \\
&= \frac{1}{(p+q)!} \sum_{k} \eta^*_{j\,k_1\ldots k_{p+q}} dt^{k_1} \wedge \ldots \wedge dt^{k_{p+q}} \wedge dx_j.
\end{aligned}$$

Dabei haben wir für die Umformung im letzten Schritt gesetzt:

$$\eta^*_{j\,k_1\ldots k_{p+q}} = \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{p+q}} \operatorname{sgn}(\sigma) \left(-2\sqrt{-1}\right)^n \nu_{k_{\sigma(1)}} \cdots \overline{\nu}_{k_{\sigma(p+q)}} \eta_{j\,\left\lceil \frac{k_{\sigma(1)}}{2} \right\rceil \ldots \left\lceil \frac{k_{\sigma(p)}}{2} \right\rceil \overline{\left\lceil \frac{k_{\sigma(p+1)}}{2} \right\rceil} \ldots \overline{\left\lceil \frac{k_{\sigma(p+q)}}{2} \right\rceil}}.$$

Wir können nun das Faserintegral berechnen:

$$\int_{X\times S/S}\eta = \frac{1}{(p+q)!}\sum_k\left(\sum_j\int_{U_j} p_j\eta^*_{j\,k_1\dots k_{p+q}}(s)dx_j^1\wedge\dots\wedge dx_j^{2n}\right)dt^{k_1}\wedge\dots\wedge dt^{k_{p+q}}$$

$$= \frac{1}{(p+q)!}\sum_k\left(\sum_j\int_{U_j} p_j\left(\frac{1}{p!q!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{p+q}}\operatorname{sgn}(\sigma)\left(-2\sqrt{-1}\right)^n\nu_{k_{\sigma(1)}}\cdots\nu_{k_{\sigma(p)}}\overline{\nu}_{k_{\sigma(p+1)}}\cdots\overline{\nu}_{k_{\sigma(p+q)}}\right.\right.$$

$$\left.\left.\eta_{j\left\lceil\frac{k_{\sigma(1)}}{2}\right\rceil\dots\left\lceil\frac{k_{\sigma(p)}}{2}\right\rceil\overline{\left\lceil\frac{k_{\sigma(p+1)}}{2}\right\rceil}\dots\overline{\left\lceil\frac{k_{\sigma(p+q)}}{2}\right\rceil}}(s)\right)dx_j^1\wedge\dots\wedge dx_j^{2n}\right)dt^{k_1}\wedge\dots\wedge dt^{k_{p+q}}$$

$$= \frac{1}{p!q!}\sum_k\frac{1}{(p+q)!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{p+q}}\operatorname{sgn}(\sigma)\left(-2\sqrt{-1}\right)^n\nu_{k_{\sigma(1)}}\cdots\nu_{k_{\sigma(p)}}\overline{\nu}_{k_{\sigma(p+1)}}\cdots\overline{\nu}_{k_{\sigma(p+q)}}$$

$$\left(\sum_j\int_{U_j}p_j\eta_{j\left\lceil\frac{k_{\sigma(1)}}{2}\right\rceil\dots\left\lceil\frac{k_{\sigma(p)}}{2}\right\rceil\overline{\left\lceil\frac{k_{\sigma(p+1)}}{2}\right\rceil}\dots\overline{\left\lceil\frac{k_{\sigma(p+q)}}{2}\right\rceil}}(s)dx_j^1\wedge\dots\wedge dx_j^{2n}\right)dt^{k_1}\wedge\dots\wedge dt^{k_{p+q}}$$

$$= \frac{1}{p!q!}\sum_k\left(-2\sqrt{-1}\right)^n\nu_{k_1}\cdots\nu_{k_p}\overline{\nu}_{k_{p+1}}\cdots\overline{\nu}_{k_{p+q}}$$

$$\left(\sum_j\int_{U_j}p_j\eta_{j\left\lceil\frac{k_1}{2}\right\rceil\dots\left\lceil\frac{k_p}{2}\right\rceil\overline{\left\lceil\frac{k_{p+1}}{2}\right\rceil}\dots\overline{\left\lceil\frac{k_{p+q}}{2}\right\rceil}}(s)dx_j^1\wedge\dots\wedge dx_j^{2n}\right)dt^{k_1}\wedge\dots\wedge dt^{k_{p+q}}$$

$= \dots$ (wir können alle eben durchgeführten Umformungen rückgängig machen)

$$= \frac{1}{p!q!}\sum_{\alpha,\beta}\left(-2\sqrt{-1}\right)^n\left(\sum_j\int_{U_j}p_j\eta_{j\,\alpha_1\dots\alpha_p\overline{\beta_1}\dots\overline{\beta_q}}(s)dx_j^1\wedge\dots\wedge dx_j^{2n}\right)$$

$$ds^{\alpha_1}\wedge\dots\wedge ds^{\alpha_p}\wedge ds^{\overline{\beta_1}}\wedge\dots\wedge ds^{\overline{\beta_q}}$$

$$= \frac{1}{p!q!}\sum_{\alpha,\beta}\left(\sum_j\int_{U_j}p_j\eta_{j\,\alpha_1\dots\alpha_p\overline{\beta_1}\dots\overline{\beta_q}}(s)dz_j^1\wedge dz_j^{\overline{1}}\wedge\dots\wedge dz_j^n\wedge dz_j^{\overline{n}}\right)$$

$$ds^{\alpha_1}\wedge\dots\wedge ds^{\alpha_p}\wedge ds^{\overline{\beta_1}}\wedge\dots\wedge ds^{\overline{\beta_q}}.$$

Also sehen wir, dass das Faserintegral eine (p,q)-Form liefert und für Koordinatenumgebungen auf S durch die behauptete Formel berechnet werden kann. □

Als direkte Konsequenz aus dieser Feststellung ergibt sich nun, dass das Faserintegral auch mit den Operatoren ∂ und $\bar\partial$ kommutiert:

Korollar 3.8. *Für jede Differentialform $\eta\in\Gamma\left(X\times V,\mathcal{A}^{n+p,n+q}\left(X\times S\right)\right)$ gelten stets folgende Gleichungen:*

$$(i)\ \partial\int_{X\times S/S}\eta=\int_{X\times S/S}\partial\eta \qquad (ii)\ \bar\partial\int_{X\times S/S}\eta=\int_{X\times S/S}\bar\partial\eta.$$

Beweis. Aus dem vorherigen Satz 3.7 erhalten wir zunächst

$$\int_{X \times S/S} \eta \in \Gamma\left(V, \mathcal{A}^{p,q}(S)\right).$$

Indem wir die Integrierbarkeit der komplexen Struktur benutzen, berechnen wir damit

$$d \int_{X\times S/S} \eta = \left(\partial + \bar{\partial}\right) \int_{X\times S/S} \eta = \underbrace{\partial \int_{X\times S/S} \eta}_{\in \Gamma(V, \mathcal{A}^{p+1,q}(S))} + \underbrace{\bar{\partial} \int_{X\times S/S} \eta}_{\in \Gamma(V, \mathcal{A}^{p,q+1}(S))}.$$

Andererseits folgt aus Satz 3.4 sowie Satz 3.7

$$d \int_{X\times S/S} \eta = \int_{X\times S/S} d\eta = \int_{X\times S/S} \left(\partial + \bar{\partial}\right) \eta = \underbrace{\int_{X\times S/S} \partial\eta}_{\in \Gamma(V, \mathcal{A}^{p+1,q}(S))} + \underbrace{\int_{X\times S/S} \bar{\partial}\eta}_{\in \Gamma(V, \mathcal{A}^{p,q+1}(S))}.$$

Da die Summe der auftretenden Räume direkt ist, erhalten wir die Behauptung. □

3.3. Die Invarianz von Bündeleigenschaften in holomorphen Familien

In diesem Abschnitt zeigen wir, dass in den von uns betrachteten Familien einige Eigenschaften der Fasern, die für uns von großem Belang sind, nicht von der Faser abhängen. Zunächst benötigen wir die folgende technische Aussage, welche sich in [Kb87] findet:

Lemma 3.9. *Sei (X, g) eine Kählermannigfaltigkeit der Dimension n und $\omega \in \Gamma\left(X, \mathcal{A}^{1,1}(X)\right)$ die zugehörige Kählerform. Dann gilt für jede beliebige andere Form $\eta \in \Gamma\left(X, \mathcal{A}^{1,1}(X)\right)$ die Gleichung*

$$\eta \wedge \omega^{n-1} = \frac{1}{n} \Lambda_g \eta \cdot \omega^n.$$

Beweis. Es genügt, die Gleichung lokal auf einer holomorphen Koordinatenumgebung (U, z) von X nachzurechnen. Wir schreiben also lokal mit einer vereinfachten Notation

$$\eta = \sum_{\alpha,\beta} \eta_{\alpha\overline{\beta}} dz^\alpha \wedge dz^{\overline{\beta}} \quad \text{sowie} \quad \omega = \sqrt{-1} \sum_{\alpha,\beta} g_{\alpha\overline{\beta}} dz^\alpha \wedge dz^{\overline{\beta}}.$$

Damit erhalten wir zunächst die Gleichung

$$\omega^n = \left(\sqrt{-1}\right)^n \sum_{\alpha,\beta} g_{\alpha_1\overline{\beta_1}} \cdots g_{\alpha_n\overline{\beta_n}} dz^{\alpha_1} \wedge dz^{\overline{\beta_1}} \wedge \ldots \wedge dz^{\alpha_n} \wedge dz^{\overline{\beta_n}}.$$

Wir wollen die α_i und β_i ordnen. Die Idee ist, folgende Umformungen durchzuführen, von denen jede einzelne ein anderes Vorzeichen produziert:

$$\alpha_1\overline{\beta_1}\alpha_2\overline{\beta_2}\alpha_3\overline{\beta_3}\ldots\alpha_n\overline{\beta_n} \longrightarrow \alpha_1\alpha_2\overline{\beta_1\beta_2}\alpha_3\overline{\beta_3}\ldots\alpha_n\overline{\beta_n} \longrightarrow \alpha_1\alpha_2\alpha_3\overline{\beta_1\beta_2\beta_3}\ldots\alpha_n\overline{\beta_n} \longrightarrow \cdots.$$

Insgesamt entsteht das Vorzeichen $(-1)^\zeta$ mit $\zeta := \sum_{l=1}^{n-1} l$ und folglich können wir umformen

$$\begin{aligned}
\omega^n &= \left(\sqrt{-1}\right)^n \sum_{\alpha,\beta} (-1)^\zeta g_{\alpha_1\overline{\beta_1}} \cdots g_{\alpha_n\overline{\beta_n}} dz^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dz^{\alpha_n} \wedge dz^{\overline{\beta_1}} \wedge \ldots \wedge dz^{\overline{\beta_n}} \\
&= \left(\sqrt{-1}\right)^n \sum_{\alpha,\beta}{}' (-1)^\zeta \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \beta_1 & \cdots & \beta_n \end{pmatrix} g_{\alpha_1\overline{\beta_1}} \cdots g_{\alpha_n\overline{\beta_n}} \\
&\qquad dz^1 \wedge \ldots \wedge dz^n \wedge dz^{\overline{1}} \wedge \ldots \wedge dz^{\overline{n}} \\
&= \left(\sqrt{-1}\right)^n \sum_{\alpha,\beta}{}' \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \beta_1 & \cdots & \beta_n \end{pmatrix} g_{\alpha_1\overline{\beta_1}} \cdots g_{\alpha_n\overline{\beta_n}} \\
&\qquad dz^1 \wedge dz^{\overline{1}} \wedge \ldots \wedge dz^n \wedge dz^{\overline{n}},
\end{aligned}$$

wobei wir mit $\sum'$ andeuten, dass wir nur noch über verschiedene Indizes summieren, d.h. es ist jeweils $\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} = \{1, \ldots, n\}$ sowie $\beta = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\} = \{1, \ldots, n\}$ im Gegensatz dazu, dass bei $\sum$ alle α_i sowie β_i unabhängig voneinander die Menge $\{1, \ldots, n\}$ durchlaufen. Nun ist

$$\sum_{\alpha}{}' \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} g_{\alpha_1\overline{\beta_1}} \cdots g_{\alpha_n\overline{\beta_n}} = \begin{vmatrix} g_{1\overline{\beta_1}} & \cdots & g_{1\overline{\beta_n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n\overline{\beta_1}} & \cdots & g_{n\overline{\beta_n}} \end{vmatrix} = \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \beta_1 & \cdots & \beta_n \end{pmatrix} \begin{vmatrix} g_{1\overline{1}} & \cdots & g_{1\overline{n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n\overline{1}} & \cdots & g_{n\overline{n}} \end{vmatrix}$$

also erhalten wir weiter:

$$\omega^n = \left(\sqrt{-1}\right)^n \sum_{\beta}{}' \left(\operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \beta_1 & \cdots & \beta_n \end{pmatrix}\right)^2 \det(g) dz^1 \wedge dz^{\overline{1}} \wedge \ldots \wedge dz^n \wedge dz^{\overline{n}}.$$

Damit haben wir die bekannte Formel

$$\omega^n = \left(\sqrt{-1}\right)^n n! \det(g) dz^1 \wedge dz^{\overline{1}} \wedge \ldots \wedge dz^n \wedge dz^{\overline{n}} \tag{3.15}$$

hergeleitet. Auf ähnliche Weise berechnen wir nun:

$$\begin{aligned}
\eta \wedge \omega^{n-1} &= \left(\sqrt{-1}\right)^{n-1} \sum_{\alpha,\beta} \eta_{\alpha_1\overline{\beta_1}} g_{\alpha_2\overline{\beta_2}} \cdots g_{\alpha_n\overline{\beta_n}} dz^{\alpha_1} \wedge dz^{\overline{\beta_1}} \wedge \ldots \wedge dz^{\alpha_n} \wedge dz^{\overline{\beta_n}} \\
&= \left(\sqrt{-1}\right)^{n-1} \sum_{\alpha,\beta}{}' \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \beta_1 & \cdots & \beta_n \end{pmatrix} \eta_{\alpha_1\overline{\beta_1}} g_{\alpha_2\overline{\beta_2}} \cdots g_{\alpha_n\overline{\beta_n}} \\
&\qquad dz^1 \wedge dz^{\overline{1}} \wedge \ldots \wedge dz^n \wedge dz^{\overline{n}}.
\end{aligned}$$

Auch in dieser Gleichung ergibt sich eine Determinante

$$\sum_{\alpha}{}' \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} \eta_{\alpha_1\overline{\beta_1}} g_{\alpha_2\overline{\beta_2}} \cdots g_{\alpha_n\overline{\beta_n}} = \begin{vmatrix} \eta_{1\overline{\beta_1}} & g_{1\overline{\beta_2}} & \cdots & g_{1\overline{\beta_n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta_{n\overline{\beta_1}} & g_{n\overline{\beta_2}} & \cdots & g_{n\overline{\beta_n}} \end{vmatrix}$$

$$= \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \beta_1 & \cdots & \beta_n \end{pmatrix} \begin{vmatrix} g_{1\overline{1}} & \cdots & g_{1\overline{\beta_1 - 1}} & \eta_{1\overline{\beta_1}} & g_{1\overline{\beta_1+1}} & \cdots & g_{1\overline{n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n\overline{1}} & \cdots & g_{n\overline{\beta_1 - 1}} & \eta_{n\overline{\beta_1}} & g_{n\overline{\beta_1+1}} & \cdots & g_{n\overline{n}} \end{vmatrix}$$

$$= \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \beta_1 & \cdots & \beta_n \end{pmatrix} \det\left(g_1 \cdots g_{\beta_1 - 1} A_{\beta_1} g_{\beta_1 + 1} \cdots g_n\right),$$

wobei wir mit g_i und A_i die entsprechende Spalte der jeweiligen $n \times n$-Matrix $g = (g_{\alpha\overline{\beta}})_{\alpha,\beta}$ beziehungsweise $A = (\eta_{\alpha\overline{\beta}})_{\alpha,\beta}$ bezeichnen. Damit erhalten wir weiterhin mit (3.15):

$$\begin{aligned}
\eta \wedge \omega^{n-1} &= \left(\sqrt{-1}\right)^{n-1} \sum_{\beta}{}' \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \beta_1 & \cdots & \beta_n \end{pmatrix}^2 \det\left(g_1 \cdots g_{\beta_1 - 1} A_{\beta_1} g_{\beta_1 + 1} \cdots g_n\right) dz^1 \wedge \ldots \wedge dz^{\overline{n}} \\
&= \left(\sqrt{-1}\right)^{n-1} (n-1)! \sum_{\nu} \det\left(g_1 \cdots g_{\nu-1} A_\nu g_{\nu+1} \cdots g_n\right) dz^1 \wedge dz^{\overline{1}} \wedge \ldots \wedge dz^n \wedge dz^{\overline{n}} \\
&= \left(\frac{-\sqrt{-1}}{n} \sum_{\nu} \frac{\det\left(g_1 \cdots g_{\nu-1} A_\nu g_{\nu+1} \cdots g_n\right)}{\det(g)} \right) \left(\sqrt{-1}\right)^n n! \det(g) dz^1 \wedge dz^{\overline{1}} \wedge \ldots \wedge dz^n \wedge dz^{\overline{n}} \\
&= \left(\frac{-\sqrt{-1}}{n} \sum_{\nu} \frac{\det\left(g_1 \cdots g_{\nu-1} A_\nu g_{\nu+1} \cdots g_n\right)}{\det(g)} \right) \omega^n.
\end{aligned}$$

Um die Behauptung nachzuweisen, genügt es also, lokal auf (U, z) die Gleichung

$$\frac{1}{n} \Lambda_g \eta = \frac{-\sqrt{-1}}{n} \sum_{\nu} \frac{\det\left(g_1 \cdots g_{\nu-1} A_\nu g_{\nu+1} \cdots g_n\right)}{\det(g)}$$

zu zeigen. Mit $\left(g^{-1}A\right)_{\overline{\beta},\overline{\gamma}} = \sum_\alpha g^{\overline{\beta}\alpha} \eta_{\alpha\overline{\gamma}}$ finden wir zunächst

$$\Lambda_g \eta = -\sqrt{-1} \sum_{\alpha,\beta} g^{\overline{\beta}\alpha} \eta_{\alpha\overline{\beta}} = -\sqrt{-1} \sum_{\nu} \left(g^{-1}A\right)_{\overline{\nu},\overline{\nu}}.$$

Wegen $\left(g^{-1}A\right)_{\overline{\nu},\overline{\nu}} = \left(g^{-1}A_\nu\right)_\nu$ können wir $\left(g^{-1}A\right)_{\overline{\nu},\overline{\nu}}$ gerade als die ν-te Komponente der Lösung des linearen Gleichungssystems $gx = A_\nu$ interpretieren. Dies ermöglicht es uns, mit der Cramerschen Regel auf folgende Gleichung zu schließen:

$$\left(g^{-1}A\right)_{\overline{\nu},\overline{\nu}} = \frac{\det\left(g_1 \cdots g_{\nu-1} A_\nu g_{\nu+1} \cdots g_n\right)}{\det(g)}.$$

Damit finden wir nun schließlich

$$\Lambda_g \eta = -\sqrt{-1} \sum_{\nu} \left(g^{-1}A\right)_{\overline{\nu},\overline{\nu}} = -\sqrt{-1} \sum_{\nu} \frac{\det\left(g_1 \cdots g_{\nu-1} A_\nu g_{\nu+1} \cdots g_n\right)}{\det(g)}.$$

Multiplikation mit $\frac{1}{n}$ liefert also genau die behauptete Gleichung. □

Die eben bewiesene Formel können wir unmittelbar gewinnbringend einsetzen, um folgendes Resultat herzuleiten, welches für uns eine wichtige Rolle spielt und das sich ebenfalls in [Kb87] findet.

Proposition 3.10. *Sei (X, g) eine kompakte Kählermannigfaltigkeit mit Kählerform ω sowie $E \to X$ ein holomorphes Vektorbündel mit hermitescher Metrik h, welches der schwachen Einstein-Bedingung mit Faktor φ genügt. Dann gilt:*

$$\int_X c_1(E,h) \wedge \omega^{n-1} = \frac{\mathrm{rk}(E)}{2\pi n} \int_X \varphi \omega^n.$$

Beweis. Bezeichne $\Omega \in \Gamma\left(X, \mathcal{A}^{1,1}(\mathrm{End}(E))\right)$ die Krümmung der hermiteschen Metrik h auf E. Wir schreiben diese Krümmung lokal auf einer Koordinatenumgebung (U_j, z_j) von X in der Form

$$\Theta_j = \left(\sum_{\alpha,\beta} R^{\rho}_{j\,\sigma\alpha\overline{\beta}} dz_j^{\alpha} \wedge dz_j^{\overline{\beta}} \right)_{\rho,\sigma} \qquad \text{und erhalten} \qquad \left(\sqrt{-1}\Lambda_g \Omega\right)_j = \left(\sum_{\alpha,\beta} g_j^{\overline{\beta}\alpha} R^{\rho}_{j\,\sigma\alpha\overline{\beta}} \right)_{\rho,\sigma}.$$

Da das Vektorbündel E mit der hermiteschen Metrik h nach Voraussetzung der schwachen Einstein-Bedingung mit Faktor φ genügt, ist $\sqrt{-1}\Lambda_g \Omega = \varphi\, \mathrm{id}_E$, so dass lokal

$$\sum_{\alpha,\beta} g_j^{\overline{\beta}\alpha} R^{\rho}_{j\,\sigma\alpha\overline{\beta}} = \varphi \cdot \delta^{\rho}_{\sigma} \quad \text{für alle} \quad \rho, \sigma \in \{1, \ldots, \mathrm{rk}(E)\} \tag{3.16}$$

gilt. Nun ist die Differentialform $\mathrm{tr}(\Omega) \in \Gamma\left(X, \mathcal{A}^{1,1}(X)\right)$ gemäß (2.26) auf (U_j, z_j) durch

$$(\mathrm{tr}(\Omega))_j = \sum_{\alpha,\beta} \left(\sum_{\rho} R^{\rho}_{j\,\rho\alpha\overline{\beta}} \right) dz_j^{\alpha} \wedge dz_j^{\overline{\beta}}$$

gegeben, so dass wir unter Anwendung von (3.16) weiter auf die lokal gültige Gleichung

$$(\Lambda_g \mathrm{tr}(\Omega))_j = -\sqrt{-1} \sum_{\alpha,\beta} g_j^{\overline{\beta}\alpha} \left(\sum_{\rho} R^{\rho}_{j\,\rho\alpha\overline{\beta}} \right) = -\sqrt{-1} \sum_{\rho} \varphi = -\sqrt{-1}\, \mathrm{rk}(E) \varphi$$

schließen können. Damit ist die Identität $\Lambda_g \mathrm{tr}(\Omega) = -\sqrt{-1}\, \mathrm{rk}(E)\varphi$ nachgewiesen. Andererseits können wir Lemma 3.9 wegen $\mathrm{tr}(\Omega) \in \Gamma\left(X, \mathcal{A}^{1,1}(X)\right)$ anwenden und erhalten

$$\mathrm{tr}(\Omega) \wedge \omega^{n-1} = \frac{1}{n} \Lambda_g \mathrm{tr}(\Omega) \cdot \omega^n = \frac{-\sqrt{-1}\, \mathrm{rk}(E)\varphi}{n} \omega^n$$

also insbesondere auch die Gleichung

$$-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \mathrm{tr}(\Omega) \wedge \omega^{n-1} = -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \frac{-\sqrt{-1}\, \mathrm{rk}(E)\varphi}{n} \omega^n = \frac{\mathrm{rk}(E)}{2\pi n} \varphi \omega^n.$$

Wegen $c_1(E,h) = -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\mathrm{tr}(\Omega)$ (vergleiche beispielsweise [Kb87]) folgt hieraus

$$c_1(E,h) \wedge \omega^{n-1} = \frac{\mathrm{rk}(E)}{2\pi n}\varphi\omega^n$$

und da X kompakt ist, können wir diese Gleichung integrieren und erhalten mit

$$\int_X c_1(E,h) \wedge \omega^{n-1} = \int_X \frac{\mathrm{rk}(E)}{2\pi n}\varphi\omega^n = \frac{\mathrm{rk}(E)}{2\pi n}\int_X \varphi\omega^n$$

die gewünschte Beziehung. □

Ohne die bislang bereitgestellten Ergebnisse zu verwenden, zeigen wir nun ein erstes Resultat über die Unabhängigkeit gewisser Eigenschaften der Fasern in einer Familie von Vektorbündeln vom konkreten Punkt des Parameterraums. Dazu werden wir im Wesentlichen nur das in Abschnitt 3.2 eingeführte Faserintegral verwenden müssen. Mit der eben bewiesenen Formel leiten wir anschließend weitere derartige Unabhängigkeitsresultate hieraus ab.

Satz 3.11. *Sei (X,g) eine kompakte Kählermannigfaltigkeit, S eine komplexe Mannigfaltigkeit und $(F,h) \to X \times S$ eine Familie von hermiteschen, holomorphen Vektorbündeln auf X, parametrisiert durch S. Dann gilt:*

(i) Konstanz des Grades: Die Funktion $s \mapsto \deg(F_s)$ ist auf S lokal konstant.

(ii) Konstanz des Slopes: Die Funktion $s \mapsto \mu(F_s)$ ist auf S lokal konstant.

Beweis. Bezeichne ω wieder die Kählerform von (X,g) und sei $\pi_1 : X \times S \to X$ die Projektion auf den ersten Faktor. Die Krümmung von (F,h) bezeichnen wir mit $\Omega \in \Gamma\left(X \times S, \mathcal{A}^{1,1}(\mathrm{End}(F))\right)$. Gemäß Proposition 3.3 ist die Krümmung Ω_s von h_s auf der Faser F_s zu $s \in S$ gegeben durch

$$\Omega_s = \Omega|_s \in \Gamma\left(X, \mathcal{A}^{1,1}(\mathrm{End}(F_s))\right).$$

Nach [Kb87] ist ferner ein Repräsentant $c_1(F,h) \in \Gamma\left(X \times S, \mathcal{A}^2(X \times S)\right)$ der ersten Chern-Form von (F,h) gegeben durch

$$c_1(F,h) = -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\mathrm{tr}(\Omega).$$

Für einen festen Punkt $s_0 \in S$ schreiben wir diesen Repräsentanten mit den Notationen aus 3.1 lokal auf $U_j \times V$ als

$$c_1(F,h)|_{U_j \times V} = -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\sum_{\alpha,\beta}\left(\sum_\rho R^\rho_{j\,\rho\alpha\overline{\beta}}\right) dw_j^\alpha \wedge dw_j^{\overline{\beta}}.$$

Dann berechnen wir für $s \in V$ die Einschränkung $c_1(F,h)|_s$ lokal auf U_j zu

$$(c_1(F,h)|_s)|_{U_j} = -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\sum_{\alpha,\beta}\left(\sum_\rho R^\rho_{j\,\rho\alpha\overline{\beta}}(s)\right) dz_j^\alpha \wedge dz_j^{\overline{\beta}} = -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\,\mathrm{tr}(\Omega|_s)|_{U_j} = c_1(F_s,h_s)|_{U_j}$$

und haben somit gezeigt, dass für alle Punkte $s \in S$ die Gleichung $c_1(F,h)|_s = c_1(F_s,h_s)$ gilt. Nun betrachten wir den Pullback

$$\pi_1^*\left(\omega^{n-1}\right) \in \Gamma\left(X \times S, \mathcal{A}^{n-1,n-1}(X \times S)\right).$$

Da (F,h) als holomorphes Vektorbündel vorausgesetzt wurde, ist $c_1(F,h)$ eine $(1,1)$-Form und wir erhalten

$$c_1(F,h) \wedge \pi_1^*\left(\omega^{n-1}\right) \in \Gamma\left(X \times S, \mathcal{A}^{n,n}(X \times S)\right).$$

Das Faserintegral ist also anwendbar und ergibt

$$\lambda := \int_{X \times S/S} c_1(F,h) \wedge \pi_1^*\left(\omega^{n-1}\right) \in \Gamma\left(S, \mathcal{A}^{0,0}(S)\right) = \Gamma\left(S, \mathcal{A}(S)\right),$$

d.h. eine glatte Funktion auf S. Wir berechnen $\lambda(s)$ für ein beliebiges $s \in S$ und betrachten dazu die Einbettung $\iota_s : X \to X \times S$. Wegen $c_1(F_s,h_s) = c_1(F,h)|_s = \iota_s^*(c_1(F,h))$ finden wir durch Anwendung von Satz 3.5:

$$\begin{aligned}
\lambda(s) &= \left(\int_{X \times S/S} c_1(F,h) \wedge \pi_1^*\left(\omega^{n-1}\right)\right)(s) = \int_X \left(c_1(F,h) \wedge \pi_1^*\left(\omega^{n-1}\right)\right)\Big|_s \\
&= \int_X \iota_s^*\left(c_1(F,h) \wedge \pi_1^*\left(\omega^{n-1}\right)\right) = \int_X \left(\iota_s^*(c_1(F,h))\right) \wedge \left(\iota_s^*\left(\pi_1^*\left(\omega^{n-1}\right)\right)\right) \\
&= \int_X c_1(F_s,h_s) \wedge \left((\underbrace{\pi_1 \circ \iota_s}_{=\mathrm{id}_X})^*\left(\omega^{n-1}\right)\right) = \int_X c_1(F_s,h_s) \wedge \omega^{n-1} = \deg(F_s).
\end{aligned}$$

Wir haben also gezeigt, dass $\lambda(s) = \deg(F_s)$ für alle $s \in S$ gilt. Als nächstes berechnen wir unter Ausnutzung, dass das Faserintegral gemäß Satz 3.4 mit der äußeren Ableitung kommutiert

$$\begin{aligned}
d\lambda &= d\int_{X \times S/S} c_1(F,h) \wedge \pi_1^*\left(\omega^{n-1}\right) = \int_{X \times S/S} d\left(c_1(F,h) \wedge \pi_1^*\left(\omega^{n-1}\right)\right) \\
&= \int_{X \times S/S} \left(\underbrace{(dc_1(F,h))}_{=0} \wedge \pi_1^*\left(\omega^{n-1}\right) + (-1)^2 c_1(F,h) \wedge d\left(\pi_1^*\left(\omega^{n-1}\right)\right)\right) \\
&= \int_{X \times S/S} c_1(F,h) \wedge \pi_1^*\Big((\underbrace{d\omega}_{=0})^{n-1}\Big) = 0.
\end{aligned}$$

Dabei haben wir verwendet, dass $c_1(F,h)$ als Repräsentant einer Chern-Klasse und ω als Kählerform von (X,g) jeweils d-geschlossen sind. Wir sehen also, dass die Funktion λ und folglich wegen $\lambda(s) = \deg(F_s)$ auch $s \mapsto \deg(F_s)$ auf S lokal konstant ist. Damit ist der erste Teil der Behauptung gezeigt. Der zweite Teil folgt nun direkt aus der Definition

$$\mu(F_s) = \frac{\deg(F_s)}{\mathrm{rk}(F_s)},$$

da der Rang $\mathrm{rk}(F_s)$ wegen $\mathrm{rk}(F_s) = \mathrm{rk}(F)$ für alle $s \in S$ unabhängig von der Faser ist. □

Indem wir alle bisherigen Resultate dieses Abschnittes zusammenführen, erhalten wir nun die folgende Aussage, welche für unsere spätere Arbeit von zentraler Bedeutung ist:

Satz 3.12. *Sei (X, g) eine kompakte Kählermannigfaltigkeit, S eine komplexe Mannigfaltigkeit und $(F, h) \to X \times S$ eine Familie von Hermite-Einstein-Vektorbündeln auf X mit den Hermite-Einstein-Konstanten $\kappa(s)$ für $s \in S$. Dann ist die Funktion $s \mapsto \kappa(s)$ lokal konstant auf S.*

Beweis. Wir bezeichnen die Kählerform von (X, g) mit ω. Dann folgt aus Proposition 3.10, angewandt auf die Faser (F_s, h_s) über einem Punkt $s \in S$:

$$\int_X c_1(F_s, h_s) \wedge \omega^{n-1} = \frac{\mathrm{rk}(F_s)}{2\pi n} \int_X \kappa(s)\omega^n.$$

Da (F_s, h_s) in unserer Situation als Hermite-Einstein-Vektorbündel vorausgesetzt wurde, ist $\kappa(s)$ als Funktion auf X konstant und wir finden

$$\deg(F_s) = \int_X c_1(F_s, h_s) \wedge \omega^{n-1} = \frac{\mathrm{rk}(F_s)\kappa(s)}{2\pi n} \int_X \omega^n = \frac{\mathrm{rk}(F_s)\kappa(s) n!}{2\pi n} \mathrm{Vol}_g(X).$$

Wir erhalten also für $\kappa(s)$

$$\kappa(s) = \frac{2\pi}{(n-1)!\,\mathrm{Vol}_g(X)} \cdot \frac{\deg(F_s)}{\mathrm{rk}(F_s)} = \frac{2\pi}{(n-1)!\,\mathrm{Vol}_g(X)} \mu(F_s).$$

Da nach Satz 3.11 der Slope $\mu(F_s)$ als Funktion auf S lokal konstant ist, folgt aus dieser Gleichung, dass auch die Abbildung $s \mapsto \kappa(s)$ lokal konstant auf S ist. $\square$

Als weitere unmittelbare Konsequenz erhalten wir außerdem folgendes Resultat:

Satz 3.13. *Sei (X, g) eine kompakte Kählermannigfaltigkeit, S eine komplexe Mannigfaltigkeit und $(F, h) \to X \times S$ eine Familie von hermiteschen, holomorphen Vektorbündeln auf X. Dann gilt: Ist $\dim X = 1$, so ist die Euler-Poincaré-Charakteristik*

$$\chi(X, F_s) = \sum_{j=0}^{\dim X} (-1)^j \dim H^j(X, \mathcal{O}(F_s))$$

als Funktion auf S lokal konstant.

Beweis. Für $s \in S$ liefert die Formel von Riemann-Roch auf der Faser zu s die Gleichung

$$\chi(X, F_s) = \deg(F_s) + \mathrm{rk}(F_s)\,(1 - g(X))\,.$$

Da nach Satz 3.11 $\deg(F_s)$ und $\mathrm{rk}(F_s)$ als Funktionen auf S lokal konstant sind und das Geschlecht $g(X)$ nur von X abhängt, muss auch $\chi(X, F_s)$ als Funktion auf S lokal konstant sein. $\square$

Die Voraussetzung, dass X eine Riemannsche Fläche ist, spielt für die Gültigkeit dieser Aussage bekanntlich keine Rolle. Einen Beweis findet der Leser beispielsweise in [KS60]. Wir geben der Vollständigkeit halber einen Beweis an, welcher auf einer direkten Verallgemeinerung der eben verwendeten Methode beruht. Zu diesem Zweck ist die Hirzebruch-Riemann-Roch-Formel erforderlich und um diese notieren zu können, erinnern wir zunächst kurz an den Chern-Charakter sowie die Todd-Klasse eines holomorphen Vektorbündels. Sei also $E \to X$ ein holomorphes Vektorbündel mit hermitescher Metrik h auf der kompakten, komplexen Mannigfaltigkeit X.

Der Chern-Charakter $\mathrm{ch}(E) \in H^*(X, \mathbb{C})$ im Kohomologiering wird durch die Form

$$\mathrm{tr}\left(\exp\left(\frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}}\Omega\right)\right) \tag{3.17}$$

repräsentiert, wobei Ω die Krümmung von (E, h) bezeichnet. Wegen der Graduierung

$$H^*(X, \mathbb{C}) = \bigoplus_{k=0}^{2n} H^k(X, \mathbb{C})$$

des Kohomologierings zerfällt $\mathrm{ch}(E)$ in homogene Bestandteile

$$\mathrm{ch}(E) = \mathrm{ch}_0(E) + \ldots + \mathrm{ch}_n(E) \quad \text{mit} \quad \mathrm{ch}_k(E) \in H^{2k}(X, \mathbb{C}). \tag{3.18}$$

Repräsentanten dieser Bestandteile sind jeweils gegeben durch

$$\mathrm{ch}_k(E) = \left[\frac{1}{k!}\left(\frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}}\right)^k \sum_j \Theta^{j_1}_{j_2} \wedge \Theta^{j_2}_{j_3} \wedge \ldots \wedge \Theta^{j_k}_{j_1}\right]. \tag{3.19}$$

Für Hintergründe und ausführliche Rechnungen vergleiche man [Kb87].

Um die Todd-Klassen des Vektorbündels E definieren zu können, führen wir zunächst folgende formale Potenzreihenentwicklung durch:

$$\frac{\det(tB)}{\det(\mathrm{id} - \exp(-tB))} = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(B) t^k. \tag{3.20}$$

Mit den durch diese Entwicklung eindeutig bestimmten homogenen Polynomen P_k werden nun die Todd-Klassen von E definiert:

$$\mathrm{td}_k(E) := \left[P_k\left(\frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}}\Omega\right)\right] \in H^{2k}(X, \mathbb{C}). \tag{3.21}$$

Die totale Todd-Klasse ist dann wieder gegeben durch

$$\mathrm{td}(E) := \mathrm{td}_0(E) + \mathrm{td}_1(E) + \ldots \in H^*(X, \mathbb{C}). \tag{3.22}$$

Für die Mannigfaltigkeit X selbst werden die Todd-Klassen $\mathrm{td}_k(X)$ und $\mathrm{td}(X)$ als Todd-Klassen des Tangentialbündels von X definiert, indem man irgendeine hermitesche Metrik wählt. Für weitere Details vergleiche man [Hu04].

Mit diesen Definitionen können wir nun folgende Verallgemeinerung der Formel von Riemann-Roch zitieren (vergleiche beispielsweise [Hu04]):

Theorem 3.14 (Hirzebruch-Riemann-Roch)**.** *Sei X eine kompakte, komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension n und $E \to X$ ein holomorphes Vektorbündel. Dann gilt*

$$\chi(X, E) = \int_X (\mathrm{ch}(E) \cdot \mathrm{td}(X))_{2n} \,,$$

wobei nur der Formenanteil des maximalen Grades $2n$ zu integrieren ist.

Damit können wir schließlich die angesprochene Verallgemeinerung von Satz 3.13 beweisen:

Satz 3.15. *Sei (X, g) eine kompakte Kählermannigfaltigkeit, S eine komplexe Mannigfaltigkeit und $(F, h) \to X \times S$ eine Familie von hermiteschen, holomorphen Vektorbündeln auf X. Dann ist die Euler-Poincaré-Charakteristik der Fasern*

$$\chi(X, F_s) = \sum_{j=0}^{\dim X} (-1)^j \dim H^j(X, \mathcal{O}(F_s))$$

als Funktion auf S lokal konstant.

Beweis. Bezeichne $\Omega \in \Gamma\left(X \times S, \mathcal{A}^{1,1}(\mathrm{End}(F))\right)$ die Krümmung von h. Mittels einer lokalen Rechnung erhalten wir aus (3.19) für alle $s \in S$ und $0 \leqslant k \leqslant n$ die Gleichung $\mathrm{ch}_k(F)|_s = \mathrm{ch}_k(F_s)$ für die Repräsentanten der Chern-Charaktere. Da ferner stets

$$\mathrm{ch}_k(F) \in \Gamma\left(X \times S, \mathcal{A}^{2k}(X \times S)\right) \quad \text{sowie} \quad \mathrm{td}_{n-k}(X) \in \Gamma\left(X, \mathcal{A}^{2(n-k)}(X)\right)$$

gilt, folgt, indem wir mit der Projektion $\pi_1 : X \times S \to X$ die Abkürzung

$$\omega_{n-k} := \pi_1^*(\mathrm{td}_{n-k}(X)) \in \Gamma\left(X \times S, \mathcal{A}^{2(n-k)}(X \times S)\right)$$

vereinbaren, die Beziehung

$$\mathrm{ch}_k(F) \wedge \omega_{n-k} \in \Gamma\left(X \times S, \mathcal{A}^{2k+2(n-k)}(X \times S)\right) = \Gamma\left(X \times S, \mathcal{A}^{2n}(X \times S)\right).$$

Da es sich stets um $2n$-Formen handelt, können wir das Faserintegral dieser Differentialformen bilden und erhalten mit

$$f_k := \int_{X \times S/S} \mathrm{ch}_k(F) \wedge \omega_{n-k} \in \Gamma\left(S, \mathcal{A}^0(S)\right)$$

jeweils eine glatte Funktion auf S. In einem beliebigen Punkt $s \in S$ berechnen wir mit Satz 3.5 für diese Funktionen:

$$\begin{aligned} f_k(s) &= \left(\int_{X \times S/S} \mathrm{ch}_k(F) \wedge \omega_{n-k}\right)(s) = \int_X \iota_s^*\left(\mathrm{ch}_k(F) \wedge \omega_{n-k}\right) = \int_X \left(\iota_s^*(\mathrm{ch}_k(F))\right) \wedge \left(\iota_s^*(\omega_{n-k})\right) \\ &= \int_X \mathrm{ch}_k(F)|_s \wedge (\pi_1 \circ \iota_s)^*(\mathrm{td}_{n-k}(X))) = \int_X \mathrm{ch}_k(F_s) \wedge \mathrm{td}_{n-k}(X). \end{aligned}$$

Wir haben also gezeigt, dass

$$f_k(s) = \int_X \mathrm{ch}_k(F_s) \wedge \mathrm{td}_{n-k}(X) \qquad \text{für alle } s \in S \text{ und } 0 \leqslant k \leqslant n$$

gilt. Mit der Hirzebruch-Riemann-Roch-Formel aus Theorem 3.14 erhalten wir nun für jeden beliebigen Punkt $s \in S$

$$\sum_{k=0}^{n} f_k(s) = \int_X \sum_{k=0}^{n} \mathrm{ch}_k(F_s) \wedge \mathrm{td}_{n-k}(X) = \int_X (\mathrm{ch}(F_s) \cdot \mathrm{td}(X))_{2n} = \chi(X, F_s),$$

also finden wir für die Euler-Poincaré-Charakteristik der Fasern die Gleichung

$$\chi(X, F_s) = \sum_{k=0}^{n} f_k(s) \qquad \text{für alle } s \in S.$$

Mit diesen Vorbereitungen berechnen wir schließlich mit Satz 3.4:

$$\begin{aligned}
d\chi(X, F_s) &= d\left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right) = \sum_{k=0}^{n} d\left(\int_{X\times S/S} \mathrm{ch}_k(F) \wedge \omega_{n-k}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} d \int_{X\times S/S} \mathrm{ch}_k(F) \wedge \pi_1^*(\mathrm{td}_{n-k}(X)) = \sum_{k=0}^{n} \int_{X\times S/S} d\left(\mathrm{ch}_k(F) \wedge \pi_1^*(\mathrm{td}_{n-k}(X))\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \int_{X\times S/S} \Big(\underbrace{(d\,\mathrm{ch}_k(F))}_{=0} \wedge \pi_1^*(\mathrm{td}_{n-k}(X)) + (-1)^{2k}\mathrm{ch}_k(F) \wedge d\left(\pi_1^*(\mathrm{td}_{n-k}(X))\right)\Big) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \int_{X\times S/S} (-1)^{2k}\mathrm{ch}_k(F) \wedge \pi_1^*\underbrace{(d\,\mathrm{td}_{n-k}(X))}_{=0} = 0.
\end{aligned}$$

Dabei haben wir benutzt, dass die beiden Faktoren verschwinden müssen, da es sich jeweils um Repräsentanten von Kohomologieklassen in einer de Rham-Kohomologie handelt. Es gilt also $d\chi(X, F_s) = 0$, so dass $s \mapsto \chi(X, F_s)$ als Funktion auf S lokal konstant ist. □

3.4. Die Kodaira-Spencer-Abbildung für Familien holomorpher Vektorbündel

In diesem Abschnitt konstruieren wir die Kodaira-Spencer-Abbildung für Familien holomorpher Vektorbündel, welche es ermöglicht, infinitesimale Deformationen fester Bündel zu beschreiben. Außerdem leiten wir zumindest für Familien hermitescher, holomorpher Vektorbündel konkrete Repräsentanten für ihre Darstellung in der Dolbeault-Kohomologie her. Wir wiederholen zu Beginn kurz die Kohomologietheorie von Garben abelscher Gruppen auf einem parakompakten Hausdorffraum nach Čech, um unsere Notation diesbezüglich festzulegen. Dazu orientieren wir uns an der Vorgehensweise aus [MK71].

Es sei also zunächst X ein parakompakter Hausdorffraum und $\mathcal{F}$ eine Garbe abelscher Gruppen auf X. Weiter fixieren wir mit $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j\in J}$ eine lokal endliche, offene Überdeckung von X und definieren für $q \geqslant 0$ eine q-Kokette bezüglich der Überdeckung $\mathcal{U}$ als Familie $\sigma = \{\sigma_{j_0\dots j_q}\}$ von Schnitten $\sigma_{j_0\dots j_q} \in \Gamma\left(U_{j_0} \cap \ldots \cap U_{j_q}, \mathcal{F}\right)$, welche schiefsymmetrisch in den $j_0, \ldots, j_q$ sind, die also

$$\sigma_{j_{\tau(0)}\cdots j_{\tau(q)}} = \operatorname{sgn}(\tau)\sigma_{j_0\dots j_q} \quad \text{für alle} \quad \tau \in \mathfrak{S}_{q+1}$$

erfüllen. Wir bezeichnen die Menge aller solchen q-Koketten bezüglich der Überdeckung $\mathcal{U}$ mit $\mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ und bemerken, dass es sich dabei um eine abelsche Gruppe handelt, wenn die Gruppenverknüpfungen von $\Gamma\left(U_{j_0} \cap \ldots \cap U_{j_q}, \mathcal{F}\right)$ elementweise übernommen werden. Als nächstes definieren wir eine Korandabbildung

$$\delta : \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{C}^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \quad \text{durch} \quad \delta(\sigma)_{j_0\dots j_{q+1}} := \sum_{k=0}^{q+1} (-1)^k \, \sigma_{j_0\dots\widehat{j_k}\dots j_{q+1}}\Big|_{U_{j_0}\cap\ldots\cap U_{j_{q+1}}}.$$

Damit ist δ ein Gruppenhomomorphismus, welcher $\delta \circ \delta = 0$ erfüllt, und folglich erhalten wir insgesamt einen Kokettenkomplex bezüglich der Überdeckung $\mathcal{U}$:

$$\mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} \ldots \xrightarrow{\delta} \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} \mathcal{C}^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} \ldots . \tag{3.23}$$

Wir können also die Kohomologie von $\mathcal{F}$ bezüglich der Überdeckung $\mathcal{U}$ als Kohomologie dieses Kokettenkomplexes definieren, d.h. vermöge der Untergruppen

$$Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := \operatorname{kern}(\mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} \mathcal{C}^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})), \qquad B^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := \operatorname{im}(\mathcal{C}^{q-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}))$$

der q-Kozykel sowie der q-Koränder wird die q-te Kohomologiegruppe von $\mathcal{F}$ bezüglich $\mathcal{U}$ definiert durch:

$$H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \Big/ B^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \,. \tag{3.24}$$

Wir haben hiermit zu jeder lokal endlichen, offenen Überdeckung $\mathcal{U}$ von X eine Kohomologie von $\mathcal{F}$ bezüglich der Überdeckung konstruiert.

Sind nun $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i\in I}$ und $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j\in J}$ zwei solche Überdeckungen, dann nennen wir $\mathcal{V}$ eine Verfeinerung von $\mathcal{U}$, falls es eine Abbildung $s : I \to J$ gibt, so dass $V_i \subset U_{s(i)}$ für alle $i \in I$ gilt. In diesem Fall schreiben wir $\mathcal{U} < \mathcal{V}$ und wir stellen fest, dass $<$ eine Halbordnung auf der Menge $\mathfrak{U}_X$ aller lokal endlichen, offenen Überdeckungen von X ist. Da wir für alle $\mathcal{V}, \mathcal{U} \in \mathfrak{U}_X$ eine gemeinsame Verfeinerung $\mathcal{W} \in \mathfrak{U}_X$ mit $\mathcal{V} < \mathcal{W}$ sowie $\mathcal{U} < \mathcal{W}$ konstruieren können, ist $(\mathfrak{U}_X, <)$ sogar eine gerichtete Menge. Sind nun zwei Elemente $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i\in I}$ und $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j\in J}$ aus $\mathfrak{U}_X$ mit $\mathcal{U} < \mathcal{V}$ vermöge $s : I \to J$ gegeben, dann definieren wir eine Abbildung

$$\pi_s : \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{C}^q(\mathcal{V}, \mathcal{F}) \quad \text{durch} \quad \pi_s(\sigma)_{i_0\dots i_q} := \sigma_{s(i_0)\dots s(i_q)}\Big|_{V_{i_0}\cap\ldots\cap V_{i_q}}. \tag{3.25}$$

Wegen $\mathcal{U} < \mathcal{V}$ ist π_s wohldefiniert und man überlegt sich leicht, dass diese Abbildung sogar ein Gruppenhomomorphismus mit $\delta \circ \pi_s = \pi_s \circ \delta$ ist und folglich Anlass zu einem Gruppenhomomorphismus

$$\pi^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}} : H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow H^q(\mathcal{V}, \mathcal{F}) \tag{3.26}$$

gibt. Außerdem überzeugt man sich davon, dass dieser Homomorphismus auf der Kohomologie nicht von der Abbildung s abhängt, bezüglich welcher $\mathcal{U} < \mathcal{V}$ gilt.

Zusammenfassend ist $(\mathfrak{U}_X, <)$ eine gerichtete Menge und für jedes feste $q \geqslant 0$ ist jedem $\mathcal{U} \in \mathfrak{U}_X$ die abelsche Gruppe $H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ zugeordnet, wobei jeweils zu $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathfrak{U}_X$ mit $\mathcal{U} < \mathcal{V}$ ein Gruppenhomomorphismus $\pi^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}}$ zwischen den $\mathcal{U}$ und $\mathcal{V}$ zugeordneten abelschen Gruppen existiert. Da man für diese Homomorphismen mühelos die Identitäten

$$\begin{aligned}
&\pi^{\mathcal{U}}_{\mathcal{U}} = \mathrm{id} && \text{für alle } \mathcal{U} \in \mathfrak{U}_X, \\
&\pi^{\mathcal{U}}_{\mathcal{W}} = \pi^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}} \circ \pi^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}} && \text{für alle } \mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W} \in \mathfrak{U}_X \text{ mit } \mathcal{U} < \mathcal{V} < \mathcal{W}
\end{aligned}$$

nachweist, liegt insgesamt ein gerichtetes System abelscher Gruppen vor. Es existiert also stets der direkte Limes

$$H^q(X, \mathcal{F}) := \varinjlim_{\mathcal{U} \in \mathfrak{U}_X} H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \tag{3.27}$$

und dieser ist eine abelsche Gruppe, die q-te Čechkohomologiegruppe mit Werten in $\mathcal{F}$.

Wir wollen kurz einsehen, dass $H^q(X, \cdot)$ für jedes $q \geqslant 0$ ein kovarianter Funktor der Kategorie der Garben abelscher Gruppen über X in die Kategorie der abelschen Gruppen ist und müssen zu diesem Zweck noch angeben, wie $H^q(X, \cdot)$ auf Morphismen wirkt. Sei also $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Morphismus zwischen zwei Garben abelscher Gruppen. Ist für eine feste Überdeckung $\mathcal{U} \in \mathfrak{U}_X$ eine Kokette $\sigma = \{\sigma_{j_0 \ldots j_q}\} \in \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ mit $\sigma_{j_0 \ldots j_q} \in \Gamma\big(U_{j_0} \cap \ldots \cap U_{j_q}, \mathcal{F}\big)$ gegeben, dann ist jeweils $f \circ \sigma_{j_0 \ldots j_q} \in \Gamma\big(U_{j_0} \cap \ldots \cap U_{j_q}, \mathcal{G}\big)$, so dass wir eine Abbildung

$$\mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \quad \text{mittels} \quad \{\sigma_{j_0 \ldots j_q}\} \longmapsto \{f \circ \sigma_{j_0 \ldots j_q}\}$$

erhalten. Da diese die Gruppenstrukturen resprektiert und ferner mit den Korandabbildungen kommutiert, ist sie ein Komplexhomomorphismus und gibt damit Anlass zu einer Abbildung

$$f_{\mathcal{U}} : H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow H^q(\mathcal{U}, \mathcal{G})$$

auf der Ebene der Kohomologie dieser Kokettenkomplexe bezüglich $\mathcal{U}$. Sind nun $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathfrak{U}_X$ mit $\mathcal{U} < \mathcal{V}$ gegeben, dann rechnet man nach, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \arrow[r, "f_{\mathcal{U}}"] \arrow[d, "\pi^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}}"'] & H^q(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \arrow[d, "\pi^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}}"] \\
H^q(\mathcal{V}, \mathcal{F}) \arrow[r, "f_{\mathcal{V}}"] & H^q(\mathcal{V}, \mathcal{G})
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Die Familie $\{f_{\mathcal{U}}\}_{\mathcal{U} \in \mathfrak{U}_X}$ ist also ein Homomorphismus gerichteter Systeme abelscher Gruppen und induziert entsprechend einen Homomorphismus

$$H^q(X, f) : H^q(X, \mathcal{F}) = \varinjlim_{\mathcal{U} \in \mathfrak{U}_X} H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow \varinjlim_{\mathcal{U} \in \mathfrak{U}_X} H^q(\mathcal{U}, \mathcal{G}) = H^q(X, \mathcal{G}) \tag{3.28}$$

der direkten Limiten dieser Systeme. Man überzeugt sich unmittelbar davon, dass $H^q(X, \cdot)$ damit tatsächlich ein kovarianter Funktor ist.

Da wir X als parakompakten Hausdorffraum vorausgesetzt haben, kann man nachweisen, dass die für $q \geqslant 0$ konstruierten Funktoren $H^q(X, \cdot\,)$ von der Kategorie der Garben abelscher Gruppen über X in die Kategorie der abelschen Gruppen die Axiome einer Garbenkohomologietheorie auf X erfüllen. Wegen der Einzigkeit dieser Kohomologietheorie bis auf Isomorphie ist diese Theorie folglich zu allen anderen Ansätzen, wie etwa der Garbenkohomologie mit welken Auflösungen, isomorph. Wir haben den Ansatz nach Čech gewählt, da er sich gut zum konkreten Rechnen mit der Kohomologie eignet und verweisen wegen weiterer Details auf [GR65].

Nachdem wir unsere Notationen zur Čech-Kohomologie festgelegt haben, kommen wir zur Konstruktion der Kodaira-Spencer-Abbildung nach [FK74]. Dazu sei von nun an X eine kompakte, komplexe Mannigfaltigkeit, S eine komplexe Mannigfaltigkeit und $\pi : F \to X \times S$ eine Familie holomorpher Vektorbündel vom Rang r auf X, parametrisiert durch S. In einem festen Punkt $s_0 \in S$ des Parameterraums ist die Kodaira-Spencer-Abbildung von der Form

$$\rho_{s_0} : T_{s_0}S \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}\,(\mathrm{End}(F_{s_0}))), \tag{3.29}$$

wobei $T_{s_0}S$ den holomorphen Tangentialraum von S in s_0 bezeichnet. Zunächst können wir ganz analog zu 3.1 gute Trivialisierungen für die vorgelegte Familie konstruieren, wobei wir in diesem Zusammenhang darauf verzichten, die konstruierten Mengen durch geeignete Verkleinerung als holomorphe Koordinatenumgebungen auf X beziehungsweise S vorauszusetzen. Wir halten also fest: Unter einer guten Trivialisierung verstehen wir eine endliche Überdeckung $\{U_j\}_{j\in J}$ von X durch offene Mengen U_j und eine offene Menge $V \subset S$ mit $s_0 \in V$, so dass die Familie $\pi : F \to X \times S$ jeweils über $U_j \times V$ vermöge $f_j : \pi^{-1}(U_j \times V) \to (U_j \times V) \times \mathbb{C}^r$ trivialisiert werden kann. In dieser Situation wird $F|_{X\times V} \to X \times V$ lokal durch die Transitionsfunktionen $f_{jk} : (U_j \times V) \cap (U_k \times V) \to \mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$ mit $f_{jk}((x,t)) = \pi_2 \circ f_j \circ f_k^{-1}((x,t),\cdot)$ beschrieben. Außerdem kann für $t \in V$ die Faser $\pi' : F_t \to X$, wie mit Proposition 3.3 gezeigt, jeweils über U_j vermöge $f_j(t) : (\pi')^{-1}(U_j) \to U_j \times \mathbb{C}^r$ mit $(x,e) \mapsto (x, \pi_2(f_j(e)))$ trivialisiert werden und für die zugehörigen Transitionsfunktionen $f_{jk}(t) : U_j \cap U_k \to \mathrm{GL}(r,\mathbb{C})$ gilt $f_{jk}(t)(x) = f_{jk}(x,t)$. Die Bezeichnungen einer solchen guten Trivialisierung fassen wir in einem Diagramm der Gestalt

$$\begin{tikzcd}
U_j \times \mathbb{C}^r \arrow[dr, "\pi_2"] & F_t|_{U_j} \arrow[l, "f_j(t)"'] \arrow[d, "\pi'"'] & F|_{U_j \times V} \arrow[r, "f_j"] \arrow[d, "\pi"] & (U_j \times V) \times \mathbb{C}^r \arrow[dl, "\pi_2"'] \\
& U_j \arrow[r, "\iota_t"] & U_j \times V &
\end{tikzcd}$$

zusammen. Sei nun $v \in T_{s_0}S$ ein Tangentialvektor. Wir können v als Derivation der $\mathbb{C}$-Algebra

$$\mathcal{O}_{S,s_0} = \varinjlim_{\substack{W \subset S \\ s_0 \in W}} \Gamma\,(W, \mathcal{O}\,(S)) \tag{3.30}$$

auffassen, d.h. als $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $\mathcal{O}_{S,s_0} \to \mathbb{C}$ mit $v(f \cdot g) = v(f) \cdot g(s_0) + f(s_0) \cdot v(g)$. Für einen festen Punkt $x \in U_j \cap U_k$ betrachten wir die holomorphe Funktion $V \to \mathbb{C}^{r\times r}$, $t \mapsto f_{jk}(x,t)$. Indem wir die Derivation v komponentenweise anwenden, erhalten wir die auf $U_j \cap U_k$ offenbar holomorphe Funktion

$$U_j \cap U_k \longrightarrow \mathbb{C}^{r\times r}, \qquad x \longmapsto v(f_{jk}(x, \cdot\,)). \tag{3.31}$$

Von dieser Beobachtung ausgehend definieren wir nun

$$v_{jk} : (U_j \cap U_k) \times \mathbb{C}^r \longrightarrow (U_j \cap U_k) \times \mathbb{C}^r, \qquad (x, e) \longmapsto (x, v(f_{jk}(x, \cdot\,)) \cdot e)$$

und erhalten damit zu dem anfangs gewählten Tangentialvektor $v \in T_{s_0}S$ vermöge

$$\sigma_{jk} := f_j(s_0)^{-1} \circ v_{jk} \circ f_k(s_0) \tag{3.32}$$

einen Endomorphismus $\sigma_{jk} \in \Gamma(U_j \cap U_k, \mathcal{O}(\mathrm{End}(F_{s_0})))$. Da es für das Rechnen mit diesen Endomorphismen wesentlich ist, weisen wir noch einmal explizit darauf hin, dass mit dieser Definition die in (3.31) angegebene Funktion eine Koordinatendarstellung von σ_{jk} bezüglich $f_k(s_0)$-Koordinaten auf dem Definitionsbereich und $f_j(s_0)$-Koordinaten auf dem Bildbereich des Endomorphismus ist. Diese Koordinaten bezeichnen wir kurz als $(f_j f_k)$-Koordinaten. Lesen wir jetzt die Gleichung $f_{jk}(x,t)f_{kj}(x,t) = \mathrm{id}$ aus (2.3) als Gleichung für Funktionen in $t \in V$, dann erhalten wir für alle $x \in U_j \cap U_k$

$$0 = v(f_{jk}(x,\cdot))f_{kj}(x,s_0) + f_{jk}(x,s_0)v(f_{kj}(x,\cdot))$$

und damit durch Umformen

$$v(f_{kj}(x,\cdot)) = -f_{jk}^{-1}(x,s_0)v(f_{jk}(x,\cdot))f_{kj}(x,s_0) = -f_{kj}(x,s_0)v(f_{jk}(x,\cdot))f_{kj}(x,s_0). \tag{3.33}$$

Wir schreiben nun den Endomorphismus σ_{kj} durch entsprechende Koordinatentransformation der Darstellung in $(f_k f_j)$-Koordinaten, welche wir aus (3.31) durch Vertauschen der Indizes erhalten, lokal in $(f_j f_k)$-Koordinaten um und finden dabei mit obiger Gleichung (3.33)

$$f_{jk}(x,s_0)v(f_{kj}(x,\cdot)f_{jk}(x,s_0) = -v(f_{jk}(x,\cdot)),$$

also gerade die Koordinatendarstellung von $-\sigma_{jk}$. Damit ist gezeigt, dass für alle Indizes stets $\sigma_{kj} = -\sigma_{jk}$ gilt. Mit $\sigma = \{\sigma_{jk}\}$ ist folglich $\sigma \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}(\mathrm{End}(F_{s_0}))$ eine 1-Kokette und wir behaupten, dass $\delta\sigma = 0$ gilt, d.h. dass $\sigma \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}(\mathrm{End}(F_{s_0}))$ sogar ein 1-Kozykel ist. Um dies nachzuweisen schließen wir für $x \in U_j \cap U_k \cap U_l$ mit der Identität $f_{jk}(x,t)f_{kl}(x,t)f_{lj}(x,t) = \mathrm{id}$ aus (2.3) durch Anwenden der Derivation v auf die Beziehung

$$0 = v(f_{jk}(x,\cdot))f_{kl}(x,s_0)f_{lj}(x,s_0) + f_{jk}(x,s_0)v(f_{kl}(x,\cdot))f_{lj}(x,s_0) + f_{jk}(x,s_0)f_{kl}(x,s_0)v(f_{lj}(x,\cdot)).$$

Setzen wir noch die Gleichung $v(f_{lj}(x,\cdot)) = -f_{lj}(x,s_0)v(f_{jl}(x,\cdot))f_{lj}(x,s_0)$, welche analog zu (3.33) für $x \in U_j \cap U_l$ gültig ist, in dieses Ergebnis ein, dann finden wir:

$$\begin{aligned} 0 &= v(f_{jk}(x,\cdot))f_{kl}(x,s_0)f_{lj}(x,s_0) + f_{jk}(x,s_0)v(f_{kl}(x,\cdot))f_{lj}(x,s_0) \\ &\quad - f_{jk}(x,s_0)f_{kl}(x,s_0)f_{lj}(x,s_0)v(f_{jl}(x,\cdot))f_{lj}(x,s_0) \\ &= v(f_{jk}(x,\cdot))f_{kj}(x,s_0) + f_{jk}(x,s_0)v(f_{kl}(x,\cdot))f_{lj}(x,s_0) - v(f_{jl}(x,\cdot))f_{lj}(x,s_0). \end{aligned}$$

Der entstandene Ausdruck entspricht nun aber der Darstellung des auf $U_j \cap U_k \cap U_l$ definierten Endomorphismus $\sigma_{kl} - \sigma_{jl} + \sigma_{jk}$ in $(f_j f_j)$-Koordinaten, so dass $(\delta\sigma)_{jkl} = \sigma_{kl} - \sigma_{jl} + \sigma_{jk} = 0$ und damit wie behauptet $\delta\sigma = 0$ gilt. σ ist also tatsächlich ein 1-Kozykel.

Insgesamt haben wir zu jedem holomorphen Tangentialvektor $v \in T_{s_0}S$ im Punkt s_0 einen 1-Kozykel $\sigma(v) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}\,(\mathrm{End}(F_{s_0}))$ bezüglich einer guten Trivialisierung konstruiert. Dieser induziert ein Element

$$\rho_{s_0}(v) \in H^1(X, \mathcal{O}\,(\mathrm{End}(F_{s_0}))) \tag{3.34}$$

in der Kohomologie. Wir müssen jetzt noch zeigen, dass dieses Element nicht von der Wahl der guten Trivialisierung unserer Konstruktion abhängt. Dazu gehen wir in mehreren Schritten vor, wobei wir stets einen festen Tangentialvektor $v \in T_{s_0}S$ betrachten.

Zunächst zeigen wir, dass das konstruierte Element in der Kohomologie nicht von der Wahl der Trivialisierung bei festen unterliegenden Mengen abhängt. Es seien also zwei gute Trivialisierungen mit denselben unterliegenden Mengen

$$\begin{tikzcd}
U_j \times \mathbb{C}^r \arrow[dr, "\pi_2"] & F_t|_{U_j} \arrow[l, "f_j(t)"'] \arrow[d, "\pi'"'] & F|_{U_j \times V} \arrow[r, "f_j"] \arrow[d, "\pi"] & (U_j \times V) \times \mathbb{C}^r \arrow[dl, "\pi_2"'] \\
 & U_j \arrow[r, "\iota_t"] & U_j \times V & \\
U_j \times \mathbb{C}^r \arrow[ur, "\pi_2"] & F_t|_{U_j} \arrow[l, "g_j(t)"] \arrow[u, "\pi'"] & F|_{U_j \times V} \arrow[r, "g_j"] \arrow[u, "\pi"'] & (U_j \times V) \times \mathbb{C}^r \arrow[ul, "\pi_2"]
\end{tikzcd}$$

gegeben. Gemäß unserer Konstruktion geben diese Trivialisierungen Anlass zu den 1-Kozykeln $\sigma = \{\sigma_{jk}\} \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}\,(\mathrm{End}(F_{s_0}))$ sowie $\tau = \{\tau_{jk}\} \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}\,(\mathrm{End}(F_{s_0}))$, wobei σ_{jk} in $(f_j f_k)$-Koordinaten durch die Funktion $U_j \cap U_k \to \mathbb{C}^{r \times r}$ mit $x \mapsto v(f_{jk}(x, \cdot))$ und τ_{jk} in $(g_j g_k)$-Koordinaten durch $U_j \cap U_k \to \mathbb{C}^{r \times r}$ mit $x \mapsto v(g_{jk}(x, \cdot))$ beschrieben wird. Es genügt zu zeigen, dass es eine 0-Kokette $\mu \in \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}\,(\mathrm{End}(F_{s_0}))$ gibt, so dass $\sigma = \tau + \delta\mu$ gilt, da in diesem Fall von σ und τ dasselbe Element in der Kohomologie $H^1(X, \mathcal{O}\,(\mathrm{End}(F_{s_0})))$ induziert wird. Zunächst vereinbaren wir für den Koordinatenwechsel von g_j- in f_j-Koordinaten die Abbildung

$$(fg)_j : U_j \times V \longrightarrow \mathrm{GL}(r, \mathbb{C}) \quad \text{mit} \quad (fg)_j((x,t)) := \pi_2 \circ f_j \circ g_j^{-1}((x,t), \cdot) \tag{3.35}$$

und analog bezeichne $(gf)_j$ den Koordinatenwechsel von f_j- in g_j-Koordinaten. Ferner sei

$$w_j : U_j \times \mathbb{C}^r \longrightarrow U_j \times \mathbb{C}^r, \qquad (x, e) \longmapsto (x, -v((fg)_j(x, \cdot))(gf)_j(x, s_0) \cdot e)$$

und damit erhalten wir einen Endomorphismus über U_j vermöge

$$\mu_j := f_j(s_0)^{-1} \circ w_j \circ f_j(s_0) \in \Gamma\,(U_j, \mathcal{O}\,(\mathrm{End}(F_{s_0})))\,, \tag{3.36}$$

wobei μ_j nach dieser Definition in $(f_j f_j)$-Koordinaten durch $x \mapsto -v((fg)_j(x, \cdot))(gf)_j(x, s_0)$ beschrieben wird. Wir behaupten nun, dass für die durch $\mu = \{\mu_j\}$ definierte 0-Kokette die Gleichung $\sigma = \tau + \delta\mu$ gilt. Den Nachweis führen wir in $(f_j f_k)$-Koordinaten und in diesen erhalten wir zunächst für den Endomorphismus $(\delta\mu)_{jk} = \mu_k - \mu_j$ folgende Darstellung:

$$-f_{jk}(x, s_0) v((fg)_k(x, \cdot))(gf)_k(x, s_0) + v((fg)_j(x, \cdot))(gf)_j(x, s_0) f_{jk}(x, s_0). \tag{3.37}$$

Um diesen Ausdruck umzuformen, notieren wir einerseits die Gleichung

$$(gf)_j(x,s_0)f_{jk}(x,s_0) = g_{jk}(x,s_0)(gf)_k(x,s_0), \tag{3.38}$$

welche aus einer einfachen Rechnung folgt und lediglich zwei verschiedene Schreibweisen des Koordinatenwechsels von f_k- in g_j-Koordinaten darstellt. Andererseits erhalten wir aus der Identität $(gf)_k(x,t)(fg)_k(x,t) = \mathrm{id}$ durch Anwenden von v:

$$v((fg)_k(x,\cdot)) = -(fg)_k(x,s_0)v((gf)_k(x,\cdot))(fg)_k(x,s_0). \tag{3.39}$$

Setzen wir beide Gleichungen (3.38) und (3.39) in die lokale Darstellung von $(\delta\mu)_{jk}$ aus (3.37) ein, so erhalten wir in (f_jf_k)-Koordinaten:

$$\begin{aligned} &v((fg)_j(x,\cdot))g_{jk}(x,s_0)(gf)_k(x,s_0) + f_{jk}(x,s_0)(fg)_k(x,s_0)v((gf)_k(x,\cdot))(fg)_k(x,s_0)(gf)_k(x,s_0) \\ &= v((fg)_j(x,\cdot))g_{jk}(x,s_0)(gf)_k(x,s_0) + (fg)_j(x,s_0)g_{jk}(x,s_0)v((gf)_k(x,\cdot)). \end{aligned} \tag{3.40}$$

Wir halten fest, dass τ_{jk} in (f_jf_k)-Koordinaten durch

$$(fg)_j(x,s_0)v(g_{jk}(x,\cdot))(gf)_k(x,s_0) \tag{3.41}$$

beschrieben wird, und berechnen mit der Identität

$$f_{jk}(x,t) = (fg)_j(x,t)g_{jk}(x,t)(gf)_k(x,t)$$

für die lokale Darstellung von σ_{jk} in (f_jf_k)-Koordinaten

$$\begin{aligned} v(f_{jk}(x,\cdot)) = {} & (fg)_j(x,s_0)v(g_{jk}(x,\cdot))(gf)_k(x,s_0) + v((fg)_j(x,\cdot))g_{jk}(x,s_0)(gf)_k(x,s_0) \\ & + (fg)_j(x,s_0)g_{jk}(x,s_0)v((gf)_k(x,\cdot)). \end{aligned}$$

Indem wir dieses Ergebnis mit den Darstellungen von $(\delta\mu)_{jk}$ aus (3.40) und τ_{jk} aus (3.41) vergleichen, finden wir $\sigma_{jk} = \tau_{jk} + (\delta\mu)_{jk}$. Da dies für alle Indizes gilt, haben wir die erforderliche Gleichung $\sigma = \tau + \delta\mu$ nachgewiesen.

Als nächstes zeigen wir, dass die konstruierte Kohomologieklasse unter geeigneten Verfeinerungen einer guten Trivialisierung stets erhalten bleibt. Es sei also wieder

$$\begin{tikzcd} U_j \times \mathbb{C}^r \arrow[dr, "\pi_2"] & F_t|_{U_j} \arrow[l, "f_j(t)"'] \arrow[d, "\pi'"] & F|_{U_j\times V} \arrow[r, "f_j"] \arrow[d, "\pi"] & (U_j \times V) \times \mathbb{C}^r \arrow[dl, "\pi_2"'] \\ & U_j \arrow[r, "\iota_t"] & U_j \times V & \end{tikzcd}$$

eine gute Trivialisierung sowie ferner $V' \subset V \subset S$ eine offene Teilmenge mit $s_0 \in V'$ und $\mathcal{W} = \{W_i\}_{i\in I}$ eine Verfeinerung der Überdeckung $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j\in J}$ von X vermöge der Abbildung $s : I \to J$. Offenbar kann dann $F \to X \times S$ jeweils über den Mengen $W_i \times V'$ mittels der Einschränkung $f_{s(i)}|_{\pi^{-1}(W_i\times V')}$ trivialisiert werden, so dass wir erneut eine gute Trivialisierung erhalten, welche wir als Verfeinerung der gegebenen guten Trivialisierung ansehen.

Wir zeigen nun, dass der mit dieser verfeinerten guten Trivialisierung konstruierte 1-Kozykel $\tau = \{\tau_{il}\} \in Z^1(\mathcal{W}, \mathcal{O}(\mathrm{End}(F_{s_0}))$ dieselbe Kohomologieklasse induziert, wie der mit der ursprünglichen guten Trivialisierung konstruierte 1-Kozykel $\sigma = \{\sigma_{jk}\} \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}(\mathrm{End}(F_{s_0}))$. Dazu genügt es festzuhalten, dass aus der Konstruktion der verfeinerten guten Trivialisierung für die Abbildung

$$\pi_s : \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}(\mathrm{End}(F_{s_0}))) \longrightarrow \mathcal{C}^1(\mathcal{W}, \mathcal{O}(\mathrm{End}(F_{s_0})))$$

aus (3.25) die Gleichung $\pi_s(\sigma) = \tau$ folgt. Diese bedeutet auf Ebene der Kohomologie bezüglich der Überdeckungen von X gerade die Identität $\pi^{\mathcal{U}}_{\mathcal{W}}([\sigma]) = [\tau] \in H^1(\mathcal{W}, \mathcal{O}(\mathrm{End}(F_{s_0})))$, womit die in der Garbenkohomologie $H^1(X, \mathcal{O}(\mathrm{End}(F_{s_0})))$ induzierten Kohomologieklassen gleich sind.

Mit dieser Vorbereitung folgt die Wohldefiniertheit unmittelbar: Sind zwei gute Trivialisierungen gegeben, dann konstruieren wir eine gemeinsame Verfeinerung, indem wir eine gemeinsame Verfeinerung der Überdeckungen von X wählen sowie die offenen Umgebungen um $s_0 \in S$ schneiden. Dann stimmen die von den guten Trivialisierungen induzierten Kohomologieklassen jeweils mit der Kohomologieklasse der gemeinsamen Verfeinerung überein und sind damit gleich.

Wir haben also nachgewiesen, dass die Konstruktion von $\rho_{s_0}(v) \in H^1(X, \mathcal{O}(\mathrm{End}(F_{s_0})))$ aus (3.34) zu einem Tangentialvektor $v \in T_{s_0}S$ unabhängig von der Wahl einer guten Trivialisierung ist. Insgesamt ist damit die Kodaira-Spencer-Abbildung

$$\rho_{s_0} : T_{s_0}S \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}(\mathrm{End}(F_{s_0})))$$

im Punkt s_0 konstruiert. In [Ov92] wird eine Darstellung der Kodaira-Spencer-Abbildung hergeleitet, welche für die Zwecke dieser Arbeit besser geeignet ist als die Definition durch Kozykel. Sie basiert auf dem Dolbeault-Isomorphismus

$$H^1(X, \mathcal{O}(\mathrm{End}(F_{s_0}))) \simeq \frac{\mathrm{kern}\big(\Gamma\left(X, \mathcal{A}^{0,1}(\mathrm{End}(F_{s_0}))\right) \xrightarrow{\bar\partial} \Gamma\left(X, \mathcal{A}^{0,2}(\mathrm{End}(F_{s_0}))\right)\big)}{\mathrm{im}\big(\Gamma\left(X, \mathcal{A}^{0,0}(\mathrm{End}(F_{s_0}))\right) \xrightarrow{\bar\partial} \Gamma\left(X, \mathcal{A}^{0,1}(\mathrm{End}(F_{s_0}))\right)\big)}$$

und ermöglicht die Angabe von Repräsentanten der Kohomologieklassen durch die Krümmung Ω, sofern eine Familie $(F,h) \to X \times S$ hermitescher, holomorpher Vektorbündel vorliegt. Da wir für die Herleitung den Dolbeault-Isomorphismus explizit benötigen, wollen wir kurz an den Beweis des Satzes von Dolbeault erinnern (vergleiche beispielsweise [MK71]).

Theorem 3.16 (Dolbeault)**.** *Sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit und $E \to X$ ein holomorphes Vektorbündel. Dann gilt für alle $p, q \geqslant 0$:*

$$H^q(X, \Omega^p(E)) \simeq \frac{\mathrm{kern}\big(\Gamma\left(X, \mathcal{A}^{p,q}(E)\right) \xrightarrow{\bar\partial} \Gamma\left(X, \mathcal{A}^{p,q+1}(E)\right)\big)}{\mathrm{im}\big(\Gamma\left(X, \mathcal{A}^{p,q-1}(E)\right) \xrightarrow{\bar\partial} \Gamma\left(X, \mathcal{A}^{p,q}(E)\right)\big)}.$$

Beweis. Es bezeichne n die Dimension von X. Zunächst ist

$$0 \longrightarrow \Omega^p(E) \xrightarrow{i} \mathcal{A}^{p,0}(E) \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{A}^{p,1}(E) \xrightarrow{\bar\partial} \dots \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{A}^{p,n}(E) \longrightarrow 0$$

eine feine Auflösung. Wegen des Dolbeault-Lemmas (siehe beispielsweise [MK71]) ist $\bar\partial\mathcal{A}^{p,q}(E) \subset \mathcal{A}^{p,q+1}(E)$ gerade die Untergarbe der Keime differenzierbarer $(p, q+1)$-Formen φ mit Werten in E, welche $\bar{\partial}\varphi = 0$ erfüllen, d.h. der geschlossenen $(p, q+1)$-Formen mit Werten in E. Folglich ist

$$H^0(X, \bar{\partial}\mathcal{A}^{p,q-1}(E)) = \Gamma\left(X, \bar{\partial}\mathcal{A}^{p,q-1}(E)\right) = \{\varphi \in \Gamma(X, \mathcal{A}^{p,q}(E)) \mid \bar{\partial}\varphi = 0\}$$

und wir können die zu beweisende Aussage für alle $p \geqslant 0$, $q > 0$ in der Form

$$H^q(X, \Omega^p(E)) \simeq H^0(X, \bar{\partial}\mathcal{A}^{p,q-1}(E)) \Big/ \bar{\partial} H^0(X, \mathcal{A}^{p,q-1}(E))$$

schreiben. Von nun an sei $p \geqslant 0$ fixiert. Zunächst bemerken wir, dass die Aussage für $q = 0$ trivial ist. Es genügt somit, $q \geqslant 1$ zu betrachten. In diesem Fall ist die Sequenz

$$0 \longrightarrow \bar{\partial}\mathcal{A}^{p,q-1}(E) \xrightarrow{i} \mathcal{A}^{p,q}(E) \xrightarrow{\bar{\partial}} \bar{\partial}\mathcal{A}^{p,q}(E) \longrightarrow 0$$

offenbar exakt, so dass wir eine lange exakte Sequenz

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow H^0(X, \bar{\partial}\mathcal{A}^{p,q-1}(E)) \xrightarrow{i} H^0(X, \mathcal{A}^{p,q}(E)) \xrightarrow{\bar{\partial}} H^0(X, \bar{\partial}\mathcal{A}^{p,q}(E)) \\ &\xrightarrow{\delta^*} H^1(X, \bar{\partial}\mathcal{A}^{p,q-1}(E)) \xrightarrow{i} H^1(X, \mathcal{A}^{p,q}(E)) \xrightarrow{\bar{\partial}} \dots, \end{aligned} \tag{3.42}$$

wobei δ^* jeweils die Verbindungshomomorphismen bezeichnet, erhalten. Da $\mathcal{A}^{p,q}(E)$ eine feine Garbe ist, folgt $H^k(X, \mathcal{A}^{p,q}(E)) = 0$ für alle $k \geqslant 1$. Insbesondere ist also $H^1(X, \mathcal{A}^{p,q}(E)) = 0$, so dass wir für alle $q \geqslant 1$ die exakte Sequenz

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow H^0(X, \bar{\partial}\mathcal{A}^{p,q-1}(E)) \xrightarrow{i} H^0(X, \mathcal{A}^{p,q}(E)) \xrightarrow{\bar{\partial}} H^0(X, \bar{\partial}\mathcal{A}^{p,q}(E)) \\ &\xrightarrow{\delta^*} H^1(X, \bar{\partial}\mathcal{A}^{p,q-1}(E)) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

erhalten. Aus dem Homomorphiesatz folgt daher für $q \geqslant 1$

$$H^1(X, \bar{\partial}\mathcal{A}^{p,q-1}(E)) \simeq H^0(X, \bar{\partial}\mathcal{A}^{p,q}(E)) \Big/ \bar{\partial} H^0(X, \mathcal{A}^{p,q}(E)) \tag{3.43}$$

und wir sehen, dass dieser Isomorphismus im Wesentlichen vom Verbindungshomomorphismus δ^* vermittelt wird. Aus (3.42) können wir aber noch mehr gewinnen, denn für $k \geqslant 2$ finden wir in dieser Sequenz den Ausschnitt

$$\begin{aligned} \dots &\longrightarrow \underbrace{H^{k-1}(X, \mathcal{A}^{p,q}(E))}_{=0} \longrightarrow H^{k-1}(X, \bar{\partial}\mathcal{A}^{p,q}(E)) \xrightarrow{\delta^*} H^k(X, \bar{\partial}\mathcal{A}^{p,q-1}(E)) \\ &\longrightarrow \underbrace{H^k(X, \mathcal{A}^{p,q}(E))}_{=0} \longrightarrow \dots, \end{aligned}$$

so dass

$$0 \longrightarrow H^{k-1}(X, \bar{\partial}\mathcal{A}^{p,q}(E)) \xrightarrow{\delta^*} H^k(X, \bar{\partial}\mathcal{A}^{p,q-1}(E)) \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz ist. Wir schließen also auf

$$H^{k-1}(X, \bar{\partial}\mathcal{A}^{p,q}(E)) \simeq H^k(X, \bar{\partial}\mathcal{A}^{p,q-1}(E)) \qquad \text{für alle } k \geqslant 2 \text{ und } q \geqslant 1 \tag{3.44}$$

und erneut wird der Isomorphismus vom jeweiligen Verbindungshomomorphismus δ^* vermittelt. Nun betrachten wir die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \Omega^p(E) \xrightarrow{i} \mathcal{A}^{p,0}(E) \xrightarrow{\bar\partial} \bar\partial\mathcal{A}^{p,0}(E) \longrightarrow 0\,,$$

welche zur langen exakten Kohomologiesequenz

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow H^0(X,\Omega^p(E)) \xrightarrow{i} H^0(X,\mathcal{A}^{p,0}(E)) \xrightarrow{\bar\partial} H^0(X,\bar\partial\mathcal{A}^{p,0}(E)) \\ &\xrightarrow{\delta^*} H^1(X,\Omega^p(E)) \xrightarrow{i} \underbrace{H^1(X,\mathcal{A}^{p,0}(E))}_{=0} \xrightarrow{\bar\partial} \dots \end{aligned} \tag{3.45}$$

Anlass gibt. Der Homomorphiesatz liefert nun zunächst mit

$$H^1(X,\Omega^p(E)) \simeq H^0(X,\bar\partial\mathcal{A}^{p,0}(E)) \big/ \bar\partial H^0(X,\mathcal{A}^{p,0}(E))$$

die behauptete Aussage im Fall $q=1$, wobei der Isomorphismus durch den Verbindungshomomorphismus δ^* vermittelt wird. Außerdem enthält die Sequenz (3.45) für $k \geqslant 2$ den Ausschnitt

$$\begin{aligned} \dots &\longrightarrow \underbrace{H^{k-1}(X,\mathcal{A}^{p,0}(E))}_{=0} \longrightarrow H^{k-1}(X,\bar\partial\mathcal{A}^{p,0}(E)) \xrightarrow{\delta^*} H^k(X,\Omega^p(E)) \\ &\longrightarrow \underbrace{H^k(X,\mathcal{A}^{p,0}(E))}_{=0} \longrightarrow \dots\,. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$H^{k-1}(X,\bar\partial\mathcal{A}^{p,0}(E)) \simeq H^k(X,\Omega^p(E)) \qquad \text{für alle } k \geqslant 2 \tag{3.46}$$

vermöge δ^*. Ist nun also $k \geqslant 2$ beliebig, dann schließen wir:

$$\begin{aligned} H^k(X,\Omega^p(E)) &\overset{(3.46)}{\simeq} H^{k-1}(X,\bar\partial\mathcal{A}^{p,0}(E)) \overset{(3.44)}{\simeq} H^{k-2}(X,\bar\partial\mathcal{A}^{p,1}(E)) \\ &\overset{(3.44)}{\simeq} \dots \overset{(3.44)}{\simeq} H^1(X,\bar\partial\mathcal{A}^{p,k-2}(E)) \overset{(3.43)}{\simeq} H^0(X,\bar\partial\mathcal{A}^{p,k-1}(E)) \big/ \bar\partial H^0(X,\mathcal{A}^{p,k-1}(E))\,. \end{aligned}$$

Dies zeigt die behauptete Gleichung für alle $q \geqslant 2$. □

Der Beweis zeigt, dass die Dolbeault-Isomorphismen im Wesentlichen durch Verbindungshomomorphismen induziert werden. Besonders einfach ist der Fall $q=1$, welcher für uns relevant ist. Hier zeigt der Beweis, dass für ein holomorphes Vektorbündel $E \to X$ der Isomorphismus

$$H^1(X,\mathcal{O}(E)) = H^1(X,\Omega^0(E)) \simeq H^0(X,\bar\partial\mathcal{A}^{0,0}(E)) \big/ \bar\partial H^0(X,\mathcal{A}^{0,0}(E)) \tag{3.47}$$

unmittelbar vom Verbindungshomomorphismus $H^0(X,\bar\partial\mathcal{A}^{0,0}(E)) \xrightarrow{\delta^*} H^1(X,\Omega^0(E))$ der langen exakten Kohomologiesequenz zu

$$0 \longrightarrow \Omega^0(E) \xrightarrow{i} \mathcal{A}^{0,0}(E) \xrightarrow{\bar\partial} \bar\partial\mathcal{A}^{0,0}(E) \longrightarrow 0$$

induziert wird. Wir beschreiben die Konstruktion dieses Verbindungshomomorphismus δ^* nun explizit, um die Umkehrung und damit obigen Dolbeault-Isomorphismus konstruieren zu können. Es sei also

$$[\sigma] \in H^0(X, \bar{\partial}\mathcal{A}^{0,0}(E)) \big/ \bar{\partial} H^0(X, \mathcal{A}^{0,0}(E))$$

mit Repräsentanten $\sigma \in H^0(X, \bar{\partial}\mathcal{A}^{0,0}(E))$ gegeben. Wir wollen das entsprechende Element $\delta^*(\sigma) \in H^1(X, \Omega^0(F))$ durch einen 1-Kozykel beschreiben. Wegen $\sigma \in H^0(X, \bar{\partial}\mathcal{A}^{0,0}(E)) = \Gamma\left(X, \bar{\partial}\mathcal{A}^{0,0}(E)\right)$ ist $\sigma \in \Gamma\left(X, \mathcal{A}^{0,1}(E)\right)$ eine $(0,1)$-Form mit $\bar{\partial}\sigma = 0$. Aus dem Dolbeault-Lemma folgt nun, dass es für jedes $y \in X$ eine Umgebung $y \in U_y \subset X$ und eine differenzierbare $(0,0)$-Form $\tau_y \in \Gamma\left(U_y, \mathcal{A}^{0,0}(E)\right)$ mit $\bar{\partial}\tau_y = \sigma|_{U_y}$ gibt. Nach eventuellem Verfeinern der Überdeckung $\{U_y \,|\, y \in X\}$ und entsprechendem Einschränken der τ_y finden wir also eine lokal endliche Überdeckung $\mathcal{U} = \{U_j\}$ von X und Formen $\tau_j \in \Gamma\left(U_j, \mathcal{A}^{0,0}(E)\right)$ mit $\bar{\partial}\tau_j = \sigma|_{U_j}$. Wir definieren $c := \{\tau_j\} \in \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{A}^{0,0}(E))$ und erhalten $\delta c \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{A}^{0,0}(E))$ mit $(\delta c)_{jk} = \tau_k - \tau_j$ auf $U_j \cap U_k$, d.h. $(\delta c)_{jk} \in \Gamma\left(U_j \cap U_k, \mathcal{A}^{0,0}(E)\right)$. Wegen

$$\bar{\partial}(\delta c)_{jk} = \bar{\partial}(\tau_k - \tau_j) = \bar{\partial}\tau_k - \bar{\partial}\tau_j = \sigma|_{U_j \cap U_k} - \sigma|_{U_j \cap U_k} = 0$$

gilt sogar $(\delta c)_{jk} \in \Gamma\left(U_j \cap U_k, \Omega^0(E)\right)$ und damit $a := \delta c \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \Omega^0(E))$. Für diesen Kozykel gilt (vergleiche beispielsweise die Konstruktion der Verbindungshomomorphismen der Čech-Kohomologie in [MK71]): $\delta^*(\sigma) = [a] \in H^1(X, \Omega^0(E))$.

Für den inversen Homomorphismus sei ein $c \in H^1(X, \Omega^0(E))$ gegeben und bezüglich einer lokal endlichen Überdeckung $\mathcal{U} = \{U_j\}$ von X repräsentiert durch den 1-Kozykel $\{c_{jk}\} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \Omega^0(E))$. Wir wählen ein $\tau \in \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{A}^{0,0}(E))$, d.h. Schnitte $\tau_j \in \Gamma\left(U_j, \mathcal{A}^{0,0}(E)\right)$ des Bündels E, mit $\delta\tau = c$, also $c_{jk} = \tau_k - \tau_j$ auf $U_j \cap U_k$. Dabei ist klar, dass diese Wahl an die jeweilige konkrete Situation angepasst erfolgen muss und eventuell schwierig ist. Mit einem solchen τ berechnen wir dann wegen $c_{jk} \in \Gamma\left(U_j \cap U_k, \Omega^0(E)\right)$ die Identität $\bar{\partial}(\tau_k - \tau_j) = \bar{\partial}c_{jk} = 0$. Also erhalten wir $\bar{\partial}\tau_k = \bar{\partial}\tau_j$ auf $U_j \cap U_k$ und damit gibt es ein $\sigma \in \Gamma\left(X, \mathcal{A}^{0,1}(E)\right)$ mit $\bar{\partial}\tau_k = \sigma|_{U_k}$ für alle k. Insbesondere ist $\bar{\partial}\sigma = 0$ und somit $\sigma \in \Gamma\left(X, \bar{\partial}\mathcal{A}^{0,0}(E)\right)$. Durchlaufen wir die oben angegebene Konstruktion, so sehen wir, dass $\delta^*(\sigma) = c$ gilt. Wir haben also gezeigt, dass

$$H^1(X, \Omega^0(E)) \longrightarrow H^0(X, \bar{\partial}\mathcal{A}^{0,0}(E)) \big/ \bar{\partial} H^0(X, \mathcal{A}^{0,0}(E)), \qquad c \longmapsto [\sigma] \tag{3.48}$$

der gesuchte Isomorphismus ist.

Mit diesen Vorbereitungen können wir nun das Resultat über die Darstellung der Kodaira-Spencer-Abbildung in der Dolbeault-Kohomologie von $\mathcal{O}(\mathrm{End}(F_{s_0}))$ beweisen.

Theorem 3.17 ([Ov92]). *Es sei X eine kompakte, komplexe Mannigfaltigkeit, S eine komplexe Mannigfaltigkeit und $(F, h) \to X \times S$ eine Familie hermitescher, holomorpher Vektorbündel auf X. Ferner sei $\Omega \in \Gamma\left(X \times S, \mathcal{A}^{1,1}(\mathrm{End}(F))\right)$ die Krümmung von h. Ist nun $s_0 \in S$ und $v \in \Gamma(V, \mathcal{O}(TS))$ ein holomorphes Vektorfeld auf $V \subset S$ mit $s_0 \in V$, dann kann die Kodaira-Spencer-Abbildung $\rho_{s_0} : T_{s_0}S \to H^1(X, \mathcal{O}(\mathrm{End}(F_{s_0})))$ folgendermaßen berechnet werden:*

$$\rho_{s_0}(v|_{s_0}) = \left[-\,(v \lrcorner \Omega)|_{s_0}\right].$$

Dabei interpretieren wir v vermöge des horizontalen Lifts als holomorphes Vektorfeld auf $X \times S$.

Beweis. Wir arbeiten mit einer guten Trivialisierung

$$\begin{tikzcd}
U_j \times \mathbb{C}^r \arrow[dr, "\pi_2"] & F_t|_{U_j} \arrow[l, "f_j(t)"'] \arrow[d, "\pi'"'] & F|_{U_j \times V} \arrow[r, "f_j"] \arrow[d, "\pi"] & (U_j \times V) \times \mathbb{C}^r \arrow[dl, "\pi_2"'] \\
 & U_j \arrow[r, "\iota_t"] & U_j \times V &
\end{tikzcd}$$

wobei wir ohne Einschränkung davon ausgehen können, dass das gegebene Vektorfeld v auf der Menge V dieser Trivialisierung definiert ist und ferner, dass die U_j Koordinatenumgebungen auf X mit Koordinaten $z_j^1, \ldots, z_j^n$ sowie V eine Koordinatenumgebung auf S mit Koordinaten $s^1, \ldots, s^m$ ist. Wir übernehmen diesbezüglich die entsprechenden Notationen aus 3.1. Wegen der Linearität aller beteiligten Abbildungen genügt es außerdem, die Behauptung für ein Koordinatenvektorfeld $v = \frac{\partial}{\partial s^l}$ mit $1 \leqslant l \leqslant m$ zu beweisen.

In dieser Situation können wir $\rho_{s_0}(v|_{s_0}) \in H^1(X, \mathcal{O}(\mathrm{End}(F_{s_0})))$ durch den 1-Kozykel $\sigma = \{\sigma_{jk}\} \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}(\mathrm{End}(F_{s_0})))$ repräsentieren, wobei σ_{jk} in $(f_j f_k)$-Koordinaten gemäß (3.31) durch die Funktion

$$U_j \cap U_k \longrightarrow \mathbb{C}^{r \times r}, \qquad x \longmapsto \left.\frac{\partial}{\partial s^l}\right|_{s_0} f_{jk}(x, \cdot) \tag{3.49}$$

beschrieben wird. Wir müssen den Dolbeault-Isomorphismus durchlaufen, wie wir es eben erläutert haben. Die Hauptschwierigkeit besteht also in der Konstruktion eines geeigneten τ. Dazu betrachten wir auf $U_j \times V$ die Christoffelsymbole $\Gamma^{\rho}_{j\,l\sigma} = \sum_\tau h_j^{\overline{\tau}\rho} \partial_l h_{j\,\sigma\overline{\tau}}$ von (F, h). Wir definieren nun

$$M_j : U_j \longrightarrow \mathbb{C}^{r \times r}, \qquad x \longmapsto \left(\Gamma^{\rho}_{j\,l\sigma}(x, s_0)\right)_{\rho,\sigma} = \left(\left(\partial_l h_j(x, s_0)\right) h_j^{-1}(x, s_0)\right)^t$$

sowie $m_j : U_j \times \mathbb{C}^r \to U_j \times \mathbb{C}^r$ durch $(x, e) \mapsto (x, M_j(x) \cdot e)$ und damit:

$$\tau_j := f_j^{-1}(s_0) \circ m_j \circ f_j(s_0) \in \Gamma\left(U_j, \mathcal{A}^{0,0}\left(\mathrm{End}(F_{s_0})\right)\right).$$

Die Koordinatendarstellung des Endomorphismus τ_j ist in $(f_j f_j)$-Koordinaten also gerade durch M_j gegeben. Es ist $\tau := \{\tau_j\} \in \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{A}^{0,0}(\mathrm{End}(F_{s_0})))$ und wir interessieren uns für $\delta\tau$. Auf $(U_j \cap U_k) \times V$ haben wir mit $h_k = f_{jk}^t h_j \overline{f_{jk}}$ sowie $h_k^{-1} = \overline{f_{kj}} h_j^{-1} f_{kj}^t$ das Transformationsverhalten der hermiteschen Metrik h. Damit berechnen wir auf $U_j \cap U_k$:

$$\begin{aligned}
M_k(x) &= \left(\left(\partial_l h_k(x, s_0)\right) h_k^{-1}(x, s_0)\right)^t = \Big(\left(\partial_l \left(f_{jk}^t h_j \overline{f_{jk}}\right)(x, s_0)\right) \overline{f_{kj}}(x, s_0) h_j^{-1}(x, s_0) f_{kj}^t(x, s_0)\Big)^t \\
&= \Big(\big(\partial_l f_{jk}^t(x, s_0) h_j(x, s_0) \overline{f_{jk}}(x, s_0) + f_{jk}^t(x, s_0) \partial_l h_j(x, s_0) \overline{f_{jk}}(x, s_0) \\
&\qquad + f_{jk}^t(x, s_0) h_j(x, s_0) \underbrace{\partial_l \overline{f_{jk}}(x, s_0)}_{=0}\big) \overline{f_{kj}}(x, s_0) h_j^{-1}(x, s_0) f_{kj}^t(x, s_0)\Big)^t \\
&= \Big(\partial_l f_{jk}^t(x, s_0) f_{kj}^t(x, s_0) + f_{jk}^t(x, s_0) \partial_l h_j(x, s_0) h_j^{-1}(x, s_0) f_{kj}^t(x, s_0)\Big)^t \\
&= f_{kj}(x, s_0) \partial_l f_{jk}(x, s_0) + f_{kj}(x, s_0) \Big(\partial_l h_j(x, s_0) h_j^{-1}(x, s_0)\Big)^t f_{jk}(x, s_0) \\
&= f_{kj}(x, s_0) \partial_l f_{jk}(x, s_0) + f_{kj}(x, s_0) M_j(x) f_{jk}(x, s_0).
\end{aligned}$$

Mit dieser Vorbereitung berechnen wir nun $(\delta\tau)_{jk} = \tau_k - \tau_j$ auf $U_j \cap U_k$ in $(f_j f_k)$-Koordinaten

$$f_{jk}(x,s_0)M_k(x) - M_j(x)f_{jk}(x,s_0) = \partial_l f_{jk}(x,s_0) + M_j(x)f_{jk}(x,s_0) - M_j(x)f_{jk}(x,s_0) = \partial_l f_{jk}(x,s_0)$$

und erhalten wegen (3.49) gerade σ_{jk}. Wir haben also gezeigt, dass $\delta\tau = \sigma$ gilt, und folglich ein passendes τ konstruiert, um den Dolbeault-Isomorphismus zu durchlaufen.

Gemäß unseren Überlegungen ist nun $\bar\partial\tau_j = \bar\partial\tau_k$ auf $U_j \cap U_k$ und ein Repräsentant $\sigma \in \Gamma\left(X, \mathcal{A}^{0,1}\left(\mathrm{End}(F_{s_0})\right)\right)$ der Dolbeault-Kohomologieklasse von $\rho_{s_0}(v|_{s_0})$ wird lokal auf U_j durch $\sigma|_{U_j} = \bar\partial\tau_j$ gegeben. Wir berechnen also $\bar\partial\tau_j$, wobei wir hierzu die Matrixdarstellung M_j auf U_j verwenden können:

$$\left(\bar\partial M_j\right)^\rho_\sigma = \left(\bar\partial\Gamma^\rho_{j\,l\sigma}(s_0)\right)^\rho_\sigma = \left(\sum_\beta \partial_{\overline{\beta}}\Gamma^\rho_{j\,l\sigma}(s_0)dz^{\overline{\beta}}_j\right)^\rho_\sigma = \left(\sum_\beta -R^\rho_{j\,\sigma l\overline{\beta}}(s_0)dz^{\overline{\beta}}_j\right)^\rho_\sigma. \tag{3.50}$$

Andererseits ist $\Omega \in \Gamma\left(X \times S, \mathcal{A}^{1,1}\left(\mathrm{End}(F)\right)\right)$ auf $U_j \times V$ lokal gegeben durch

$$\Theta_j = (\Theta^\rho_{j\,\sigma})_{\rho,\sigma} \quad \text{mit} \quad \Theta^\rho_{j\,\sigma} = \sum_{\alpha,\beta} R^\rho_{j\,\sigma\alpha\overline{\beta}} dw^\alpha_j \wedge dw^{\overline{\beta}}_j.$$

Damit ist $\frac{\partial}{\partial s^l} \lrcorner\, \Omega \in \Gamma\left(X \times S, \mathcal{A}^{0,1}\left(\mathrm{End}(F)\right)\right)$ lokal gegeben durch

$$\left(\frac{\partial}{\partial s^l} \lrcorner\, \Omega\right)^\rho_{j\,\sigma} = \sum_\beta R^\rho_{j\,\sigma l\overline{\beta}} dw^{\overline{\beta}}_j$$

und folglich $\left(\frac{\partial}{\partial s^l} \lrcorner\, \Omega\right)\Big|_{s_0} \in \Gamma\left(X, \mathcal{A}^{0,1}\left(\mathrm{End}(F_{s_0})\right)\right)$ lokal auf U_j durch

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial s^l} \lrcorner\, \Omega\right)\Bigg|_{s_0}\right)^\rho_{j\,\sigma} = \sum_\beta R^\rho_{j\,\sigma l\overline{\beta}}(s_0)dz^{\overline{\beta}}_j \overset{(3.50)}{=} -\left(\bar\partial M_j\right)^\rho_\sigma.$$

Somit ist bereits alles gezeigt. □

In Kapitel 2 haben wir gesehen, dass für $t \in S$ die hermitesche Metrik h_t auf $F_t \to X$ eine hermitesche Metrik H_t auf dem Endomorphismenbündel $\mathrm{End}(F_t) \to X$ induziert, so dass auf diesem Vektorbündel die Hodge-Theorie zur Verfügung steht. Entsprechend haben wir einen kanonischen Isomorphismus

$$H^1(X, \mathcal{O}\left(\mathrm{End}(F_t)\right) = H^1(X, \Omega^0\left(\mathrm{End}(F_t)\right) \simeq \mathcal{H}^{0,1}(X, \mathrm{End}(F_t), H_t),$$

welcher einer Kohomologieklasse der Dolbeault-Kohomologie ihren eindeutig bestimmten harmonischen Repräsentanten zuordnet. Dies wirft die Frage auf, wie wir die harmonischen Repräsentanten der Bilder unter der Kodaira-Spencer-Abildung ρ_{s_0} beschreiben können. Liegt eine Familie von Hermite-Einstein-Vektorbündeln vor, so liefert folgendes Resultat eine Antwort auf diese Frage: Die harmonischen Repräsentanten sind im Wesentlichen bereits im Krümmungstensor der Familie $(F,h) \to X \times S$ enthalten.

Theorem 3.18 ([Ov92]). *Es sei (X, g) eine kompakte Kählermannigfaltigkeit, S eine komplexe Mannigfaltigkeit und $(F, h) \to X \times S$ eine Familie von Hermite-Einstein-Vektorbündeln auf (X, g). Ferner sei $\Omega \in \Gamma\left(X \times S, \mathcal{A}^{1,1}(\mathrm{End}(F))\right)$ die Krümmung von h. Ist nun $s_0 \in S$ ein Punkt und $v \in \Gamma(V, \mathcal{O}(TS))$ ein holomorphes Vektorfeld auf $V \subset S$ mit $s_0 \in V$, dann ist $-\left.(v \lrcorner \Omega)\right|_{s_0} \in \mathcal{H}^{0,1}(X, \mathrm{End}(F_{s_0}), H_{s_0})$ harmonisch. Insbesondere ist die Kodaira-Spencer-Abbildung in der Form*

$$\rho_{s_0} : T_{s_0}S \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}(\mathrm{End}(F_{s_0}))) \simeq \mathcal{H}^{0,1}(X, \mathrm{End}(F_{s_0}), H_{s_0})$$

gegeben durch

$$\rho_{s_0}(v|_{s_0}) = -\left.(v \lrcorner \Omega)\right|_{s_0}.$$

Dabei interpretieren wir v vermöge des horizontalen Lifts als holomorphes Vektorfeld auf $X \times S$.

Beweis. Wegen Theorem 3.17 genügt es zu zeigen, dass $\Box\left(\left.(v \lrcorner \Omega)\right|_{s_0}\right) = 0$ gilt. Da dieses Element ein Repräsentant einer Dolbeault-Kohomologieklasse ist, muss $\bar{\partial}\left(\left.(v \lrcorner \Omega)\right|_{s_0}\right) = 0$ gelten. Damit genügt es also, die Gleichung $\bar{\partial}^*\left(\left.(v \lrcorner \Omega)\right|_{s_0}\right) = 0$ nachzuweisen. Wir arbeiten dazu in derselben Situation wie im Beweis von Theorem 3.17 und betrachten zunächst wieder den Fall eines holomorphen Koordinatenvektorfeldes $v = \frac{\partial}{\partial s^l}$ für ein l mit $1 \leqslant l \leqslant m$. Dann wird wieder $\left.\left(\frac{\partial}{\partial s^l} \lrcorner \Omega\right)\right|_{s_0} \in \Gamma\left(X, \mathcal{A}^{0,1}(\mathrm{End}(F_{s_0}))\right)$ lokal auf U_j durch

$$\left(\left.\left(\frac{\partial}{\partial s^l} \lrcorner \Omega\right)\right|_{s_0}\right)^{\rho}_{j\,\sigma} = \sum_{\beta} R^{\rho}_{j\,\sigma l \overline{\beta}}(s_0) dz_j^{\overline{\beta}}$$

beschrieben. Zur Abkürzung setzen wir $\eta := \bar{\partial}^*\left(\left.\left(\frac{\partial}{\partial s^l} \lrcorner \Omega\right)\right|_{s_0}\right) \in \Gamma\left(X, \mathcal{A}^{0,0}(\mathrm{End}(F_{s_0}))\right)$. Damit folgt zunächst aus Satz 2.15 lokal auf U_j die Formel

$$\eta^{\rho}_{j\,\sigma} = -\sum_{\beta,\gamma} g_j^{\overline{\beta}\gamma}\left(\partial_\gamma\left(R^{\rho}_{j\,\sigma l\overline{\beta}}(s_0)\right) + \sum_{\nu,\tau} \Gamma^{(\rho\sigma)}_{j\,\gamma(\nu\tau)}(s_0)\left(R^{\nu}_{j\,\tau l\overline{\beta}}(s_0)\right)\right).$$

Dabei haben wir verwendet, dass die kovariante Ableitung ∇_γ für $(0,1)$-Formen durch die gewöhnliche partielle Ableitung in die entsprechende Koordinatenrichtung gegeben ist. Wir verwenden die lokale Version der Bianchi-Identität aus Satz 2.8 sowie die Tatsache, dass die Kählermetrik g nicht vom Punkt auf S abhängt, und berechnen:

$$\begin{aligned}
\eta^{\rho}_{j\,\sigma} &= -\sum_{\beta,\gamma} g_j^{\overline{\beta}\gamma}\left(\partial_\gamma\left(R^{\rho}_{j\,\sigma l\overline{\beta}}(s_0)\right) + \sum_{\nu,\tau} \Gamma^{(\rho\sigma)}_{j\,\gamma(\nu\tau)}(s_0)\left(R^{\nu}_{j\,\tau l\overline{\beta}}(s_0)\right)\right) \\
&= -\sum_{\beta,\gamma} g_j^{\overline{\beta}\gamma}\left(\partial_l\left(R^{\rho}_{j\,\sigma\gamma\overline{\beta}}(s_0)\right) + \sum_{\nu,\tau} \Gamma^{(\rho\sigma)}_{j\,l(\nu\tau)}(s_0)\left(R^{\nu}_{j\,\tau\gamma\overline{\beta}}(s_0)\right)\right) \\
&= -\partial_l\left(\sum_{\beta,\gamma} g_j^{\overline{\beta}\gamma}\left(R^{\rho}_{j\,\sigma\gamma\overline{\beta}}\right)\right)(s_0) - \sum_{\nu,\tau} \Gamma^{(\rho\sigma)}_{j\,l(\nu\tau)}(s_0)\left(\sum_{\beta,\gamma} g_j^{\overline{\beta}\gamma} R^{\nu}_{j\,\tau\gamma\overline{\beta}}\right)(s_0).
\end{aligned}$$

Indem wir ausnutzen, dass die Fasern unserer Familie Hermite-Einstein-Bündel sind, mit einer Hermite-Einstein-Konstanten κ, welche nach Satz 3.12 als Funktion auf S lokal konstant ist, und unter Ausnutzung von Proposition 2.4 ergibt dies weiter:

$$\begin{aligned}\eta^{\rho}_{j\,\sigma} &= -\partial_l\left(-\kappa\delta^{\rho}_{\sigma}\right)(s_0) - \sum_{\nu,\tau}\Gamma^{(\rho\sigma)}_{j\,l(\nu\tau)}(s_0)\left(-\kappa\delta^{\nu}_{\tau}\right)(s_0) = \kappa\sum_{\tau}\Gamma^{(\rho\sigma)}_{j\,l(\tau\tau)}(s_0)\\ &= \kappa\sum_{\tau}\left(\delta^{\tau}_{\sigma}\Gamma^{\rho}_{jF_{s_0}\,l\tau} - \delta^{\rho}_{\tau}\Gamma^{\tau}_{jF_{s_0}\,l\sigma}\right) = \kappa\left(\Gamma^{\rho}_{jF_{s_0}\,l\sigma} - \Gamma^{\rho}_{jF_{s_0}\,l\sigma}\right) = 0.\end{aligned}$$

Wir haben also $\eta_j = 0$ lokal auf allen U_j gezeigt, so dass wir insgesamt $\eta = 0$ und damit $\bar{\partial}^*((\frac{\partial}{\partial s^l} \lrcorner \Omega)|_{s_0}) = 0$ erhalten. Für Koordinatenvektorfelder ist die Behauptung somit gezeigt.

Ist nun v ein beliebiges holomorphes Vektorfeld, dann schreiben wir $v = \sum_l \mu_l \frac{\partial}{\partial s^l}$ für gewisse holomorphe Funktionen $\mu_l \in \Gamma\left(V, \mathcal{O}\left(S\right)\right)$ und erhalten zunächst aus der Anwendung der Kontraktion:

$$(v \lrcorner \Omega)|_{s_0} = \sum_l \mu_l(s_0)\left(\frac{\partial}{\partial s^l} \lrcorner \Omega\right)\Big|_{s_0}.$$

Da wir den $\bar{\partial}^*$-Operator nur auf diese Differentialform anwenden, fallen die holomorphen Funktionen μ_j also nur in Form konstanter Zahlen aus $\mathbb{C}$ ins Gewicht und wir erhalten aus der $\mathbb{C}$-Linearität des $\bar{\partial}^*$-Operators

$$\bar{\partial}^*\left((v \lrcorner \Omega)|_{s_0}\right) = \bar{\partial}^*\left(\sum_l \mu_l(s_0)\left(\frac{\partial}{\partial s^l} \lrcorner \Omega\right)\Big|_{s_0}\right) = \sum_l \mu_l(s_0)\bar{\partial}^*\left(\left(\frac{\partial}{\partial s^l} \lrcorner \Omega\right)\Big|_{s_0}\right) = 0,$$

wobei wir im letzten Schritt die bereits gezeigte Aussage verwendet haben. □

3.5. Die Weil-Petersson-Metrik

In diesem Abschnitt nutzen wir die explizite Darstellung der Kodaira-Spencer-Abbildung mit harmonischen Repräsentanten, um in Analogie zur klassischen Situation der Teichmüllertheorie die Weil-Petersson-Metrik auf dem Modulraum der stabilen Vektorbündel zu konstruieren. Da wir in dieser Arbeit ausschließlich mit Familien von Hermite-Einstein-Bündeln arbeiten, gehen wir auf die Bezüge zum Modulraum nur am Rande ein. Wir orientieren uns wieder an [Ov92].

Im ganzen Abschnitt sei (X, g) eine kompakte Kählermannigfaltigkeit, S eine komplexe Mannigfaltigkeit und $(F, h) \to X \times S$ eine Familie von Hermite-Einstein-Vektorbündeln auf (X, g), parametrisiert durch S. Indem wir das in Abschnitt 2.4 auf $\Gamma\left(X, \mathcal{A}^{0,1}\left(\mathrm{End}(F_t)\right)\right)$ erklärte Skalarprodukt einschränken, erhalten wir für jeden Punkt $t \in S$ ein hermitesches Skalarprodukt auf dem komplexen Vektorraum $\mathcal{H}^{0,1}(X, \mathrm{End}(F_t), H_t)$ der harmonischen $(0,1)$-Formen. Mit der Kodaira-Spencer-Abbildung in der Form

$$\rho_t : T_tS \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}\left(\mathrm{End}(F_t)\right)) \simeq \mathcal{H}^{0,1}(X, \mathrm{End}(F_t), H_t)$$

definieren wir damit eine Sesquilinearform $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{WP}}$ auf dem holomorphen Tangentialraum T_tS, indem wir $\langle v, w\rangle_{\mathrm{WP}} = \langle\rho_t(v), \rho_t(w)\rangle$ setzen. Diese Sesquilinearform muss im Allgemeinen natürlich nicht positiv definit sein, da ρ_t nicht unbedingt injektiv ist. Ein Beispiel hierfür ist eine triviale Familie von Hermite-Einstein-Vektorbündeln, denn in diesem Fall überzeugt man sich leicht davon, dass die Kodaira-Spencer-Abbildung identisch verschwindet. Für den Modulraum genügt es jedoch, effektive Familien zu betrachten, und in diesem Fall ist $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{WP}}$ tatsächlich positiv definit und damit ein hermitesches Skalarprodukt auf T_tS. Wir bemerken ferner, dass die Definition funktoriell in Bezug auf Basiswechsel ist und damit Anlass zu einem hermiteschen Skalarprodukt auf dem Tangentialraum des Modulraums im Punkt $[F_t \to X]$ gibt. Wir verweisen hierfür auf [Ov92, ST92].

Zur Untersuchung von $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{WP}}$ leiten wir zunächst eine bequeme Formel für das Skalarprodukt endomorphismenbündelwertiger Differentialformen her, aus der wir später eine Faserintegralformel gewinnen werden. Zu diesem Zweck zeigen wir vorab, wie auf einer kompakten Kählermannigfaltigkeit (X,g) mit Kählerform $\omega \in \Gamma\left(X, \mathcal{A}^{1,1}(X)\right)$ der zum Lefschetz-Operator

$$L : \Gamma\left(X, \mathcal{A}^{p,q}(X)\right) \longrightarrow \Gamma\left(X, \mathcal{A}^{p+1,q+1}(X)\right), \qquad \alpha \longmapsto \omega \wedge \alpha \tag{3.51}$$

bezüglich des Skalarproduktes auf den Räumen $\Gamma\left(X, \mathcal{A}^{p,q}(X)\right)$ formal adjungierte Operator

$$\Lambda_g : \Gamma\left(X, \mathcal{A}^{p,q}(X)\right) \longrightarrow \Gamma\left(X, \mathcal{A}^{p-1,q-1}(X)\right) \tag{3.52}$$

lokal berechnet werden kann.

Proposition 3.19. *Es sei (X,g) eine kompakte Kählermannigfaltigkeit und $\omega \in \Gamma\left(X, \mathcal{A}^{1,1}(X)\right)$ die zugehörige Kählerform. Ist $\mu \in \Gamma\left(X, \mathcal{A}^{p,q}(X)\right)$ auf einer offenen Menge U_j aus einer offenen Überdeckung von X durch Koordinatenumgebungen (U_k, z_k) durch*

$$\mu_j = \frac{1}{p!q!} \sum_{\alpha,\beta} \mu_{j\,\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}} dz_j^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\alpha_p} \wedge dz_j^{\overline{\beta_1}} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\beta_q}}$$

gegeben, dann ist lokal auf U_j

$$(\Lambda_g\mu)_j = \frac{1}{(p-1)!(q-1)!} \sum_{\alpha,\beta} (\Lambda_g\mu)_{j\,\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}}\, dz_j^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\alpha_{p-1}} \wedge dz_j^{\overline{\beta_1}} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\beta_{q-1}}}$$

mit

$$(\Lambda_g\mu)_{j\,\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}} = (-1)^p\sqrt{-1} \sum_{\eta,\tau} g_j^{\overline{\eta}\tau} \mu_{j\,\tau\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}\overline{\eta}\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}}.$$

Beweis. Wir wählen ein beliebiges $\eta \in \Gamma\left(X, \mathcal{A}^{p-1,q-1}(X)\right)$ und schreiben dieses auf U_j als

$$\eta_j = \frac{1}{(p-1)!(q-1)!} \sum_{\alpha,\beta} \eta_{j\,\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}} dz_j^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\alpha_{p-1}} \wedge dz_j^{\overline{\beta_1}} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\beta_{q-1}}}.$$

Nun berechnen wir $L\eta = \omega \wedge \eta$ lokal:

$$(\omega \wedge \eta)_j = \left(\sqrt{-1} \sum_{\gamma,\delta} g_{j\,\gamma\overline{\delta}} dz_j^{\gamma} \wedge dz_j^{\overline{\delta}}\right) \wedge \left(\frac{1}{(p-1)!(q-1)!} \sum_{\alpha,\beta} \eta_{j\,\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}} dz_j^{\alpha_1} \ldots \wedge dz_j^{\overline{\beta_{q-1}}}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{-1}(-1)^{p-1}}{(p-1)!(q-1)!} \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} g_{j\,\gamma\overline{\delta}} \eta_{j\,\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}} dz_j^{\gamma} \wedge dz_j^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\delta}} \wedge dz_j^{\overline{\beta_1}} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\beta_{q-1}}} \\
&= \frac{\sqrt{-1}(-1)^{p-1}}{p!q!} \sum_{\alpha,\beta} \sum_{\nu=1}^{p} \sum_{\mu=1}^{q} (-1)^{\nu+\mu} g_{j\,\alpha_\nu\overline{\beta_\mu}} \eta_{j\,\alpha_1\ldots\widehat{\alpha_\nu}\ldots\alpha_p\overline{\beta_1}\ldots\widehat{\overline{\beta_\mu}}\ldots\overline{\beta_q}} dz_j^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\beta_q}}.
\end{aligned}
$$

Wir haben also für die schiefsymmetrischen Koeffizienten die Formel

$$
L(\eta)_{j\,\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}} = \sqrt{-1}(-1)^{p-1} \sum_{\nu=1}^{p} \sum_{\mu=1}^{q} (-1)^{\nu+\mu} g_{j\,\alpha_\nu\overline{\beta_\mu}} \eta_{j\,\alpha_1\ldots\widehat{\alpha_\nu}\ldots\alpha_p\overline{\beta_1}\ldots\widehat{\overline{\beta_\mu}}\ldots\overline{\beta_q}}
$$

nachgewiesen. Damit berechnen wir wegen $\langle \Lambda_g \mu, \eta \rangle = \langle \mu, L(\eta) \rangle$ lokal auf U_j:

$$
\begin{aligned}
&(\mu, L(\eta))|_{U_j} = \frac{1}{p!q!} \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\rho} g_j^{\overline{\gamma_1}\alpha_1} \cdots g_j^{\overline{\gamma_p}\alpha_p} g_j^{\overline{\beta_1}\rho_1} \cdots g_j^{\overline{\beta_q}\rho_q} \mu_{j\,\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}} \overline{L(\eta)_{j\,\gamma_1\ldots\gamma_p\overline{\rho_1}\ldots\overline{\rho_q}}} \\
&= \frac{1}{p!q!} \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\rho} g_j^{\overline{\gamma_1}\alpha_1} \cdots g_j^{\overline{\beta_q}\rho_q} \mu_{j\,\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}} \overline{\sum_{\nu=1}^{p} \sum_{\mu=1}^{q} \sqrt{-1}(-1)^{p-1}(-1)^{\nu+\mu} g_{j\,\gamma_\nu\overline{\rho_\mu}} \eta_{j\,\gamma_1\ldots\widehat{\gamma_\nu}\ldots\gamma_p\overline{\rho_1}\ldots\widehat{\overline{\rho_\mu}}\ldots\overline{\rho_q}}} \\
&= \frac{1}{p!q!} \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\rho} \sum_{\nu=1}^{p} \sum_{\mu=1}^{q} -\sqrt{-1}(-1)^{p-1+\nu+\mu} g_j^{\overline{\gamma_1}\alpha_1} \cdots g_j^{\overline{\beta_q}\rho_q} \mu_{j\,\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}} g_{j\,\rho_\mu\overline{\gamma_\nu}} \overline{\eta_{j\,\gamma_1\ldots\widehat{\gamma_\nu}\ldots\gamma_p\overline{\rho_1}\ldots\widehat{\overline{\rho_\mu}}\ldots\overline{\rho_q}}} \\
&= \frac{1}{p!q!} \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\rho} \sum_{\nu=1}^{p} \sum_{\mu=1}^{q} \sqrt{-1}(-1)^{p} g_j^{\overline{\gamma_1}\alpha_1} \cdots \widehat{g_j^{\overline{\gamma_\nu}\alpha_\nu}} \cdots g_j^{\overline{\gamma_p}\alpha_p} g_j^{\overline{\beta_1}\rho_1} \cdots \widehat{g_j^{\overline{\beta_\mu}\rho_\mu}} \cdots g_j^{\overline{\beta_q}\rho_q} g_j^{\overline{\gamma_\nu}\alpha_\nu} g_j^{\overline{\beta_\mu}\rho_\mu} g_{j\,\rho_\mu\overline{\gamma_\nu}} \cdot \\
&\qquad \cdot \mu_{j\,\alpha_\nu\alpha_1\ldots\widehat{\alpha_\nu}\ldots\alpha_p\overline{\beta_\mu}\overline{\beta_1}\ldots\widehat{\overline{\beta_\mu}}\ldots\overline{\beta_q}} \overline{\eta_{j\,\gamma_1\ldots\widehat{\gamma_\nu}\ldots\gamma_p\overline{\rho_1}\ldots\widehat{\overline{\rho_\mu}}\ldots\overline{\rho_q}}} \\
&= \frac{1}{p!q!} \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\rho} \sum_{\eta,\tau,\theta,\sigma} \sum_{\nu=1}^{p} \sum_{\mu=1}^{q} \sqrt{-1}(-1)^{p} g_j^{\overline{\gamma_1}\alpha_1} \cdots g_j^{\overline{\gamma_{p-1}}\alpha_{p-1}} g_j^{\overline{\beta_1}\rho_1} \cdots g_j^{\overline{\beta_{q-1}}\rho_{q-1}} g_j^{\overline{\eta}\tau} g_j^{\overline{\theta}\sigma} g_{j\,\sigma\overline{\eta}} \cdot \\
&\qquad \cdot \mu_{j\,\tau\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}\overline{\theta}\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}} \overline{\eta_{j\,\gamma_1\ldots\gamma_{p-1}\overline{\rho_1}\ldots\overline{\rho_{q-1}}}} \\
&= \frac{1}{(p-1)!(q-1)!} \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\rho} g_j^{\overline{\gamma_1}\alpha_1} \cdots g_j^{\overline{\gamma_{p-1}}\alpha_{p-1}} g_j^{\overline{\beta_1}\rho_1} \cdots g_j^{\overline{\beta_{q-1}}\rho_{q-1}} \cdot \\
&\qquad \cdot \left(\sqrt{-1}(-1)^p \sum_{\eta,\tau} g_j^{\overline{\eta}\tau} \mu_{j\,\tau\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}\overline{\eta}\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}} \right) \overline{\eta_{j\,\gamma_1\ldots\gamma_{p-1}\overline{\rho_1}\ldots\overline{\rho_{q-1}}}}.
\end{aligned}
$$

Da $\eta \in \Gamma\left(X, \mathcal{A}^{p-1,q-1}(X)\right)$ beliebig war, erhalten wir

$$
(\Lambda_g \mu)_{j\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}} = \sqrt{-1}(-1)^p \sum_{\eta,\tau} g_j^{\overline{\eta}\tau} \mu_{j\,\tau\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}\overline{\eta}\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}},
$$

womit die Behauptung nachgewiesen ist. $\square$

Aus dieser Formel folgt nun unmittelbar folgendes Korollar:

Korollar 3.20. *Es sei* (X, g) *eine kompakte Kählermannigfaltigkeit und* $\mu \in \Gamma\left(X, \mathcal{A}^{q,q}(X)\right)$ *auf einem Element* U_j *aus einer offenen Überdeckung von* X *durch Koordinatenumgebungen* (U_k, z_k) *durch*

$$\mu_j = \frac{1}{q!q!} \sum_{\alpha,\beta} \mu_{j\,\alpha_1 \ldots \alpha_q \overline{\beta_1} \ldots \overline{\beta_q}} dz_j^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\alpha_q} \wedge dz_j^{\overline{\beta_1}} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\beta_q}}$$

gegeben. Dann gilt für die glatte Funktion $\Lambda_g^q \mu \in \Gamma\left(X, \mathcal{A}^{0,0}(X)\right)$ *lokal auf* U_j *die Gleichung*

$$\left(\Lambda_g^q \mu\right)\big|_{U_j} = \left(\sqrt{-1}\right)^q (-1)^{\frac{q(q+1)}{2}} \sum_{\eta,\tau} g_j^{\overline{\eta_1}\tau_1} \cdots g_j^{\overline{\eta_q}\tau_q} \mu_{j\,\tau_1 \ldots \tau_q \overline{\eta_1} \ldots \overline{\eta_q}}.$$

Mit dieser Vorbereitung zeigen wir analog zu Proposition 2.2 eine Formel für das Skalarprodukt endomorphismenbündelwertiger $(0, q)$-Formen.

Proposition 3.21. *Sei* (X, g) *eine kompakte Kählermannigfaltigkeit der Dimension* n *mit Kählerform* $\omega \in \Gamma\left(X, \mathcal{A}^{1,1}(X)\right)$ *und* $\pi : F \to X$ *ein holomorphes Vektorbündel mit einer hermiteschen Metrik* h. *Sind zwei Schnitte* $A, B \in \Gamma\left(X, \mathcal{A}^{0,q}(\mathrm{End}(F))\right)$ *gegeben, dann folgt für das von* h *induzierte Skalarprodukt:*

$$\langle A, B \rangle = \left(\sqrt{-1}\right)^q (-1)^{\frac{q(q+1)}{2}} \int_X \Lambda_g^q \mathrm{tr}(A \wedge B^*) \frac{\omega^n}{n!}.$$

Beweis. Wir schreiben A und B lokal auf einer offenen Menge U_j aus einer lokal endlichen offenen Überdeckung von X durch Koordinatenumgebungen (U_k, z_k) in der Form

$$A_{j\,\sigma}^{\rho} = \frac{1}{q!} \sum_{\beta} A_{j\,\sigma\overline{\beta_1} \ldots \overline{\beta_q}}^{\rho} dz_j^{\overline{\beta_1}} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\beta_q}} \quad \text{sowie} \quad B_{j\,\sigma}^{\rho} = \frac{1}{q!} \sum_{\beta} B_{j\,\sigma\overline{\beta_1} \ldots \overline{\beta_q}}^{\rho} dz_j^{\overline{\beta_1}} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\beta_q}}.$$

Dann wird der zu B adjungierte Operator $B^* \in \Gamma\left(X, \mathcal{A}^{q,0}(\mathrm{End}(F))\right)$ gemäß (2.27) lokal auf U_j gegeben durch

$$B_j^* = \left(B_{j\,\sigma}^{*\,\rho}\right)_{\rho,\sigma} \quad \text{mit} \quad B_{j\,\sigma}^{*\,\rho} = \frac{1}{q!} \sum_{\alpha} \left(\sum_{\tau,\nu} h_j^{\overline{\tau}\rho} \overline{B_{j\,\tau\overline{\alpha_1} \ldots \overline{\alpha_q}}^{\nu}} h_{j\,\sigma\overline{\nu}} \right) dz_j^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\alpha_q}.$$

Damit berechnen wir zunächst

$$\begin{aligned}
(A \wedge B^*)_{j\,\sigma}^{\rho} &= \sum_{\mu} A_{j\,\mu}^{\rho} \wedge B_{j\,\sigma}^{*\,\mu} \\
&= \frac{1}{q!q!} \sum_{\alpha,\beta} \left((-1)^{q\cdot q} \sum_{\tau,\nu,\mu} A_{j\,\mu\overline{\beta_1} \ldots \overline{\beta_q}}^{\rho} h_j^{\overline{\tau}\mu} \overline{B_{j\,\tau\overline{\alpha_1} \ldots \overline{\alpha_q}}^{\nu}} h_{j\,\sigma\overline{\nu}} \right) dz_j^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\alpha_q} \wedge dz_j^{\overline{\beta_1}} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\beta_q}}
\end{aligned}$$

und können weiter $\mathrm{tr}(A \wedge B^*) \in \Gamma\left(X, \mathcal{A}^{q,q}(X)\right)$ ausrechnen:

$$(\mathrm{tr}(A \wedge B^*))_j = \frac{1}{q!q!} \sum_{\alpha,\beta} \left((-1)^{q\cdot q} \sum_{\rho,\tau,\nu,\mu} A_{j\,\mu\overline{\beta_1} \ldots \overline{\beta_q}}^{\rho} h_j^{\overline{\tau}\mu} \overline{B_{j\,\tau\overline{\alpha_1} \ldots \overline{\alpha_q}}^{\nu}} h_{j\,\rho\overline{\nu}} \right) dz_j^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\beta_q}}.$$

Wenden wir nun Korollar 3.20 an, so erhalten wir für die glatte Funktion $\Lambda_g^q \mathrm{tr}(A \wedge B^*)$ lokal auf U_j die Formel

$$\Lambda_g^q \mathrm{tr}(A \wedge B^*)\big|_{U_j} = \left(\sqrt{-1}\right)^q (-1)^{\frac{q(q+1)}{2}} \sum_{\eta,\tau} g_j^{\overline{\eta_1}\tau_1} \cdots g_j^{\overline{\eta_q}\tau_q} (-1)^{q \cdot q} \sum_{\rho,\tau,\nu,\mu} A^{\rho}_{j\,\mu\overline{\eta_1}\ldots\overline{\eta_q}} h_j^{\overline{\tau}\mu} \overline{B^{\nu}_{j\,\tau\overline{\tau_1}\ldots\overline{\tau_q}}} h_{j\,\rho\overline{\nu}}.$$

Umklammern der Terme ergibt

$$\Lambda_g^q \mathrm{tr}(A \wedge B^*)\big|_{U_j} = \left(\sqrt{-1}\right)^q (-1)^{q^2+\frac{q(q+1)}{2}} \sum_{\rho,\tau,\nu,\mu} h_j^{\overline{\tau}\mu} h_{j\,\rho\overline{\nu}} \sum_{\eta,\tau} g_j^{\overline{\eta_1}\tau_1} \cdots g_j^{\overline{\eta_q}\tau_q} A^{\rho}_{j\,\mu\overline{\eta_1}\ldots\overline{\eta_q}} \overline{B^{\nu}_{j\,\tau\overline{\tau_1}\ldots\overline{\tau_q}}}.$$

Also ist

$$\Lambda_g^q \mathrm{tr}(A \wedge B^*)\big|_{U_j} = \left(\sqrt{-1}\right)^q (-1)^{q^2+\frac{q(q+1)}{2}} \sum_{\rho,\tau,\nu,\mu} H_{j\,(\rho\mu)(\overline{\nu\tau})} \left(A^{\rho}_{j\,\mu}, B^{\nu}_{j\,\tau}\right)$$

und schließlich:

$$\Lambda_g^q \mathrm{tr}(A \wedge B^*) = \left(\sqrt{-1}\right)^q (-1)^{q^2+\frac{q(q+1)}{2}} (A, B)\,.$$

Indem wir das Vorzeichen berechnen, erhalten wir hieraus durch Integration die Behauptung. □

Da wir für die Untersuchung von $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{WP}}$ lokal arbeiten müssen, führen wir an dieser Stelle einige Notationen ein. Es sei also (V, s) eine holomorphe Koordinatenumgebung auf S um den Punkt $s_0 \in S$. Damit stehen uns lokal auf V die holomorphen beziehungsweise antiholomorphen Koordinatenvektorfelder

$$\frac{\partial}{\partial s^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial s^m} \qquad \text{sowie} \qquad \frac{\partial}{\partial s^{\overline{1}}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial s^{\overline{m}}} \tag{3.53}$$

zur Verfügung. Bezeichnen wir die Krümmung der Familie $(F, h) \to X \times S$ wie üblich mit $\Omega \in \Gamma\left(X \times S, \mathcal{A}^{1,1}(\mathrm{End}(F))\right)$, dann können wir für $1 \leqslant k, l \leqslant m$ definieren:

$$\rho_k = \frac{\partial}{\partial s^k} \lrcorner\, \Omega \in \Gamma\left(X \times V, \mathcal{A}^{0,1}(\mathrm{End}(F))\right), \quad \rho_{\overline{k}} = \frac{\partial}{\partial s^{\overline{k}}} \lrcorner\, \Omega \in \Gamma\left(X \times V, \mathcal{A}^{1,0}(\mathrm{End}(F))\right). \tag{3.54}$$

Ferner sei

$$\rho_{k\bar{l}} = \frac{\partial}{\partial s^{\bar{l}}} \lrcorner \left(\frac{\partial}{\partial s^k} \lrcorner\, \Omega\right) \in \Gamma\left(X \times V, \mathcal{A}^{0,0}(\mathrm{End}(F))\right). \tag{3.55}$$

Damit die Notation nicht zu umständlich wird, notieren wir die Koordinatenumgebung (V, s) in der Bezeichnung dieser Objekte nicht, obwohl sie natürlich wesentlich von (V, s) abhängen. Mit den Notationen aus 3.1 können wir Ω auf $U_j \times V$ durch $\Theta_j = (\Theta^{\rho}_{j\,\sigma})_{\rho,\sigma}$ beschreiben und es ist:

$$\Theta^{\rho}_{j\,\sigma} = \sum_{\alpha,\beta} R^{\rho}_{j\,\sigma\alpha\overline{\beta}} dw_j^{\alpha} \wedge dw_j^{\overline{\beta}}.$$

Entsprechend erhalten wir lokal auf $U_j \times V$ die Beschreibungen

$$(\rho_k)^{\rho}_{j\,\sigma} = \sum_{\beta} R^{\rho}_{j\,\sigma k\overline{\beta}} dw_j^{\overline{\beta}}, \qquad (\rho_{\overline{k}})^{\rho}_{j\,\sigma} = \sum_{\alpha} -R^{\rho}_{j\,\sigma\alpha\overline{k}} dw_j^{\alpha} \qquad \text{sowie} \qquad (\rho_{k\bar{l}})^{\rho}_{j\,\sigma} = R^{\rho}_{j\,\sigma k\bar{l}}. \tag{3.56}$$

Wegen Theorem 3.18 haben wir für die Kodaira-Spencer-Abbildung im Punkt $s_0 \in S$

$$\rho_{s_0}\left(\frac{\partial}{\partial s^k}\bigg|_{s_0}\right) = \left(-\frac{\partial}{\partial s^k} \lrcorner\, \Omega\right)\bigg|_{s_0} = -\,\rho_k|_{s_0}\,, \tag{3.57}$$

so dass wir uns insbesondere für die lokalen Darstellungen der Formen (3.54) sowie (3.55) nach Einschränkung auf die Faser zu s_0 interessieren. Diese sind auf U_j durch

$$(\rho_k|_{s_0})^{\rho}_{j\,\sigma} = \sum_{\beta} R^{\rho}_{j\,\sigma k\overline{\beta}}(s_0)dz^{\overline{\beta}}_j, \quad (\rho_{\overline{k}}|_{s_0})^{\rho}_{j\,\sigma} = \sum_{\alpha} -R^{\rho}_{j\,\sigma\alpha\overline{k}}(s_0)dz^{\alpha}_j \quad \text{und} \quad (\rho_{k\bar{l}}|_{s_0})^{\rho}_{j\,\sigma} = R^{\rho}_{j\,\sigma k\bar{l}}(s_0) \tag{3.58}$$

gegeben. Zwischen den einmaligen Kontraktionen besteht folgender Zusammenhang:

Proposition 3.22. *Ist $(F,h) \to X\times S$ eine Familie hermitescher, holomorpher Vektorbündel auf der kompakten Kählermannigfaltigkeit (X,g), parametrisiert durch die komplexe Mannigfaltigkeit S, und (V,s) eine holomorphe Koordinatenumgebung von S um den Punkt $s_0 \in S$, dann gilt für die oben definierten Objekte die Beziehung $(\rho_{\overline{k}}|_{s_0})^* = -\rho_k|_{s_0}$.*

Beweis. Wir rechnen lokal auf einem Element U_j einer offenen Überdeckung von X durch Koordinatenumgebungen. Aus der Definition (2.27) des adjungierten Operators folgt zunächst

$$\left(\rho_{\overline{k}}|_{s_0}\right)^{*\,\rho}_{j\,\sigma} = \sum_{\beta} -\left(\sum_{\tau,\nu} h^{\overline{\tau}\rho}_j(s_0)\overline{R^{\nu}_{j\,\tau\beta\overline{k}}(s_0)}h_{j\,\sigma\overline{\nu}}(s_0)\right)dz^{\overline{\beta}}_j.$$

Um die Behauptung nachzuweisen, müssen wir also zeigen, dass für alle Indizes ρ,σ,β

$$-\sum_{\tau,\nu} h^{\overline{\tau}\rho}_j(s_0)\overline{R^{\nu}_{j\,\tau\beta\overline{k}}(s_0)}h_{j\,\sigma\overline{\nu}}(s_0) = -R^{\rho}_{j\,\sigma k\overline{\beta}}(s_0) \tag{3.59}$$

gilt. Der Einfachheit halber notieren wir von nun an den Parameter s_0 nicht mehr. Zunächst ist

$$R^{\nu}_{j\,\tau\beta\overline{k}} = -\partial_{\overline{k}}\Gamma^{\nu}_{j\,\beta\tau} = -\partial_{\overline{k}}\left(\sum_{\zeta} h^{\overline{\zeta}\nu}_j \partial_\beta h_{j\,\tau\overline{\zeta}}\right) = -\sum_{\zeta}\left(\partial_{\overline{k}}h^{\overline{\zeta}\nu}_j\right)\partial_\beta h_{j\,\tau\overline{\zeta}} - \sum_{\zeta} h^{\overline{\zeta}\nu}_j \partial_{\overline{k}}\partial_\beta h_{j\,\tau\overline{\zeta}}$$

und damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
-\sum_{\tau,\nu} h^{\overline{\tau}\rho}_j\overline{R^{\nu}_{j\,\tau\beta\overline{k}}}h_{j\,\sigma\overline{\nu}} &= \sum_{\tau,\nu,\zeta} h^{\overline{\tau}\rho}_j\overline{\left(\partial_{\overline{k}}h^{\overline{\zeta}\nu}_j\right)\left(\partial_\beta h_{j\,\tau\overline{\zeta}}\right)}h_{j\,\sigma\overline{\nu}} + \sum_{\tau,\nu,\zeta} h^{\overline{\tau}\rho}_j\overline{h^{\overline{\zeta}\nu}_j\left(\partial_{\overline{k}}\partial_\beta h_{j\,\tau\overline{\zeta}}\right)}h_{j\,\sigma\overline{\nu}} \\
&= \sum_{\tau,\nu,\zeta} h^{\overline{\tau}\rho}_j h_{j\,\sigma\overline{\nu}}\left(\partial_k h^{\overline{\nu}\zeta}_j\right)\left(\partial_{\overline{\beta}}h_{j\,\zeta\overline{\tau}}\right) + \sum_{\tau,\nu,\zeta} h^{\overline{\tau}\rho}_j h_{j\,\sigma\overline{\nu}}h^{\overline{\nu}\zeta}_j\partial_k\partial_{\overline{\beta}}h_{j\,\zeta\overline{\tau}} =: R_1 + R_2.
\end{aligned}$$

Wir formen R_1 unter Verwendung der Formel (2.32) für die Ableitung inverser Matrizen um:

$$R_1 = -\sum_{\tau,\nu,\zeta}\sum_{\alpha_1,\alpha_2} h^{\overline{\tau}\rho}_j h_{j\,\sigma\overline{\nu}}h^{\overline{\nu}\alpha_2}_j h^{\overline{\alpha_1}\zeta}_j\left(\partial_k h_{j\,\alpha_2\overline{\alpha_1}}\right)\left(\partial_{\overline{\beta}}h_{j\,\zeta\overline{\tau}}\right) = -\sum_{\tau,\zeta,\alpha_1} h^{\overline{\tau}\rho}_j h^{\overline{\alpha_1}\zeta}_j\left(\partial_k h_{j\,\sigma\overline{\alpha_1}}\right)\left(\partial_{\overline{\beta}}h_{j\,\zeta\overline{\tau}}\right).$$

Indem wir die Indizes α_1 und τ vertauschen und ζ in α_2 umbenennen, folgt unter erneuter Ausnutzung der Formel (2.32)

$$R_1 = -\sum_{\tau}\sum_{\alpha_1,\alpha_2} h_j^{\overline{\alpha_1}\rho} h_j^{\overline{\tau}\alpha_2} \left(\partial_k h_{j\,\sigma\overline{\tau}}\right) \left(\partial_{\overline{\beta}} h_{j\,\alpha_2\overline{\alpha_1}}\right) = \sum_{\tau} \left(\partial_k h_{j\,\sigma\overline{\tau}}\right) \left(\partial_{\overline{\beta}} h_j^{\overline{\tau}\rho}\right).$$

Als nächstes formen wir R_2 mit Hilfe des Satzes von Schwarz um:

$$R_2 = \sum_{\tau,\nu,\zeta} h_j^{\overline{\tau}\rho} h_{j\,\sigma\overline{\nu}} h_j^{\overline{\nu}\zeta} \partial_k \partial_{\overline{\beta}} h_{j\,\zeta\overline{\tau}} = \sum_{\tau} h_j^{\overline{\tau}\rho} \partial_k \partial_{\overline{\beta}} h_{j\,\sigma\overline{\tau}} = \partial_{\overline{\beta}} \left(\sum_{\tau} h_j^{\overline{\tau}\rho} \partial_k h_{j\,\sigma\overline{\tau}} \right) - \sum_{\tau} \left(\partial_{\overline{\beta}} h_j^{\overline{\tau}\rho}\right) \partial_k h_{j\,\sigma\overline{\tau}}.$$

Mit diesen Formeln für R_1 und R_2 berechnen wir schließlich:

$$\begin{aligned} -\sum_{\tau,\nu} h_j^{\overline{\tau}\rho} \overline{R^{\nu}_{j\,\tau\beta\overline{k}}} h_{j\,\sigma\overline{\nu}} &= \sum_{\tau} \left(\partial_k h_{j\,\sigma\overline{\tau}}\right) \left(\partial_{\overline{\beta}} h_j^{\overline{\tau}\rho}\right) + \partial_{\overline{\beta}} \left(\sum_{\tau} h_j^{\overline{\tau}\rho} \partial_k h_{j\,\sigma\overline{\tau}} \right) - \sum_{\tau} \left(\partial_{\overline{\beta}} h_j^{\overline{\tau}\rho}\right) \partial_k h_{j\,\sigma\overline{\tau}} \\ &= \partial_{\overline{\beta}} \left(\sum_{\tau} h_j^{\overline{\tau}\rho} \partial_k h_{j\,\sigma\overline{\tau}} \right) = \partial_{\overline{\beta}} \Gamma^{\rho}_{j\,k\sigma} = -R^{\rho}_{j\,\sigma k\overline{\beta}}. \end{aligned}$$

Damit ist die erforderliche Gleichung (3.59) erwiesen. □

Mit diesen Notationen kommen wir nun zur Untersuchung von $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{WP}}$. Wir fixieren dazu eine holomorphe Koordinatenumgebung (V, s) auf S. Die Weil-Petersson-Metrik $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{WP}}$ kann dann lokal auf V durch Funktionen

$$g^{\mathrm{WP}} : V \longrightarrow \mathbb{C}^{m\times m} \quad \text{mit} \quad g^{\mathrm{WP}}_{i\overline{j}}(t) = \left\langle \left.\frac{\partial}{\partial s^i}\right|_t, \left.\frac{\partial}{\partial s^j}\right|_t \right\rangle_{\mathrm{WP}} \tag{3.60}$$

beschrieben werden. Nach Proposition 3.21 gilt für $v, w \in T_t S$ in einem Punkt $t \in S$:

$$\langle v, w\rangle_{\mathrm{WP}} = -\sqrt{-1} \int_X \Lambda_g \operatorname{tr}\left(\rho_t(v) \wedge \rho_t(w)^*\right) \frac{\omega^n}{n!}. \tag{3.61}$$

Also berechnen wir

$$g^{\mathrm{WP}}_{i\overline{j}}(t) = \left\langle \left.\frac{\partial}{\partial s^i}\right|_t, \left.\frac{\partial}{\partial s^j}\right|_t \right\rangle_{\mathrm{WP}} = -\sqrt{-1} \int_X \Lambda_g \operatorname{tr}\left(\rho_t\left(\left.\frac{\partial}{\partial s^i}\right|_t \right) \wedge \rho_t\left(\left.\frac{\partial}{\partial s^j}\right|_t \right)^* \right) \frac{\omega^n}{n!}.$$

Da eine Familie von Hermite-Einstein-Vektorbündeln vorliegt, ist nach Theorem 3.18 und vermöge unserer Konventionen (vergleiche (3.57))

$$\rho_t\left(\left.\frac{\partial}{\partial s^i}\right|_t \right) = -\left.\left(\frac{\partial}{\partial s^i} \lrcorner\, \Omega \right)\right|_t = -\left.\rho_i\right|_t,$$

so dass wir unter Ausnutzung von Proposition 3.22 weiter umformen können:

$$g^{\mathrm{WP}}_{i\overline{j}}(t) = -\sqrt{-1} \int_X \Lambda_g \operatorname{tr}\left(\left.\rho_i\right|_t \wedge \left(\left.\rho_j\right|_t\right)^* \right) \frac{\omega^n}{n!} = \sqrt{-1} \int_X \Lambda_g \operatorname{tr}\left(\left.\rho_i\right|_t \wedge \left.\rho_{\overline{j}}\right|_t \right) \frac{\omega^n}{n!}. \tag{3.62}$$

Wir wollen eine lokale Formel herleiten und berechnen auf einem Element U_k einer offenen Überdeckung von X durch Koordinatenumgebungen (U_l, z_l) vermöge (2.28) und (3.58):

$$\left(\rho_i|_t \wedge \rho_{\bar{j}}|_t\right)^{\rho}_{k\,\sigma} = \sum_{\eta} - \sum_{\alpha,\beta} R^{\rho}_{k\,\eta i\bar{\beta}}(t) R^{\eta}_{k\,\sigma\alpha\bar{j}}(t) dz_k^{\bar{\beta}} \wedge dz_k^{\alpha} = \sum_{\alpha,\beta}\sum_{\eta} R^{\rho}_{k\,\eta i\bar{\beta}}(t) R^{\eta}_{k\,\sigma\alpha\bar{j}}(t) dz_k^{\alpha} \wedge dz_k^{\bar{\beta}}.$$

Hiermit rechnen wir weiter

$$\left(\Lambda_g \operatorname{tr}\left(\rho_i|_t \wedge \left(\rho_j|_t\right)^*\right)\right)\big|_{U_k} = -\sqrt{-1}\sum_{\alpha,\beta} g_k^{\bar{\beta}\alpha} \sum_{\eta,\rho} R^{\rho}_{k\,\eta i\bar{\beta}}(t) R^{\eta}_{k\,\rho\alpha\bar{j}}(t),$$

so dass wir insgesamt die lokal auf U_k zu lesende Formel

$$g^{\mathrm{WP}}_{i\bar{j}}(t) = \sqrt{-1}\int_X \Lambda_g \operatorname{tr}\left(\rho_i|_t \wedge \rho_{\bar{j}}|_t\right)\frac{\omega^n}{n!} = \int_X \sum_{\alpha,\beta} g_k^{\bar{\beta}\alpha} \sum_{\eta,\rho} R^{\rho}_{k\,\eta i\bar{\beta}}(t) R^{\eta}_{k\,\rho\alpha\bar{j}}(t)\frac{\omega^n}{n!} \tag{3.63}$$

erhalten, welche in [Ov92] als Definition für $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{WP}}$ verwendet wird. Wir bezeichnen von nun an die Kählerform dieser hermiteschen Metrik mit $\omega_{\mathrm{WP}} \in \Gamma\left(S, \mathcal{A}^{1,1}(S)\right)$, d.h. lokal auf V ist

$$(\omega_{\mathrm{WP}})|_V = \sqrt{-1}\sum_{i,j} g^{\mathrm{WP}}_{i\bar{j}} ds^i \wedge ds^{\bar{j}}. \tag{3.64}$$

Um nachzuweisen, dass es sich um eine Kählermetrik handelt, gehen wir anders als in [Ov92] vor und verwenden eine Faserintegralformel für ω_{WP}, welche wir mit folgendem Satz herleiten.

Satz 3.23 ([Ov92])**.** *Es sei $(F,h) \to X \times S$ eine Familie von Hermite-Einstein-Vektorbündeln über der kompakten Kählermannigfaltigkeit (X,g) der Dimension n, parametrisiert durch die komplexe Mannigfaltigkeit S der Dimension m. Dann gilt die Beziehung*

$$\omega_{\mathrm{WP}} = \frac{-2\pi^2}{(n-1)!}\int_{X\times S/S}\left(\left(c_1(F,h)^2 - 2c_2(F,h)\right)\wedge\phi^{n-1} - \frac{\kappa}{n\pi}c_1(F,h)\wedge\phi^n\right),$$

wobei $\phi = \pi_1^*\omega$ der Pullback der Kählerform $\omega \in \Gamma\left(X, \mathcal{A}^{1,1}(X)\right)$ von (X,g) unter der Projektion $\pi_1 : X \times S \to X$ ist und κ die Hermite-Einstein-Konstante der Fasern als Funktion auf S bezeichnet.

Beweis. Wir arbeiten lokal mit den Notationen aus 3.1. Nach [Kb87] sind die von der Krümmung Ω von (F,h) induzierten Repräsentanten $c_1(F,h) \in \Gamma\left(X\times S, \mathcal{A}^{1,1}(X\times S)\right)$ der ersten Chern-Klasse und $c_2(F,h) \in \Gamma\left(X\times S, \mathcal{A}^{2,2}(X\times S)\right)$ der zweiten Chern-Klasse lokal auf $U_l \times V$ durch

$$(c_1(F,h))_l = \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}}\sum_{\rho}\Theta^{\rho}_{l\,\rho} \quad \text{sowie} \quad (c_2(F,h))_l = \frac{-1}{8\pi^2}\sum_{\rho,\sigma}\left(\Theta^{\rho}_{l\,\rho}\wedge\Theta^{\sigma}_{l\,\sigma} - \Theta^{\rho}_{l\,\sigma}\wedge\Theta^{\sigma}_{l\,\rho}\right)$$

gegeben, so dass wir für $c_1(F,h)^2 - 2c_2(F,h) \in \Gamma\left(X\times S, \mathcal{A}^{2,2}(X\times S)\right)$ erhalten:

$$\left(c_1(F,h)^2 - 2c_2(F,h)\right)_l = \frac{-1}{4\pi^2}\sum_{\rho,\sigma}\Theta^{\rho}_{l\,\sigma}\wedge\Theta^{\sigma}_{l\,\rho}.$$

Wegen $\phi = \pi_1^*\omega \in \Gamma\left(X \times S, \mathcal{A}^{1,1}\left(X \times S\right)\right)$ ist $\left(c_1(F,h)^2 - 2c_2(F,h)\right) \wedge \phi^{n-1}$ eine $(n+1, n+1)$-Form auf $X \times S$ und da wir zunächst das Faserintegral dieser Form berechnen wollen, müssen wir in ihrer lokalen Beschreibung den erforderlichen Formenanteil ermitteln. Zu diesem Zweck isolieren wir in $c_1(F,h)^2 - 2c_2(F,h)$ alle Summanden mit genau einem dz- und genau einem $d\overline{z}$-Faktor:

$$\begin{aligned}
\left(c_1(F,h)^2 - 2c_2(F,h)\right)_l &= \frac{-1}{4\pi^2}\sum_{\rho,\sigma}\left(\sum_{\alpha_1,\beta_1} R^{\rho}_{l\,\sigma\alpha_1\overline{\beta_1}} dw_l^{\alpha_1} \wedge dw_l^{\overline{\beta_1}}\right) \wedge \left(\sum_{\alpha_2,\beta_2} R^{\sigma}_{l\,\rho\alpha_2\overline{\beta_2}} dw_l^{\alpha_2} \wedge dw_l^{\overline{\beta_2}}\right)\\
&= \frac{-1}{4\pi^2}\sum_{\alpha,\beta,j,k}\left(\sum_{\rho,\sigma} R^{\rho}_{l\,\sigma\alpha\overline{\beta}} R^{\sigma}_{l\,\rho j\overline{k}}\right) dz_l^{\alpha} \wedge dz_l^{\overline{\beta}} \wedge ds^{j} \wedge ds^{\overline{k}}\\
&\quad + \frac{-1}{4\pi^2}\sum_{\alpha,\beta,j,k}\left(\sum_{\rho,\sigma} R^{\rho}_{l\,\sigma\alpha\overline{k}} R^{\sigma}_{l\,\rho j\overline{\beta}}\right) dz_l^{\alpha} \wedge ds^{\overline{k}} \wedge ds^{j} \wedge dz_l^{\overline{\beta}}\\
&\quad + \frac{-1}{4\pi^2}\sum_{\alpha,\beta,j,k}\left(\sum_{\rho,\sigma} R^{\rho}_{l\,\sigma j\overline{\beta}} R^{\sigma}_{l\,\rho\alpha\overline{k}}\right) ds^{j} \wedge dz_l^{\overline{\beta}} \wedge dz_l^{\alpha} \wedge ds^{\overline{k}}\\
&\quad + \frac{-1}{4\pi^2}\sum_{\alpha,\beta,j,k}\left(\sum_{\rho,\sigma} R^{\rho}_{l\,\sigma j\overline{k}} R^{\sigma}_{l\,\rho\alpha\overline{\beta}}\right) ds^{j} \wedge ds^{\overline{k}} \wedge dz_l^{\alpha} \wedge dz_l^{\overline{\beta}}\\
&\quad + \text{Summanden mit anderer Anzahl } dz\text{- oder } d\overline{z}\text{-Faktoren}\\
&= \frac{-1}{4\pi^2}\sum_{\alpha,\beta,j,k} \psi_{l\,j\overline{k}\alpha\overline{\beta}} ds^{j} \wedge ds^{\overline{k}} \wedge dz_l^{\alpha} \wedge dz_l^{\overline{\beta}}\\
&\quad + \text{Summanden mit anderer Anzahl } dz\text{- oder } d\overline{z}\text{-Faktoren.}
\end{aligned}$$

Dabei haben wir in der letzten Umformung

$$\psi_{l\,j\overline{k}\alpha\overline{\beta}} := \sum_{\rho,\sigma}\left(R^{\rho}_{l\,\sigma\alpha\overline{\beta}} R^{\sigma}_{l\,\rho j\overline{k}} - R^{\rho}_{l\,\sigma\alpha\overline{k}} R^{\sigma}_{l\,\rho j\overline{\beta}} - R^{\rho}_{l\,\sigma j\overline{\beta}} R^{\sigma}_{l\,\rho\alpha\overline{k}} + R^{\rho}_{l\,\sigma j\overline{k}} R^{\sigma}_{l\,\rho\alpha\overline{\beta}}\right)$$

definiert. Lokal auf $U_l \times V$ ist $\phi_l = \sqrt{-1}\sum_{\alpha,\beta} g_{l\,\alpha\overline{\beta}} dz_l^{\alpha} \wedge dz_l^{\overline{\beta}}$, so dass wir für ϕ^{n-1} erhalten:

$$\left(\phi^{n-1}\right)_l = \left(\sqrt{-1}\right)^{n-1}\sum_{\alpha,\beta} g_{l\,\alpha_1\overline{\beta_1}} \cdots g_{l\,\alpha_{n-1}\overline{\beta_{n-1}}} dz_l^{\alpha_1} \wedge dz_l^{\overline{\beta_1}} \wedge \ldots \wedge dz_l^{\alpha_{n-1}} \wedge dz_l^{\overline{\beta_{n-1}}}.$$

Damit berechnen wir:

$$\begin{aligned}
&\left(\left(c_1(F,h)^2 - 2c_2(F,h)\right) \wedge \phi^{n-1}\right)_l\\
&\quad = \left(\sqrt{-1}\right)^{n-1}\frac{-1}{4\pi^2}\sum_{\alpha,\beta,j,k} \psi_{l\,j\overline{k}\alpha_1\overline{\beta_1}} g_{l\,\alpha_2\overline{\beta_2}} \cdots g_{l\,\alpha_n\overline{\beta_n}} ds^{j} \wedge ds^{\overline{k}} \wedge dz_l^{\alpha_1} \wedge dz_l^{\overline{\beta_1}} \wedge \ldots \wedge dz_l^{\alpha_n} \wedge dz_l^{\overline{\beta_n}}\\
&\qquad + \text{Summanden mit weniger } dz\text{- oder } d\overline{z}\text{-Faktoren.}
\end{aligned}$$

Dabei haben wir verwendet, dass in $c_1(F,h)^2 - 2c_2(F,h)$ Summanden mit weniger als $(1,1)$ $dz/d\overline{z}$-Faktoren auftreten, welche im Produkt Anlass zu Summanden mit weniger als (n,n) $dz/d\overline{z}$-Faktoren geben und damit für unsere Belange nicht interessant sind, sowie Summanden mit mehr als $(1,1)$ $dz/d\overline{z}$-Faktoren, welche im Produkt mehr als n dz- beziehungsweise $d\overline{z}$-Faktoren ergeben und damit aus Dimensionsgründen verschwinden. Mit der Überlegung

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha}{}' \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} \psi_{l\, j\overline{k}\alpha_1\overline{\beta_1}} g_{l\,\alpha_2\overline{\beta_2}} \cdots g_{l\,\alpha_n\overline{\beta_n}} &= \begin{vmatrix} \psi_{l\, j\overline{k}1\overline{\beta_1}} & g_{l\,1\overline{\beta_2}} & \cdots & g_{l\,1\overline{\beta_n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_{l\, j\overline{k}n\overline{\beta_1}} & g_{l\,n\overline{\beta_2}} & \cdots & g_{l\,n\overline{\beta_n}} \end{vmatrix} \\
= \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \beta_1 & \cdots & \beta_n \end{pmatrix} &\begin{vmatrix} g_{l\,1\overline{1}} & \cdots & g_{l\,1\overline{\beta_1-1}} & \psi_{l\, j\overline{k}1\overline{\beta_1}} & g_{l\,1\overline{\beta_1+1}} & \cdots & g_{l\,1\overline{n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{l\,n\overline{1}} & \cdots & g_{l\,n\overline{\beta_1-1}} & \psi_{l\, j\overline{k}n\overline{\beta_1}} & g_{l\,n\overline{\beta_1+1}} & \cdots & g_{l\,n\overline{n}} \end{vmatrix} \\
= \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \beta_1 & \cdots & \beta_n \end{pmatrix} &|g_l| \sum_{\gamma} g_l^{\overline{\beta_1}\gamma} \psi_{l\, j\overline{k}\gamma\overline{\beta_1}}\,,
\end{aligned}$$

in welcher wir die Cramersche Regel verwendet haben, können wir weiter umformen:

$$\begin{aligned}
&\big((c_1(F)^2 - 2c_2(F)) \wedge \phi^{n-1}\big)_l \\
&\quad = \big(\sqrt{-1}\big)^{n-1} \frac{-1}{4\pi^2} \sum_{j,k} \sum_{\alpha,\beta}{}' \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \beta_1 & \cdots & \beta_n \end{pmatrix} \psi_{l\, j\overline{k}\alpha_1\overline{\beta_1}} g_{l\,\alpha_2\overline{\beta_2}} \cdots g_{l\,\alpha_n\overline{\beta_n}} \\
&\qquad ds^j \wedge ds^{\overline{k}} \wedge dz_l^1 \wedge dz_l^{\overline{1}} \wedge \ldots \wedge dz_l^n \wedge dz_l^{\overline{n}} + \text{Summanden mit weniger } dz\text{- oder } d\overline{z}\text{-Faktoren} \\
&\quad = \big(\sqrt{-1}\big)^{n-1} \frac{-1}{4\pi^2} \sum_{j,k} \sum_{\beta}{}' \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \beta_1 & \cdots & \beta_n \end{pmatrix}^2 |g_l| \sum_{\gamma} g_l^{\overline{\beta_1}\gamma} \psi_{l\, j\overline{k}\gamma\overline{\beta_1}} \\
&\qquad ds^j \wedge ds^{\overline{k}} \wedge dz_l^1 \wedge dz_l^{\overline{1}} \wedge \ldots \wedge dz_l^n \wedge dz_l^{\overline{n}} + \text{Summanden mit weniger } dz\text{- oder } d\overline{z}\text{-Faktoren} \\
&\quad = \big(\sqrt{-1}\big)^{n-1} \frac{-1}{4\pi^2} (n-1)!|g_l| \sum_{j,k} \sum_{\beta,\gamma} g_l^{\overline{\beta}\gamma} \psi_{l\, j\overline{k}\gamma\overline{\beta}} ds^j \wedge ds^{\overline{k}} \wedge dz_l^1 \wedge dz_l^{\overline{1}} \wedge \ldots \wedge dz_l^n \wedge dz_l^{\overline{n}} \\
&\qquad + \text{Summanden mit weniger } dz\text{- oder } d\overline{z}\text{-Faktoren.}
\end{aligned}$$

Wir berechnen für feste Indizes j und k

$$\begin{aligned}
&\sum_{\beta,\alpha} g_l^{\overline{\beta}\alpha} \psi_{l\, j\overline{k}\alpha\overline{\beta}} = \sum_{\beta,\alpha} g_l^{\overline{\beta}\alpha} \sum_{\rho,\sigma} \Big(R^{\rho}_{l\,\sigma\alpha\overline{\beta}} R^{\sigma}_{l\,\rho j\overline{k}} - R^{\rho}_{l\,\sigma\alpha\overline{k}} R^{\sigma}_{l\,\rho j\overline{\beta}} - R^{\rho}_{l\,\sigma j\overline{\beta}} R^{\sigma}_{l\,\rho\alpha\overline{k}} + R^{\rho}_{l\,\sigma j\overline{k}} R^{\sigma}_{l\,\rho\alpha\overline{\beta}} \Big) \\
&= \sum_{\rho,\sigma} \left(R^{\sigma}_{l\,\rho j\overline{k}} \sum_{\alpha,\beta} g_l^{\overline{\beta}\alpha} R^{\rho}_{l\,\sigma\alpha\overline{\beta}} + R^{\rho}_{l\,\sigma j\overline{k}} \sum_{\alpha,\beta} g_l^{\overline{\beta}\alpha} R^{\sigma}_{l\,\rho\alpha\overline{\beta}} \right) - \sum_{\alpha,\beta} g_l^{\overline{\beta}\alpha} \sum_{\rho,\sigma} \Big(R^{\rho}_{l\,\sigma\alpha\overline{k}} R^{\sigma}_{l\,\rho j\overline{\beta}} + R^{\rho}_{l\,\sigma j\overline{\beta}} R^{\sigma}_{l\,\rho\alpha\overline{k}} \Big) \\
&= 2\kappa \sum_{\rho} R^{\rho}_{l\,\rho j\overline{k}} - 2 \sum_{\alpha,\beta} g_l^{\overline{\beta}\alpha} \sum_{\rho,\sigma} R^{\sigma}_{l\,\rho j\overline{\beta}} R^{\rho}_{l\,\sigma\alpha\overline{k}},
\end{aligned}$$

wobei wir verwendet haben, dass die Fasern Hermite-Einstein-Bündel sind. Damit ergibt das Faserintegral

$$\int_{X\times S/S}\big(c_1(F,h)^2-2c_2(F,h)\big)\wedge\phi^{n-1}=\sum_{j,k}\eta_{j\bar{k}}ds^j\wedge ds^{\bar{k}}$$

und für die schiefsymmetrischen Koeffizienten folgt gemäß Satz 3.7

$$\begin{aligned}
\eta_{j\bar{k}}&=\big(\sqrt{-1}\big)^{n-1}\frac{-1}{4\pi^2}(n-1)!\int_X\sum_{\alpha,\beta}g_l^{\bar{\beta}\alpha}\psi_{l\,j\bar{k}\alpha\bar{\beta}}|g_l|dz_l^1\wedge dz_l^{\bar{1}}\wedge\ldots\wedge dz_l^n\wedge dz_l^{\bar{n}}\\
&=\frac{\sqrt{-1}}{4\pi^2}(n-1)!\int_X\sum_{\alpha,\beta}g_l^{\bar{\beta}\alpha}\psi_{l\,j\bar{k}\alpha\bar{\beta}}\frac{\omega^n}{n!}\\
&=\frac{\sqrt{-1}}{4\pi^2}(n-1)!\int_X 2\kappa\sum_{\rho}R^{\rho}_{l\,\rho j\bar{k}}\frac{\omega^n}{n!}-\frac{\sqrt{-1}}{4\pi^2}(n-1)!\int_X 2\sum_{\alpha,\beta}g_l^{\bar{\beta}\alpha}\sum_{\rho,\sigma}R^{\sigma}_{l\,\rho j\bar{\beta}}R^{\rho}_{l\,\sigma\alpha\bar{k}}\frac{\omega^n}{n!}\\
&=\frac{\sqrt{-1}}{4\pi^2}(n-1)!\int_X 2\kappa\sum_{\rho}R^{\rho}_{l\,\rho j\bar{k}}\frac{\omega^n}{n!}-\frac{(n-1)!\sqrt{-1}}{2\pi^2}g^{\mathrm{WP}}_{j\bar{k}},
\end{aligned}$$

wobei wir (3.15) und (3.63) ausgenutzt haben. Also finden wir

$$\sum_{j,k}\eta_{j\bar{k}}ds^j\wedge ds^{\bar{k}}=\sum_{j,k}\frac{\sqrt{-1}}{4\pi^2}(n-1)!\int_X 2\kappa\sum_{\rho}R^{\rho}_{l\,\rho j\bar{k}}\frac{\omega^n}{n!}ds^j\wedge ds^{\bar{k}}-\frac{(n-1)!\sqrt{-1}}{2\pi^2}\sum_{j,k}g^{\mathrm{WP}}_{j\bar{k}}ds^j\wedge ds^{\bar{k}}$$

und folglich haben wir das Zwischenergebnis:

$$\begin{aligned}
\frac{(n-1)!}{2\pi^2}\omega_{\mathrm{WP}}=&-\int_{X\times S/S}\big(c_1(F,h)^2-2c_2(F,h)\big)\wedge\phi^{n-1}\\
&+\frac{(n-1)!\sqrt{-1}}{2\pi^2}\sum_{j,k}\left(\int_X\kappa\sum_{\rho}R^{\rho}_{l\,\rho j\bar{k}}\frac{\omega^n}{n!}\right)ds^j\wedge ds^{\bar{k}}.
\end{aligned}$$

Wir zeigen, dass sich der letzte Summand ebenfalls als Faserintegral schreiben lässt. Es ist

$$(c_1(F,h))_l=\frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}}\sum_{j,k}\sum_{\rho}R^{\rho}_{l\,\rho j\bar{k}}ds^j\wedge ds^{\bar{k}}+\text{Summanden mit } dz\text{- oder } d\bar{z}\text{-Faktoren}$$

und da außerdem $(\phi^n)_l=\big(\sqrt{-1}\big)^n n!|g_l|dz_l^1\wedge dz_l^{\bar{1}}\wedge\ldots\wedge dz_l^n\wedge dz_l^{\bar{n}}$ gilt, erhalten wir

$$(c_1(F,h)\wedge\phi^n)_l=\frac{-n!}{2\pi\sqrt{-1}}\sum_{j,k}\sum_{\rho}R^{\rho}_{l\,\rho j\bar{k}}\big(\sqrt{-1}\big)^n|g_l|ds^j\wedge ds^{\bar{k}}\wedge dz_l^1\wedge dz_l^{\bar{1}}\wedge\ldots\wedge dz_l^n\wedge dz_l^{\bar{n}},$$

wobei alle übrigen Summanden aus Dimensionsgründen verschwinden. Damit berechnen wir

$$\int_{X\times S/S}c_1(F,h)\wedge\phi^n=\frac{-n!}{2\pi\sqrt{-1}}\sum_{j,k}\left(\int_X\sum_{\rho}R^{\rho}_{l\,\rho j\bar{k}}\frac{\omega^n}{n!}\right)ds^j\wedge ds^{\bar{k}}$$

und erhalten für den zweiten Summanden aus obigem Zwischenergebnis:

$$\frac{(n-1)!\sqrt{-1}}{2\pi^2}\sum_{j,k}\int_X \kappa \sum_\rho R^\rho_{l\,\rho j\bar{k}}\frac{\omega^n}{n!}ds^j\wedge ds^{\bar{k}} = \frac{\kappa}{n\pi}\frac{-n!}{2\pi\sqrt{-1}}\sum_{j,k}\left(\int_X\sum_\rho R^\rho_{l\,\rho j\bar{k}}\frac{\omega^n}{n!}\right)ds^j\wedge ds^{\bar{k}}$$
$$= \frac{\kappa}{n\pi}\int_{X\times S/S} c_1(F,h)\wedge\phi^n.$$

Insgesamt folgt damit:

$$\omega_{\mathrm{WP}} = \frac{2\pi^2}{(n-1)!}\left(-\int_{X\times S/S}\big(c_1(F,h)^2-2c_2(F,h)\big)\wedge\phi^{n-1}+\frac{\kappa}{n\pi}\int_{X\times S/S}c_1(F,h)\wedge\phi^n\right)$$
$$= \frac{-2\pi^2}{(n-1)!}\int_{X\times S/S}\Big(\big(c_1(F,h)^2-2c_2(F,h)\big)\wedge\phi^{n-1}-\frac{\kappa}{n\pi}c_1(F,h)\wedge\phi^n\Big).$$

□

Als unmittelbare Konsequenz impliziert diese Faserintegralformel die Kählereigenschaft der Weil-Petersson-Metrik:

Theorem 3.24 ([Ov92])**.** *Es sei $(F,h)\to X\times S$ eine Familie von Hermite-Einstein-Vektorbündeln über der kompakten Kählermannigfaltigkeit (X,g) der Dimension n, parametrisiert durch die komplexe Mannigfaltigkeit S der Dimension m. Dann ist $d\omega_{\mathrm{WP}}=0$, d.h. die Weil-Petersson-Metrik ist eine Kähler-Metrik auf S.*

Beweis. Die Faserintegralformel aus Satz 3.23 liefert zusammen mit Satz 3.4:

$$d\omega_{\mathrm{WP}} = \frac{-2\pi^2}{(n-1)!}\int_{X\times S/S} d\Big(\big(c_1(F,h)^2-2c_2(F,h)\big)\wedge\phi^{n-1}-\frac{\kappa}{n\pi}c_1(F,h)\wedge\phi^n\Big)$$
$$= \frac{-2\pi^2}{(n-1)!}\int_{X\times S/S}\Big(\big(dc_1(F,h)^2-2dc_2(F,h)\big)\wedge\phi^{n-1}+\big(c_1(F,h)^2-2c_2(F,h)\big)\wedge(d\phi)^{n-1}\Big)$$
$$- \frac{-2\pi^2}{(n-1)!}\int_{X\times S/S}\Big(\frac{\kappa}{n\pi}\left(dc_1(F,h)\right)\wedge\phi^n+\frac{\kappa}{n\pi}c_1(F,h)\wedge(d\phi^n)\Big).$$

Als Repräsentanten von Chern-Klassen sind $c_1(F,h)$ und $c_2(F,h)$ d-geschlossene Formen. Da weiterhin ω als Kählerform von (X,g) d-geschlossen ist und das äußere Differential d mit dem Pullback kommutiert, ist auch $d\phi=0$. Insgesamt verschwinden damit beide Integrale in obiger Formel, so dass tatsächlich $d\omega_{\mathrm{WP}}=0$ gezeigt ist. □

4. Die Krümmung der höheren direkten Bildgarben

Dieses Kapitel stellt den Hauptteil der vorliegenden Arbeit dar. Im ersten Abschnitt untersuchen wir die höheren direkten Bildgarben von Familien von Hermite-Einstein-Vektorbündeln auf einer kompakten Kählermannigfaltigkeit. Wir leiten zunächst ein Kriterium her, welches die lokale Freiheit dieser Garben charakterisiert, und nutzen dieses, um die Menge zu untersuchen über der die höheren direkten Bildgarben zu einem Vektorbündel Anlass geben. Ferner berechnen wir die Fasern dieser Vektorbündel sowie ihre Schnitte über steinschen Teilmengen des Parameterraums. Nach dieser Vorbereitung weisen wir nach, dass die höheren direkten Bildgarben eine natürliche L_2-Metrik tragen, welche die Weil-Petersson-Metrik aus Abschnitt 3.5 verallgemeinert. Der zweite Abschnitt widmet sich der Berechnung der Krümmung dieser Metrik in geeigneten Koordinaten, wozu im Wesentlichen nur Methoden der komplexen Differentialgeometrie sowie die harmonische Theorie in holomorphen Vektorbündeln benötigt werden. Im dritten und vierten Abschnitt werden schließlich spezielle Familien untersucht, für welche die gewonnene Krümmungsformel eine Gestalt annimmt, die besonders gut handhabbar ist. Dabei handelt es sich im dritten Abschnitt um Familien mit fester Determinante, d.h. Familien deren Fasern über jedem Punkt des Parameterraums ein zu einem festen Geradenbündel isomorphes Determinantenbündel besitzen. Für solche Familien zeigen wir, dass die berechnete Krümmung nach einer eventuellen Umskalierung der Ausgangsmetrik sowie einer Verkleinerung des Parameterraums um einen festen Punkt herum eine einfache Form annimmt. Im vierten Abschnitt untersuchen wir dagegen Familien von Endomorphismenbündeln, welche auch im folgenden Kapitel 5 eine wichtige Rolle spielen und bei denen die Krümmungsformel der Bildgarben ohne zusätzliche Voraussetzungen eine einfachere Gestalt besitzt.

4.1. Die natürliche L_2-Metrik auf den höheren direkten Bildgarben

Im ganzen Abschnitt sei (X, g) eine kompakte Kählermannigfaltigkeit der Dimension n, S eine komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension m sowie $(F, h) \to X \times S$ eine Familie von Hermite-Einstein-Vektorbündeln. Um die Notation zu vereinfachen, bezeichnen wir von nun an die Projektion auf den zweiten Faktor mit $p : X \times S \to S$ anstatt wie bislang mit π_2.

In dieser Situation betrachten wir für $q \geqslant 0$ die höhere direkte Bildgarbe $R^q p_* \mathcal{O}(F)$ auf S, welche nach Konstruktion ein $\mathcal{O}_S$-Modul ist. Genauer werden die höheren direkten Bildgarben bekanntlich durch die rechtsabgeleiteten Funktoren zum linksexakten direkten Bildfunktor definiert und stimmen dann mit der Vergarbung der Prägarbe der Kohomologie, welche durch

$$V \longmapsto H^q(p^{-1}(V), \mathcal{O}(F)) \tag{4.1}$$

mit den natürlich induzierten Restriktionen gegeben ist, überein (vergleiche [Te75]).

Um die lokale Freiheit der höheren direkten Bildgarben charakterisieren zu können und für die Berechnung der Fasern der induzierten Vektorbündel sowie deren Schnitte sind folgende Funktionen von großer Bedeutung, welche wir im Folgenden genauer untersuchen wollen:

$$h^q(F) : S \longrightarrow \mathbb{N}, \qquad t \longmapsto h^q(F,t) := \dim_{\mathbb{C}} H^q(X, \mathcal{O}(F_t)). \tag{4.2}$$

Die Funktionen sind dabei wohldefiniert, da die auftretenden komplexen Vektorräume nach dem Endlichkeitssatz von Cartan und Serre stets endlichdimensional sind. Ferner halten wir fest, dass die holomorphe Abbildung $p : X \times S \to S$ wegen der Kompaktheit von X offenbar eigentlich ist. Da es sich um eine Projektion handelt, ist p außerdem flach (vergleiche beispielsweise [BS76]). Dies bedeutet, dass die Strukturgarbe $\mathcal{O}_{X\times S}$ als $\mathcal{O}_{X\times S}$-Modul p-flach ist. Dabei heißt ein $\mathcal{O}_{X\times S}$-Modul $\mathcal{F}$ bekanntlich p-flach, falls für alle $z \in X \times S$ der vermöge der kanonischen Abbildung

$$\tilde{p}_z : \mathcal{O}_{S,p(z)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X\times S,z}$$

als $\mathcal{O}_{S,p(z)}$-Modul aufgefasste Halm $\mathcal{F}_z$ flach ist. Wir zeigen der Vollständigkeit halber zunächst die für uns wichtige Eigenschaft, dass damit bereits jeder lokal freie $\mathcal{O}_{X\times S}$-Modul p-flach ist. Dazu benötigen wir lediglich die folgende algebraische Feststellung.

Lemma 4.1. *Es sei $f : R \to S$ ein Homomorphismus zwischen den kommutativen Ringen R und S mit Eins, so dass S ein flacher R-Modul ist. Sei ferner M ein freier S-Modul von endlichem Rang. Dann ist M vermöge f aufgefasst als R-Modul flach.*

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es für eine natürliche Zahl $r \in \mathbb{N}$ einen Isomorphismus $\gamma : M \to S^r$ von S-Moduln, welcher vermöge f auch ein Isomorphismus von R-Moduln ist. Sei nun irgendeine exakte Sequenz von R-Moduln

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$$

gegeben. Dann erhalten wir folgendes kommutative Diagramm in der Kategorie der R-Moduln:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \otimes_R M \arrow[r, "\alpha\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\gamma"'] & B \otimes_R M \arrow[r, "\beta\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\gamma"'] & C \otimes_R M \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\gamma"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \otimes_R S^r \arrow[r, "\alpha\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "f_A"'] & B \otimes_R S^r \arrow[r, "\beta\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "f_B"'] & C \otimes_R S^r \arrow[r] \arrow[d, "f_C"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & (A \otimes_R S)^r \arrow[r, "(\alpha\otimes\mathrm{id})^r"] & (B \otimes_R S)^r \arrow[r, "(\beta\otimes\mathrm{id})^r"] & (C \otimes_R S)^r \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Die Morphismen zwischen den letzten beiden Zeilen entstehen dabei aus der universellen Eigenschaft des Tensorproduktes und sind Isomorphismen von R-Moduln. Konkret betrachtet man beispielsweise die Abbildung

$$A \times S^r \longrightarrow (A \otimes_R S)^r, \qquad (x, (y_1, \ldots, y_r)) \longmapsto (x \otimes y_1, \ldots, x \otimes y_r),$$

welche wohldefiniert und R-bilinear ist und folglich Anlass zu einer R-linearen Abbildung

$$f_A : A \otimes_R S^r \longrightarrow (A \otimes_R S)^r$$

gibt. Die dazu inverse Abbildung erhält man, indem man zunächst für $1 \leqslant k \leqslant r$ die von der R-bilinearen Abbildung

$$A \times S \longrightarrow A \otimes_R S^r, \qquad (x, y) \longmapsto x \otimes (0, \ldots, 0, y, 0, \ldots, 0)$$

induzierte R-lineare Abbildung $g_k : A \otimes_R S \to A \otimes_R S^r$ konstruiert und anschließend

$$g_A : (A \otimes_R S)^r \longrightarrow A \otimes_R S^r, \qquad (v_1, \ldots, v_r) \longmapsto \sum_{j=1}^{r} g_j(v_j)$$

erklärt. Man sieht dann direkt, dass g_A zu f_A invers ist. Da offenbar auch die Abbildungen zwischen den ersten beiden Zeilen Isomorphismen sind, haben wir drei isomorphe kurze Sequenzen in der Kategorie der R-Moduln. Eine Diagrammjagd zeigt, dass die Exaktheit einer Sequenz von solchen Isomorphismen respektiert wird. Um zu zeigen, dass die erste Zeile exakt ist, genügt es also zu zeigen, dass die letzte Zeile exakt ist. Dies folgt aber unmittelbar, da nach Voraussetzung S ein flacher R-Modul ist und wir folglich aus der zu Beginn fixierten exakten Sequenz folgende exakte Sequenz erhalten:

$$0 \longrightarrow A \otimes_R S \xrightarrow{\alpha \otimes \mathrm{id}} B \otimes_R S \xrightarrow{\beta \otimes \mathrm{id}} C \otimes_R S \longrightarrow 0 .$$

□

Als unmittelbare Konsequenz ergibt sich hieraus die folgende Aussage über flache Morphismen komplexer Räume:

Korollar 4.2. *Sei $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ ein flacher Morphismus komplexer Räume und $\mathcal{F}$ ein lokal freier $\mathcal{O}_X$-Modul. Dann ist $\mathcal{F}$ f-flach.*

Beweis. Sei $x \in X$ beliebig. Mit f haben wir insbesondere den Ringhomomorphismus

$$\tilde{f}_x : \mathcal{O}_{Y,f(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}.$$

Da f als flacher Morphismus vorausgesetzt wurde, ist $\mathcal{O}_{X,x}$ vermöge dieses Homomorphismus ein flacher $\mathcal{O}_{Y,f(x)}$-Modul. Wir müssen zeigen, dass der $\mathcal{O}_{X,x}$-Modul $\mathcal{F}_x$ ein flacher $\mathcal{O}_{Y,f(x)}$-Modul ist. Da $\mathcal{F}$ als lokal freier $\mathcal{O}_X$-Modul vorausgesetzt wurde, gibt es eine offene Umgebung U um x und eine exakte Sequenz von Garbenmorphismen:

$$0 \longrightarrow (\mathcal{O}_X|_U)^r \longrightarrow \mathcal{F}|_U \longrightarrow 0 .$$

Wir erhalten also $\mathcal{F}_x \simeq (\mathcal{O}_{X,x})^r$ und damit ist $\mathcal{F}_x$ ein freier $\mathcal{O}_{X,x}$-Modul von endlichem Rang. Folglich befinden wir uns in der Situation des vorherigen Lemmas und erhalten, dass $\mathcal{F}_x$ ein flacher $\mathcal{O}_{Y,f(x)}$-Modul ist. □

Dieses Korollar enthält offenbar die gewünschte Aussage, dass in unserer Situation jeder lokal freie $\mathcal{O}_{X\times S}$-Modul p-flach ist. Nachdem wir einige Eigenschaften der Projektion p gewonnen haben, beginnen wir mit der Untersuchung der Funktionen $h^q(F)$. Wesentliches Hilfsmittel hierfür ist Grauerts Halbstetigkeitssatz:

Theorem 4.3 ([Gr60]). *Sei $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ ein eigentlicher Morphismus komplexer Räume und $\mathcal{F}$ eine f-flache, kohärente Garbe auf X. Für $q \geqslant 0$ sei*

$$d_q : Y \longrightarrow \mathbb{N}, \qquad y \longmapsto \dim_{\mathbb{C}} H^q(X_y, \mathcal{F}(y)),$$

wobei X_y die analytische Faser über y und $\mathcal{F}(y)$ die analytische Restriktion von $\mathcal{F}$ auf die analytische Faser X_y bezeichne. Dann gilt:

(i) Die Funktionen d_q sind von oben halbstetig.

(ii) Für jede natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$ ist $\{y \in Y \mid d_q(y) \geqslant k\} \subset Y$ eine analytische Menge.

Wir leiten aus diesem Resultat folgende wichtige Eigenschaft der Funktionen $h^q(F)$ ab:

Satz 4.4. *Sei $(F, h) \to X \times S$ eine Familie hermitescher, holomorpher Vektorbündel auf der kompakten Kählermannigfaltigkeit (X, g), parametrisiert durch die komplexe Mannigfaltigkeit S. Dann gilt: Für jede natürliche Zahl $q \geqslant 0$ gibt es eine analytische Teilmenge $A_q(F) \subsetneq S$, so dass $h^q(F)|_{S\setminus A_q(F)}$ konstant ist. Für die Punkte $t \in A_q(F)$ gilt außerdem:*

$$h^q(F)|_{S\setminus A_q(F)} < h^q(F,t) < \infty.$$

Beweis. Da $F \to X \times S$ als holomorphes Vektorbündel vorausgesetzt wurde, ist $\mathcal{O}(F)$ als lokal freier $\mathcal{O}_{X\times S}$-Modul kohärent sowie nach unseren Überlegungen p-flach. Die Voraussetzungen von Grauerts Halbstetigkeitssatz sind also erfüllt. Ferner bemerken wir, dass die analytische Restriktion zu $t \in S$ in dieser Situation einfach durch die Garbe $\mathcal{O}(F_t)$ auf X gegeben wird, so dass die Funktion d_q mit der von uns betrachteten Funktion $h^q(F)$ übereinstimmt. Wir erhalten also insbesondere, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ die Menge

$$M_k := \{t \in S \mid h^q(F,t) \geqslant k\} \subset S$$

eine analytische Teilmenge ist und zeigen nun induktiv folgende Aussage für $k \in \mathbb{N}$:

(B_k) Entweder ist $h^q(F,t) \geqslant k$ für alle $t \in S$ oder es gibt eine analytische Teilmenge $A \subsetneq S$ so dass $h^q(F)|_{S\setminus A}$ konstant ist und $h^q(F,t) > h^q(F)|_{S\setminus A}$ für alle $t \in A$ gilt.

Da (B_0) keine Aussage enthält, zeigen wir direkt (B_1). Zunächst ist $M_1 \subset S$ eine analytische Menge. Falls $M_1 = S$ gilt, ist $h^q(F,t) \geqslant 1$ für alle $t \in S$ und (B_1) folglich richtig. Falls $M_1 \subsetneq S$ ist, haben wir auf $S \setminus M_1$ nach Definition $h^q(F)|_{S\setminus M_1} < 1$. Da ferner stets $h^q(F) \geqslant 0$ gilt, folgt $h^q(F)|_{S\setminus M_1} = 0$, so dass (B_1) in diesem Fall mit $A := M_1$ erfüllt ist.

Gelte nun (B_k). Es ist $M_{k+1} \subset S$ eine analytische Menge. Falls $M_{k+1} = S$ gilt, ist $h^q(F,t) \geqslant k+1$ für alle $t \in S$ und (B_{k+1}) folglich erfüllt. Gelte also $M_{k+1} \subsetneq S$. Dann unterscheiden wir zwei Fälle: Haben wir mit (B_k) gegeben, dass $h^q(F,t) \geqslant k$ für alle $t \in S$ gilt, dann können wir

$A := M_{k+1}$ wählen, denn dann haben wir sowohl $h^q(F) \geqslant k$ als auch $h^q(F)|_{S \setminus M_{k+1}} < k+1$, so dass insgesamt $h^q(F)|_{S \setminus M_{k+1}} = k$ gilt. In diesem Fall ist (B_{k+1}) also richtig. Im verbleibenden Fall erfüllt aber die Menge $A \subsetneq S$ aus (B_k), deren Existenz (B_k) in dieser Situation sichert, die Behauptungen aus (B_{k+1}). Damit ist die Gültigkeit von (B_{k+1}) in jedem Fall gezeigt.

Sei nun $t_0 \in S$ irgendein Punkt. Dann kann in der Aussage $(B_{h^q(F,t_0)+1})$ die erste der beiden Alternativen nicht gelten, da wir nach Konstruktion natürlich $h^q(F,t_0) < h^q(F,t_0)+1$ haben. Folglich gibt es eine analytische Menge $A \subsetneq S$, so dass $h^q(F)|_{S \setminus A}$ konstant ist und für alle $t \in A$ gilt: $h^q(F,t) > h^q(F)|_{S \setminus A}$. Mit $A_q(F) := A$ folgt dann aber die Behauptung. □

Wir wir später zeigen werden ist im Hinblick auf die Eigenschaften der höheren direkten Bildgarbe $R^q p_* \mathcal{O}(F)$ gerade die Menge interessant, auf der die Funktion $h^q(F)$ konstant ist, d.h. die Menge $S \setminus A_q(F)$. Da S eine komplexe Mannigfaltigkeit ist, folgt aus dem eben gezeigten Satz insbesondere, dass die Ausnahmemengen $A_q(F)$ als echte analytische Teilmengen von S nirgends dicht sind. Wir erhalten also die quantitative Aussage, dass die Funktionen $h^q(F)$ stets auf einer dichten Teilmenge und damit fast auf ganz S konstant sind.

Die Ausnahmemengen $A_q(F)$ sind in unseren späteren Anwendungen unerwünscht. Wir untersuchen daher im Folgenden einige Spezialfälle, in denen wir mehr über die Funktionen $h^q(F)$ aussagen können. Da für unsere Anwendung Familien von Endomorphismenbündeln besonders wichtig sind, konzentrieren wir uns auf diese. Zunächst haben wir folgendes Resultat:

Satz 4.5. *Sei $F \to X \times S$ eine Familie einfacher, holomorpher Vektorbündel über der kompakten Kählermannigfaltigkeit (X,g), parametrisiert durch die komplexe Mannigfaltigkeit S. Dann ist $A_0(\mathrm{End}(F)) = \emptyset$, genauer gilt*

$$h^0(\mathrm{End}(F)) = 1.$$

Beweis. Sei $t \in S$ fixiert. Da $F_t \to X$ nach Voraussetzung einfach ist, erhalten wir

$$\Gamma\left(X, \mathcal{O}\left(\mathrm{End}(F_t)\right)\right) = \mathbb{C} \cdot \mathrm{id}\,.$$

Damit berechnen wir aber die Funktion $h^0(\mathrm{End}(F))$ im Punkt t zu

$$h^0(\mathrm{End}(F),t) = \dim_{\mathbb{C}} H^0(X, \mathcal{O}\left(\mathrm{End}(F_t)\right)) = \dim_{\mathbb{C}} \Gamma\left(X, \mathcal{O}\left(\mathrm{End}(F_t)\right)\right) = 1,$$

so dass $h^0(\mathrm{End}(F))$ konstant auf ganz S ist. □

Nachdem wir mit diesem Satz für h^0 im Fall von Endomorphismenbündeln ein bestmögliches Ergebnis erhalten haben, wenden wir uns der Untersuchung von h^1 zu. Zumindest wenn mit X eine Riemannsche Fläche vorliegt, ist die Situation auch hier optimal:

Satz 4.6. *Sei $F \to X \times S$ eine Familie einfacher, holomorpher Vektorbündel auf der kompakten Riemannschen Fläche X, parametrisiert durch die komplexe Mannigfaltigkeit S. Dann ist $A_1(\mathrm{End}(F)) = \emptyset$, genauer gilt*

$$h^1(\mathrm{End}(F)) = 1 + \mathrm{rk}(F)^2(g(X)-1).$$

Dabei bezeichnet $g(X)$ das Geschlecht von X.

Beweis. Nach Satz 4.5 haben wir zunächst die Gleichung $h^0(\mathrm{End}(F)) = 1$. Da ferner gemäß Satz 3.13 beziehungsweise Satz 3.15 die Euler-Poincaré-Charakteristik

$$\chi(X, \mathrm{End}(F_t)) = \dim_{\mathbb{C}} H^0(X, \mathcal{O}(\mathrm{End}(F_t))) - \dim_{\mathbb{C}} H^1(X, \mathcal{O}(\mathrm{End}(F_t)))$$

konstant als Funktion auf S ist, muss wegen der einfachen Umformung zu

$$h^1(\mathrm{End}(F), t) = h^0(\mathrm{End}(F), t) - \chi(X, \mathrm{End}(F_t)) = 1 - \chi(X, \mathrm{End}(F_t))$$

auch die Funktion $h^1(\mathrm{End}(F))$ konstant auf ganz S sein. Damit ist $A_1(\mathrm{End}(F)) = \emptyset$ gezeigt. Sei nun ein Punkt $s_0 \in S$ fixiert. Da das holomorphe Vektorbündel $\det(\mathrm{End}(F_{s_0})) \to X$ sowie die induzierte Metrik $\det(H_{s_0})$ auf diesem Bündel trivial sind, ist $\Omega_{\det(\mathrm{End}(F_{s_0}))} = 0$, so dass aus Satz 2.11 folgt:

$$\mathrm{tr}\left(\Omega_{\mathrm{End}(F_{s_0})}\right) = \Omega_{\det(\mathrm{End}(F_{s_0}))} = 0.$$

Damit erhalten wir aber für die erste Chern-Klasse von $\mathrm{End}(F_{s_0})$ die Gleichung

$$c_1(\mathrm{End}(F_{s_0}), H_{s_0}) = -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\mathrm{tr}\left(\Omega_{\mathrm{End}(F_{s_0})}\right) = 0$$

und folglich direkt mit der Definition des Grades eines Vektorbündels:

$$\deg(\mathrm{End}(F_{s_0})) = \int_X c_1(\mathrm{End}(F_{s_0}), H_{s_0}) \wedge \omega^{n-1} = 0.$$

Da die Funktion $h^1(\mathrm{End}(F))$ konstant ist, erhalten wir durch Auswerten im Punkt s_0:

$$h^1(\mathrm{End}(F)) = h^1(\mathrm{End}(F), s_0) = 1 - \chi(X, \mathrm{End}(F_{s_0})).$$

Wenden wir den Satz von Riemann-Roch auf die Faser im Punkt s_0 an, dann finden wir

$$\chi(X, \mathrm{End}(F_{s_0})) = \deg(\mathrm{End}(F_{s_0})) + \mathrm{rk}(\mathrm{End}(F_{s_0}))(1 - g(X)),$$

so dass wir weiter berechnen können:

$$h^1(\mathrm{End}(F)) = 1 + \mathrm{rk}(\mathrm{End}(F_{s_0}))(g(X) - 1).$$

Beachten wir noch, dass $\mathrm{rk}(\mathrm{End}(F_{s_0})) = \mathrm{rk}(F_{s_0})^2 = \mathrm{rk}(F)^2$ gilt, so folgt die Behauptung. $\square$

Wir weisen am Rande darauf hin, dass die Formel aus obigem Satz insbesondere die bekannte Aussage enthält, dass es auf der Riemannschen Zahlenkugel $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ keine einfachen, holomorphen Vektorbündel vom Rang > 1 und damit insbesondere auch keine stabilen Vektorbündel vom Rang > 1 gibt, was man üblicherweise mit dem Spaltungssatz von Grothendieck zeigt.

Gilt hingegen $\dim_{\mathbb{C}} X > 1$, so ist die Situation nicht mehr so einfach. Wir können jedoch stets Informationen über die Funktion $h^1(\mathrm{End}(F))$ aus der Existenz eines Modulraums erhalten. In [Ki87] wird für die Situation ohne Obstruktionen gezeigt (vergleiche auch [FS87, Mi89] wegen der Situation mit Obstruktionen):

Theorem 4.7. *Sei (X, g) eine kompakte Kählermannigfaltigkeit und $E \to X$ ein differenzierbares, komplexes Vektorbündel. Dann ist der Modulraum der einfachen Hermite-Einstein-Vektorbündel $F \to X$ vom topologischen Typ E mit $H^2\left(X, \mathcal{O}\left(\mathrm{End}^0(F)\right)\right) = 0$ eine Kählermannigfaltigkeit, deren Tangentialraum im Punkt $[F]$ zu $H^1(X, \mathcal{O}(\mathrm{End(F)}))$ isomorph ist.*

Hieraus erhalten wir unmittelbar folgende Aussage über die Funktion $h^1(\mathrm{End}(F))$:

Korollar 4.8. *Sei $(F, h) \to X \times S$ eine Familie von einfachen Hermite-Einstein-Vektorbündeln von festem topologischen Typ auf der kompakten Kählermannigfaltigkeit (X, g), parametrisiert durch die komplexe Mannigfaltigkeit S. Gilt dann $H^2\left(X, \mathcal{O}\left(\mathrm{End}^0(F_t)\right)\right) = 0$ für alle $t \in S$, dann ist $A_1(\mathrm{End}(F)) = \emptyset$, d.h. es ist $h^1(\mathrm{End}(F))$ konstant auf ganz S.*

Beweis. Wir bezeichnen den Modulraum aus obigem Theorem mit $\mathcal{M}$ und setzen $m = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M}$. Dann gilt $[F_t] \in \mathcal{M}$ für alle $t \in S$. Folglich ist für ein beliebiges $t \in S$ der Vektorraum $H^1(X, \mathcal{O}(\mathrm{End}(F_t)))$ isomorph zu dem Tangentialraum an $\mathcal{M}$ im Punkt $[F_t]$, so dass folgt:

$$h^1(\mathrm{End}(F), t) = \dim_{\mathbb{C}} H^1(X, \mathcal{O}(\mathrm{End}(F_t))) = \dim_{\mathbb{C}} T_{[F_t]}\mathcal{M} = m.$$

□

Dass die Funktion $h^1(\mathrm{End}(F))$ in dieser Situation konstant auf ganz S ist, liegt also daran, dass die Kohomologiegruppen als Tangentialräume eines Modulraums ohne Singularitäten auftreten. Liegen Obstruktionen vor, dann finden wir die Vektorräume $H^1(X, \mathcal{O}(\mathrm{End}(F_t)))$ auch noch als Tangentialräume des entsprechenden Modulraums wieder. Da der Modulraum in diesem Fall aber nur noch ein komplexer Raum ist, kann die Dimension der Tangentialräume Sprünge aufweisen, welche zu Sprüngen in der Funktion $h^1(\mathrm{End}(F))$ führen. In diesem Fall finden wir also die obstruierten Stellen auch in dieser Funktion wieder, genauer sind in geeigneten Familien die Obstruktionen das einzige Hindernis dagegen, dass $h^1(\mathrm{End}(F))$ auf ganz S konstant ist.

Im Fall $q \geqslant 2$ wird es zunehmend schwieriger, genaue Informationen über die Funktionen $h^q(\mathrm{End}(F))$ zu erhalten. Hier können Sprünge der Funktionen neben Obstruktionen auch andere Gründe haben. Wir notieren zwei Resultate in der obstruktionsfreien Situation.

Satz 4.9. *Sei $(F, h) \to X \times S$ eine Familie von einfachen Hermite-Einstein-Vektorbündeln von festem topologischen Typ auf der kompakten Kählermannigfaltigkeit (X, g) mit $\dim_{\mathbb{C}} X = 2$, parametrisiert durch die komplexe Mannigfaltigkeit S. Gilt dann $H^2\left(X, \mathcal{O}\left(\mathrm{End}^0(F_t)\right)\right) = 0$ für alle $t \in S$, dann ist $A_2(\mathrm{End}(F)) = \emptyset$, d.h. es ist $h^2(\mathrm{End}(F))$ konstant auf ganz S.*

Beweis. Aus Satz 4.5 sowie Korollar 4.8 erhalten wir zunächst die Aussagen, dass $h^0(\mathrm{End}(F))$ sowie $h^1(\mathrm{End}(F))$ konstant auf ganz S sind. Nach Satz 3.15 ist aber auch die Euler-Poincaré-Charakteristik

$$\chi(X, \mathrm{End}(F_t)) = \dim H^0(X, \mathcal{O}(\mathrm{End}(F_t))) - \dim H^1(X, \mathcal{O}(\mathrm{End}(F_t))) + \dim H^2(X, \mathcal{O}(\mathrm{End}(F_t)))$$

konstant als Funktion auf S. Also ist wegen der Umformung

$$h^2(\mathrm{End}(F), t) = \chi(X, \mathrm{End}(F_t)) - h^0(\mathrm{End}(F), t) + h^1(\mathrm{End}(F), t)$$

die Funktion $h^2(\mathrm{End}(F))$ konstant auf ganz S. □

Satz 4.10. *Sei $(F,h) \to X \times S$ eine Familie von einfachen Hermite-Einstein-Vektorbündeln von festem topologischen Typ auf der kompakten Kählermannigfaltigkeit (X,g) mit $\dim_{\mathbb{C}} X = 3$, parametrisiert durch die komplexe Mannigfaltigkeit S. Gilt dann $H^2\left(X, \mathcal{O}\left(\mathrm{End}^0(F_t)\right)\right) = 0$ für alle $t \in S$, dann gibt es eine ganze Zahl $k \in \mathbb{Z}$, so dass auf ganz S gilt:*

$$h^2(\mathrm{End}(F)) = h^3(\mathrm{End}(F)) + k.$$

Insbesondere gilt für die Ausnahmemengen die Gleichung

$$A_2(\mathrm{End}(F)) = A_3(\mathrm{End}(F)).$$

Beweis. Aus Satz 4.5 sowie Korollar 4.8 erhalten wir wieder die Aussage, dass die Funktionen $h^0(\mathrm{End}(F))$ sowie $h^1(\mathrm{End}(F))$ konstant auf ganz S sind und nach Satz 3.15 ist auch die Euler-Poincaré-Charakteristik, welche nun die Gestalt

$$\chi(X, \mathrm{End}(F_t)) = \sum_{j=0}^{3} (-1)^j \dim_{\mathbb{C}} H^j(X, \mathcal{O}\left(\mathrm{End}(F_t)\right))$$

annimmt, konstant als Funktion auf S. Definieren wir also

$$k := \chi(X, \mathrm{End}(F_t)) - h^0(\mathrm{End}(F), t) + h^1(\mathrm{End}(F), t),$$

dann ist k eine Konstante und für jedes $t \in S$ gilt

$$h^2(\mathrm{End}(F), t) = h^3(\mathrm{End}(F), t) + k.$$

Diese Gleichung zeigt ferner, dass sogar $k \in \mathbb{Z}$ ist. Damit ist aber alles gezeigt. $\square$

Beide Aussagen haben wir alleine aus unserem Wissen über h^0 und h^1 unter Einsatz der Euler-Poincaré-Charakteristik gewonnen und die Beweise verdeutlichen, dass wir mit dieser Methode in höheren Dimensionen zunehmend weniger Informationen erhalten. Abschließend zeigen wir noch anhand eines Beispiels, wie wir auch für die allgemeine Situation einer beliebigen Familie unter geeigneten zusätzlichen Bedingungen Informationen über die Funktionen h^q gewinnen können. Wir zitieren hierfür den folgenden Verschwindungssatz, welcher ursprünglich von Kodaira gezeigt wurde, in einer vereinfachten Form:

Theorem 4.11 ([Kb87]). *Es sei $(E,h) \to M$ ein hermitesches, holomorphes Vektorbündel auf der kompakten, komplexen Mannigfaltigkeit M mit hermitescher Metrik g. Dann gilt: Ist die mittlere Krümmung $R = \sqrt{-1}\Lambda_g \Omega$ von (E,h) auf ganz M negativ semidefinit und in einem Punkt von M negativ definit, dann ist jeder globale, holomorphe Schnitt von E identisch Null.*

Aus diesem Verschwindungssatz erhalten wir unmittelbar:

Satz 4.12. *Sei $(F,h) \to X \times S$ eine Familie von Hermite-Einstein-Vektorbündeln mit den Hermite-Einstein-Konstanten $\kappa(t)$. Gilt $\kappa(s_0) < 0$ für wenigstens einen Punkt $s_0 \in S$, dann ist $A_0(F) = \emptyset$, genauer gilt $h^0(F) = 0$.*

Beweis. Nach Satz 3.12 ist κ als Funktion auf S konstant. Aus der Voraussetzung erhalten wir also, dass $\kappa(t) < 0$ für alle $t \in S$ gilt. Da jede Faser $F_t \to X$ ein Hermite-Einstein-Vektorbündel ist, folgt für die mittlere Krümmung R_t jeweils $R_t = \kappa(t) \cdot \mathrm{id}$ und folglich ist die mittlere Krümmung jeder Faser negativ definit. Wir können obigen Verschwindungssatz also faserweise anwenden und erhalten:

$$h^0(F,t) = \dim_{\mathbb{C}} H^0(X, \mathcal{O}(F_t)) = \dim_{\mathbb{C}} \Gamma(X, \mathcal{O}(F_t)) = \dim_{\mathbb{C}} 0 = 0.$$

□

Nachdem wir nun einige Resultate über die Funktionen h^q zusammengestellt haben, kommen wir zur Untersuchung der Bedeutung dieser Funktionen im Hinblick auf die höheren direkten Bildgarben zurück. Ausgangspunkt hierfür ist folgendes Resultat:

Satz 4.13. *Sei $F \to X \times S$ eine Familie holomorpher Vektorbündel auf der kompakten Kählermannigfaltigkeit (X,g), parametrisiert durch die komplexe Mannigfaltigkeit S, und sei $q \geqslant 0$. Dann ist die kanonische Abbildung*

$$(R^q p_* \mathcal{O}(F))_t \otimes_{\mathcal{O}_{S,t}} \mathbb{C}(t) \longrightarrow H^q(X, \mathcal{O}(F_t))$$

für alle $t \in S \setminus A_q(F)$ ein Isomorphismus komplexer Vektorräume. Dabei ist wie üblich bei $\mathbb{C}$-geringten Räumen

$$\mathbb{C}(t) = {}^{\mathcal{O}_{S,t}}\!/_{\mathfrak{m}_t} \simeq \mathbb{C},$$

wobei $\mathfrak{m}_t \subset \mathcal{O}_{S,t}$ das eindeutig bestimmte maximale Ideal des lokalen Rings $\mathcal{O}_{S,t}$ bezeichnet.

Beweis. Da p ein eigentlicher und flacher Morphismus und $\mathcal{O}(F)$ als lokal freier $\mathcal{O}_{X\times S}$-Modul p-flach ist, ist Grauerts Stetigkeitssatz anwendbar. Folglich ist die Funktion $h^q(F)$ genau dann konstant auf einer offenen Menge $U \subset S$, wenn $\mathcal{O}(F)$ in Dimension q kohomologisch flach über U ist. Über der Menge $S \setminus A_q(F)$ erhalten wir also die kohomologische Flachheit von $\mathcal{O}(F)$ in Dimension q, so dass mit dem Base-Change-Theorem die Behauptung folgt. Beweise der zitierten Sätze finden sich beispielsweise in [BS76]. □

Als eine erste Anwendung gewinnen wir aus diesem Satz unter Verwendung bekannter algebraischer Argumente die lokale Freiheit der höheren direkten Bildgarben außerhalb der Ausnahmemengen. Dazu zitieren wir zunächst:

Satz 4.14 (Nakayama Lemma)**.** *Sei R ein kommutativer Ring mit Eins und $\mathfrak{m} \subset R$ ein Ideal, welches im Jacobson-Ideal von R*

$$\mathfrak{J}(R) = \bigcap \{\mathfrak{a} \mid \mathfrak{a} \subset R \text{ maximales Ideal}\}$$

enthalten ist. Ist ferner M ein endlich erzeugter R-Modul, dann gilt:

(i) Aus $\mathfrak{m}M = M$ folgt bereits $M = 0$.

(ii) Wird der R-Modul ${}^{M}\!/_{\mathfrak{m}M}$ von den Restklassen der Elemente $m_1, \ldots, m_n \in M$ erzeugt, dann erzeugen diese Elemente bereits den R-Modul M.

Einen Beweis findet man beispielsweise in [Ei95]. Ferner benötigen wir folgendes Lemma:

Lemma 4.15 ([GR84]). *Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein komplexer Raum und $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul, welcher in einem Punkt $x \in X$ vom endlichen Typ ist. Seien $s_1, \ldots, s_k \in \Gamma(U, \mathcal{F})$ Schnitte auf einer offenen Umgebung $U \subset X$ von x, so dass die Keime $s_{1x}, \ldots, s_{kx} \in \mathcal{F}_x$ im Punkt $x \in X$ den $\mathcal{O}_{X,x}$-Modul $\mathcal{F}_x$ erzeugen. Dann gilt: Es gibt eine offene Umgebung $V \subset U$ um $x \in X$, so dass die Schnitte $s_1|_V, \ldots, s_k|_V \in \Gamma(V, \mathcal{F})$ die Garbe $\mathcal{F}|_V$ erzeugen. Insbesondere gibt es also eine exakte Sequenz*

$$\mathcal{O}_X^k|_V \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F}|_V \longrightarrow 0,$$

wobei der Garbenhomomorphismus φ halmweise durch

$$\varphi_y : \mathcal{O}_{X,x}^k \longrightarrow \mathcal{F}_y, \qquad (a_{1y}, \ldots, a_{ky}) \longmapsto \sum_{i=1}^k a_{iy} s_{iy}$$

mit $y \in V$ gegeben wird.

Beweis. Da $\mathcal{F}$ in $x \in X$ vom endlichen Typ ist, gibt es definitionsgemäß eine offene Umgebung $V \subset X$ um x, wobei wir $V \subset U$ annehmen dürfen, sowie Schnitte $t_1, \ldots, t_l \in \Gamma(V, \mathcal{F})$, welche $\mathcal{F}|_V$ erzeugen, d.h. der halmweise durch

$$\psi_y : \mathcal{O}_{X,y}^l \longrightarrow \mathcal{F}_y, \qquad (a_{1y}, \ldots, a_{ly}) \longmapsto \sum_{i=1}^l a_{iy} t_{iy}$$

für $y \in V$ erklärte Garbenhomomorphismus $\psi : \mathcal{O}_X^l|_V \to \mathcal{F}|_V$ ist ein Epimorphismus. Im Punkt x haben wir nun mit $\langle s_{1x}, \ldots, s_{kx} \rangle_{\mathcal{O}_{X,x}} = \mathcal{F}_x$ sowie $\langle t_{1x}, \ldots, t_{lx} \rangle_{\mathcal{O}_{X,x}} = \mathcal{F}_x$ zwei Erzeugendensysteme von $\mathcal{F}_x$. Insbesondere existieren Keime $f_{ijx} \in \mathcal{O}_{X,x}$ mit

$$t_{jx} = \sum_{i=1}^k f_{ijx} s_{ix} \qquad \text{für } 1 \leqslant j \leqslant l. \tag{4.3}$$

Auf Umgebungen um x können diese Keime f_{ijx} zu Schnitten f_{ij} von $\mathcal{O}_X$ fortgesetzt werden, d.h. indem wir V um x herum endlich oft verkleinern, dürfen wir annehmen, dass es Schnitte $f_{ij} \in \Gamma(V, \mathcal{O}_X)$ gibt, welche die Keime f_{ijx} im Punkt x induzieren. Wegen der Gleichung aus (4.3) stimmen für $1 \leqslant j \leqslant l$ die Schnitte t_j sowie $\sum_{i=1}^k f_{ij} s_i$ von $\mathcal{F}$ auf einer kleinen Umgebung um x überein. Indem wir also V um x herum erneut endlich oft verkleinern, erhalten wir die Gültigkeit der Gleichung

$$t_j = \sum_{i=1}^k f_{ij}\; s_i|_V \qquad \text{für } 1 \leqslant j \leqslant l.$$

Da aber die Schnitte t_j nach Konstruktion $\mathcal{F}|_V$ erzeugen, folgt aus dieser Gleichung, dass auch die Schnitte $s_i|_V$ die Garbe $\mathcal{F}|_V$ erzeugen. Damit ist bereits alles gezeigt. □

Als Folgerung aus diesen beiden algebraischen Resultaten erhalten wir die folgende Aussage zur lokalen Freiheit von analytischen Garben.

Satz 4.16 ([BS76]). *Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein reduzierter komplexer Raum und $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul vom endlichen Typ. Die Funktion*

$$X \longrightarrow \mathbb{N}, \qquad x \longmapsto \dim_{\mathbb{C}(x)} \mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathbb{C}(x)$$

sei als lokal konstant vorausgesetzt. Dann ist $\mathcal{F}$ lokal frei.

Beweis. Wir definieren eine Funktion

$$\zeta : X \longrightarrow \mathbb{N}, \qquad x \longmapsto \min \left\{ \#M \;\middle|\; M \subset \mathcal{F}_x \text{ mit } \langle M \rangle_{\mathcal{O}_{X,x}} = \mathcal{F}_x \right\},$$

welche für jeden Punkt $x \in X$ die minimale Anzahl an Elementen angibt, die ein Erzeugendensystem des Halms $\mathcal{F}_x$ enthält. Da $\mathcal{F}$ als vom endlichen Typ vorausgesetzt wurde, ist die Funktion ζ wohldefiniert. Ist nun $\langle s_{1x}, \ldots, s_{kx} \rangle_{\mathcal{O}_{X,x}} = \mathcal{F}_x$, dann folgt offenbar für die Restklassen:

$$\langle [s_{1x}], \ldots, [s_{kx}] \rangle_{\mathcal{O}_{X,x}} = \mathcal{F}_x / \mathfrak{m}_x \mathcal{F}_x \,.$$

Fassen wir den Quotienten vermöge

$$\mathcal{F}_x / \mathfrak{m}_x \mathcal{F}_x \simeq \mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathbb{C}(x)$$

als $\mathbb{C}(x)$-Vektorraum auf, dann bilden die Restklassen folglich ein Erzeugendensystem dieses Vektorraums, so dass wir die Ungleichung $k \geqslant \dim_{\mathbb{C}(x)} \mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathbb{C}(x)$ gezeigt haben. Da diese für jedes beliebige Erzeugendensystem von $\mathcal{F}_x$ gilt, folgt hieraus

$$\zeta(x) \geqslant \dim_{\mathbb{C}(x)} \mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathbb{C}(x).$$

Andererseits ist aber $\mathcal{O}_{X,x}$ ein lokaler Ring mit einem eindeutig bestimmten maximalen Ideal $\mathfrak{m}_x$. Insbesondere gilt für das Jacobson-Ideal $\mathfrak{J}(\mathcal{O}_{X,x}) = \mathfrak{m}_x$. Sei nun $[s_{1x}], \ldots, [s_{nx}] \in \mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathbb{C}(x)$ eine Basis dieses $\mathbb{C}(x)$-Vektorraums. Nach dem Nakayama Lemma bilden dann die $s_{1x}, \ldots, s_{nx}$ ein Erzeugendensystem von $\mathcal{F}_x$, so dass wir die Ungleichung

$$\zeta(x) \leqslant n = \dim_{\mathbb{C}(x)} \mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathbb{C}(x)$$

erhalten. Damit haben wir aber insgesamt gezeigt, dass für alle $x \in X$ die Gleichung

$$\zeta(x) = \dim_{\mathbb{C}(x)} \mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathbb{C}(x)$$

gilt, d.h. nach Voraussetzung ist ζ eine lokal konstante Funktion auf X.

Sei nun $x \in X$ fixiert und $n := \zeta(x)$. Dann ist n die minimale Anzahl von Elementen die in einem Erzeugendensystem von $\mathcal{F}_x$ auftritt. Insbesondere existieren $s_{1x}, \ldots, s_{nx} \in \mathcal{F}_x$ mit $\langle s_{1x}, \ldots, s_{nx} \rangle_{\mathcal{O}_{X,x}} = \mathcal{F}_x$. Wir können die Keime s_{ix} zu Schnitten auf einer offenen Umgebung um x fortsetzen, d.h. es gibt eine offene Umgebung $W \subset X$ von x und Schnitte $s_1, \ldots, s_n \in \Gamma(W, \mathcal{F})$, welche die Keime s_{ix} des Erzeugendensystems induzieren. Da wir ζ als lokal konstante Funktion erkannt haben, können wir nach einer eventuellen Verkleinerung von W um x herum davon ausgehen, dass $\zeta(y) = n$ für alle $y \in W$ gilt. Indem wir ferner Lemma 4.15 anwenden, dürfen wir nach einer weiteren Verkleinerung der offenen Umgebung W um x herum davon ausgehen, dass diese Schnitte die Garbe $\mathcal{F}|_W$ über $\mathcal{O}_X|_W$ erzeugen, d.h. es gibt eine von den Schnitten s_i induzierte exakte Sequenz von Garbenmorphismen:

$$\mathcal{O}_X^n|_W \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F}|_W \longrightarrow 0.$$

Es genügt nun zu zeigen, dass $\operatorname{kern}(\varphi) = 0$ gilt, d.h. dass φ auch ein Monomorphismus ist, denn in diesem Fall erhalten wir aus der exakten Sequenz

$$\operatorname{kern}(\varphi) \longrightarrow \mathcal{O}_X^n|_W \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F}|_W \longrightarrow 0$$

gerade, dass $\mathcal{F}$ auf der Umgebung W um den Punkt $x \in X$ frei ist.

Sei also ein beliebiger Schnitt $f \in \Gamma(V, \operatorname{kern}(\varphi))$ über einer offenen Menge $V \subset W$ gegeben. Wir müssen zeigen, dass $f = 0$ gilt. Da $\operatorname{kern}(\varphi) \subset \mathcal{O}_X^n|_W$ eine Untergarbe ist, können wir $f = (f_1, \ldots, f_n)$ für gewisse $f_j \in \Gamma(V, \mathcal{O}_X)$ schreiben. Ferner halten wir fest, dass der Garbenmorphismus φ auf dem Halm über $y \in W$ nach Konstruktion durch

$$\varphi_y : \mathcal{O}_{X,y}^n \longrightarrow \mathcal{F}_y, \qquad (a_{1y}, \ldots, a_{ny}) \longmapsto \sum_{i=1}^n a_{iy} s_{iy}$$

gegeben wird. Da f ein Schnitt des Kerns von φ ist, gilt also die Gleichung

$$\sum_{i=1}^n f_{iy} s_{iy} = 0 \qquad \text{für alle } y \in V. \tag{4.4}$$

Für das folgende Argument bemerken wir außerdem, dass die Schnitte $f_j \in \Gamma(V, \mathcal{O}_X)$ Anlass zu holomorphen Funktionen $[f_j] : V \to \mathbb{C}$ auf dem komplexen Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ geben. Sei nun $y \in V$ fest gewählt. Angenommen, es gibt ein k mit $1 \leqslant k \leqslant n$, so dass $[f_k](y) \neq 0$ gilt. Da $(X, \mathcal{O}_X)$ ein komplexer Raum ist, haben wir als $\mathbb{C}$-Vektorraum die direkte Summenzerlegung

$$\mathcal{O}_{X,y} = \mathbb{C}(y) \oplus \mathfrak{m}_y$$

und nach Definition gilt für den Bezug zwischen dem Schnitt f_k und der Funktion $[f_k]$ in y

$$f_{ky} = [f_k](y) + m_y$$

für ein eindeutig bestimmtes Element $m_y \in \mathfrak{m}_y$. Wegen $[f_k](y) \neq 0$ ist also $f_{ky} \notin \mathfrak{m}_y$. Da aber $\mathfrak{m}_y \subset \mathcal{O}_{X,y}$ als maximales Ideal in einem lokalen Ring gerade die Menge der Nichteinheiten des Rings ist, ist $f_{ky} \in \mathcal{O}_{X,y}^*$ invertierbar. Folglich erhalten wir aus (4.4)

$$s_{ky} = -\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n f_{ky}^{-1} f_{iy} s_{iy} \in \langle s_{1y}, \ldots, \widehat{s_{ky}}, \ldots, s_{ny} \rangle_{\mathcal{O}_{X,y}},$$

so dass die Surjektivität von φ_y die Gleichung

$$\langle s_{1y}, \ldots, \widehat{s_{ky}}, \ldots, s_{ny} \rangle_{\mathcal{O}_{X,y}} = \langle s_{1y}, \ldots, s_{ny} \rangle_{\mathcal{O}_{X,y}} = \mathcal{F}_y$$

liefert. Wir haben also ein Erzeugendensystem von $\mathcal{F}_y$ konstruiert, welches aus $n-1$ Elementen besteht, so dass $\zeta(y) \leqslant n-1$ gilt. Dies ist jedoch ein Widerspruch, da wir bereits gesehen haben, dass $\zeta(y) = n$ gilt. Damit ist gezeigt, dass $[f_k](y) = 0$ für alle $1 \leqslant k \leqslant n$ und alle $y \in V$ gilt. Da aber $(X, \mathcal{O}_X)$ als reduzierter Raum vorausgesetzt wurde, folgt hieraus $f_k = 0$ für alle $1 \leqslant k \leqslant n$, so dass wir wie gewünscht $f = 0$ erhalten. □

Um dieses Resultat in unserer Situation anwenden zu können, benötigen wir Grauerts Endlichkeitssatz:

Theorem 4.17 ([GR84])**.** *Ist $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ ein eigentlicher Morphismus komplexer Räume und ist $\mathcal{F}$ eine kohärente Garbe auf X, dann sind die höheren direkten Bildgarben $R^q f_* \mathcal{F}$ auf Y für alle $q \geqslant 0$ kohärent.*

Wir erhalten hieraus ein erstes Resultat, welches für den Umgang mit den höheren direkten Bildgarben von großer Bedeutung ist. Man kann sich schnell davon überzeugen, dass für die Gültigkeit der folgenden Aussage die Beschränkung auf die Punkte außerhalb der Menge $A_q(F)$ zwingend ist. Dies unterstreicht die Wichtigkeit von Informationen über die Funktionen $h^q(F)$.

Satz 4.18. *Sei $F \to X \times S$ eine Familie holomorpher Vektorbündel auf der kompakten Kähler-mannigfaltigkeit (X, g), parametrisiert durch die komplexe Mannigfaltigkeit S, und sei $q \geqslant 0$. Dann ist die höhere direkte Bildgarbe $R^q p_* \mathcal{O}(F)$ auf der Menge $S \setminus A_q(F)$ lokal frei und die Faser des zugehörigen holomorphen Vektorbündels über einem beliebigen Punkt $t \in S \setminus A_q(F)$ als $\mathbb{C}$-Vektorraum kanonisch isomorph zu $H^q(X, \mathcal{O}(F_t))$.*

Beweis. Nach Grauerts Endlichkeitssatz ist die Garbe $R^q p_* \mathcal{O}(F)$ kohärent und damit insbesondere vom endlichen Typ. Gemäß Satz 4.13 ist der kanonische $\mathbb{C}$-Vektorraumhomomorphismus

$$\left(R^q p_* \mathcal{O}(F)\right)_t \otimes_{\mathcal{O}_{S,t}} \mathbb{C}(t) \longrightarrow H^q(X, \mathcal{O}(F_t))$$

ein Isomorphismus für alle $t \in S \setminus A_q(F)$. Da aber nach Definition $h^q(F,t) = \dim_{\mathbb{C}} H^q(X, \mathcal{O}(F_t))$ für alle $t \in S$ gilt und die Funktion $h^q(F)$ auf der Menge $S \setminus A_q(F)$ konstant ist, folgt, dass

$$t \longmapsto \dim_{\mathbb{C}(t)} \left(R^q p_* \mathcal{O}(F)\right)_t \otimes_{\mathcal{O}_{S,t}} \mathbb{C}(t)$$

konstant auf $S \setminus A_q(F)$ ist. Als komplexe Mannigfaltigkeit ist $S \setminus A_q(F)$ ein reduzierter komplexer Raum, so dass wir aus Satz 4.16 die lokale Freiheit der Bildgarbe $R^q p_* \mathcal{O}(F)$ über $S \setminus A_q(F)$ erhalten. Da ferner nach Konstruktion des zugehörigen holomorphen Vektorbündels dessen Faser über einem Punkt $t \in S \setminus A_q(F)$ gerade durch den Raum $\left(R^q p_* \mathcal{O}(F)\right)_t \otimes_{\mathcal{O}_{S,t}} \mathbb{C}(t)$ gegeben wird, liefert der kanonische Isomorphismus auch die zweite Aussage. □

Mit den bislang bewiesenen Resultaten verstehen wir die Menge, über der die höheren direkten Bildgarben aus unserer Situation lokal frei sind, sehr gut. Ferner haben wir mit obigem Resultat auch die Fasern der zugehörigen holomorphen Vektorbündel berechnet. Wir stellen nun einige

Ergebnisse zusammen, die es uns ermöglichen, auch die Schnitte dieser Garben und damit der zugehörigen Vektorbündel zu berechnen.

Einer einfachen Notation wegen bezeichnen wir die lokal freie Garbe der relativen (p,q)-Formen mit Werten im holomorphen Vektorbündel $F \to X \times S$ mit $\mathcal{A}^{p,q}_{\mathrm{rel}}(F)$, wobei wir stets Differentialformen entlang der Fasern $F_t \to X$ für $t \in S$ meinen. Eine konkrete Konstruktion des zugehörigen Vektorbündels, welche für unsere Zwecke ausreicht, findet man beispielsweise in [KS58a, KS60]. Wir fassen hier einige bekannte Eigenschaften zusammen. Ist über $V \subset S$ offen $\psi \in \Gamma\left(X \times V, \mathcal{A}^{p,q}_{\mathrm{rel}}(F)\right)$ eine relative (p,q)-Form mit Werten in F, dann induziert ψ für jeden Punkt $t \in V$ eine Differentialform $\psi|_t \in \Gamma(X, \mathcal{A}^{p,q}(F_t))$, die Restriktion von ψ auf die Faser zu t. Ferner wird die relative Differentialform ψ bereits eindeutig durch die Familie $\{\psi|_t \mid t \in V\}$ dieser Restriktionen bestimmt. Diesbezüglich unterscheidet sich eine relative Form also wesentlich von einer gewöhnlichen Form aus $\Gamma(X \times V, \mathcal{A}^{p,q}(F))$. Nicht jede solche Familie von Differentialformen auf den Fasern wird von einer relativen Differentialform induziert. Wir sagen, dass eine solche Familie differenzierbar vom Parameter $t \in V$ abhängt, falls sie von einer relativen Differentialform induziert wird. Ferner bemerken wir, dass es eine relative äußere Ableitung sowie einen relativen $\bar{\partial}^*$-Operator

$$\bar{\partial}_{\mathrm{rel}} : \mathcal{A}^{p,q}_{\mathrm{rel}}(F) \longrightarrow \mathcal{A}^{p,q+1}_{\mathrm{rel}}(F), \qquad \bar{\partial}^*_{\mathrm{rel}} : \mathcal{A}^{p,q}_{\mathrm{rel}}(F) \longrightarrow \mathcal{A}^{p,q-1}_{\mathrm{rel}}(F)$$

gibt, welche in folgender Weise mit den jeweiligen Operatoren auf den Fasern verträglich sind: Ist $\psi \in \Gamma\left(X \times V, \mathcal{A}^{p,q}_{\mathrm{rel}}(F)\right)$ gegeben, dann gilt

$$\left(\bar{\partial}_{\mathrm{rel}}\psi\right)\big|_t = \bar{\partial}\left(\psi|_t\right) \qquad \text{sowie} \qquad \left(\bar{\partial}^*_{\mathrm{rel}}\psi\right)\big|_t = \bar{\partial}^*\left(\psi|_t\right) \qquad \text{für alle } t \in V.$$

Schließlich halten wir noch fest, dass eine bündelwertige Differentialform $\varphi \in \Gamma(U \times V, \mathcal{A}^{p,q}(F))$ stets Anlass zu einer relativen Differentialform $\varphi' \in \Gamma\left(U \times V, \mathcal{A}^{p,q}_{\mathrm{rel}}(F)\right)$ gibt, welche vermöge der Eigenschaft $\varphi'|_t = \varphi|_t$ für alle $t \in V$ eindeutig durch φ bestimmt wird. Umgekehrt wird eine relative Differentialform $\eta' \in \Gamma\left(U \times V, \mathcal{A}^{p,q}_{\mathrm{rel}}(F)\right)$ nicht zwingend auf ganz $U \times V$ von einer Differentialform induziert. Im Allgemeinen ist eine Verkleinerung des Definitionsbereichs erforderlich, d.h. ist $(x,s) \in U \times V$ gegeben, dann gibt es auf einer offenen Umgebung $W \subset U \times V$ um (x,s) herum eine Differentialform $\eta \in \Gamma(W, \mathcal{A}^{p,q}(F))$, welche $\eta'|_W$ induziert. Dieses η ist natürlich nicht eindeutig durch die relative Differentialform bestimmt. Mit folgendem Lemma zeigen wir, dass die Fortsetzung einer relativen Differentialform zu einer echten Differentialform speziell in der für uns relevanten Situation sehr viel besser möglich ist.

Lemma 4.19. *Sei $F \to X \times S$ eine Familie holomorpher Vektorbündel auf der kompakten Kählermannigfaltigkeit (X,g), parametrisiert durch die komplexe Mannigfaltigkeit S, und sei $\psi' \in \Gamma(X \times S, \mathcal{A}^{p,q}_{\mathrm{rel}}(F))$ eine relative Differentialform sowie $s_0 \in S$ ein fester Punkt. Dann gibt es eine offene Umgebung $V \subset S$ von s_0 sowie eine Form $\psi \in \Gamma(X \times V, \mathcal{A}^{p,q}(F))$ mit $\psi|_t = \psi'|_t$ für alle $t \in V$.*

Beweis. Für jeden beliebigen Punkt $x \in X$ gibt es um (x, s_0) herum eine lokale Fortsetzung von ψ' zu einer echten Differentialform, d.h. es gibt offene Umgebungen $U_x \subset X$ um x und $V_x \subset S$ um s_0 herum sowie eine Differentialform $\psi_x \in \Gamma(U_x \times V_x, \mathcal{A}^{p,q}(F))$ mit $\psi_x|_t = (\psi'|_{U_x \times V_x})|_t$ für alle $t \in V_x$. Da X kompakt ist, genügen bereits endlich viele Punkte $x_1, \ldots, x_m$, um mit den U_{x_j}

ganz X zu überdecken. Indem wir also $U_j := U_{x_j}$, $V := \cap_j V_{x_j}$ sowie $\psi_j := \psi_{x_j}|_{U_j \times V}$ setzen, haben wir eine offene Umgebung $V \subset S$ von s_0 sowie Differentialformen $\psi_j \in \Gamma\left(U_j \times V, \mathcal{A}^{p,q}(F)\right)$ konstruiert, so dass stets $\psi_j\big|_t = (\psi'|_{U_j\times V})|_t$ für alle $t \in V$ gilt. Sei nun $\{\rho_j\}$ eine glatte Partition der Eins, welche der endlichen Überdeckung $\{U_j \times V\}$ von $X \times V$ untergeordnet ist. Wir behaupten, dass damit $\psi := \sum_{j=1}^m \rho_j \psi_j \in \Gamma\left(X \times V, \mathcal{A}^{p,q}(F)\right)$ die gewünschte Eigenschaft besitzt. Um dies nachzuweisen, berechnen wir für ein beliebiges $t \in V$:

$$\psi|_t = \left.\left(\sum_{j=1}^m \rho_j \psi_j\right)\right|_t = \sum_{j=1}^m \rho_j(t)\ \psi_j|_t = \sum_{j=1}^m \rho_j(t)\ \left(\psi'|_{U_j\times V}\right)\Big|_t = \left.\left(\sum_{j=1}^m \rho_j\ \psi'|_{U_j\times V}\right)\right|_t = \psi'\big|_t .$$

□

Für unsere weitere Untersuchung ist folgendes Resultat von großer Bedeutung, welches in [KS58a] als Fundamentaltheorem angekündigt und in [KS60] bewiesen wird. Um keine unnötig komplizierten Sprechweisen vereinbaren zu müssen, formulieren wir es in einer vereinfachten Variante in der Sprache der relativen Differentialformen. In den zitierten Quellen wird auch der gekoppelte Fall einer Familie holomorpher Vektorbündel über einer nicht notwendig trivialen Familie kompakter, komplexer Mannigfaltigkeiten gezeigt.

Theorem 4.20 ([KS58a, KS60])**.** *Sei $(F, h) \to X \times S$ eine Familie hermitescher, holomorpher Vektorbündel auf der kompakten Kählermannigfaltigkeit (X, g), parametrisiert durch die komplexe Mannigfaltigkeit S. Mit G_t und H_t bezeichnen wir für $t \in S$ den Green-Operator beziehungsweise die harmonische Projektion, jeweils auf der Faser $F_t \to X$. Ist für $p \geqslant 0$ und $q \geqslant 0$ die Funktion*

$$S \longrightarrow \mathbb{N}, \qquad t \longmapsto \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}^{p,q}(X, F_t, h_t)$$

konstant, dann hängen die Operatoren G_t und H_t auf $\Gamma\left(X, \mathcal{A}^{p,q}(F_t)\right)$ differenzierbar vom Parameter t ab, d.h. ist über einer offenen Menge $V \subset S$ eine relative Differentialform $\psi \in \Gamma\left(X \times V, \mathcal{A}^{p,q}_{\mathrm{rel}}(F)\right)$ gegeben, dann existieren relative Differentialformen

$$\psi_G \in \Gamma\left(X \times V, \mathcal{A}^{p,q}_{\mathrm{rel}}(F)\right) \quad \text{sowie} \quad \psi_H \in \Gamma\left(X \times V, \mathcal{A}^{p,q}_{\mathrm{rel}}(F)\right),$$

so dass für alle $t \in V$ sowohl $\psi_G\big|_t = G_t\left(\psi|_t\right)$ als auch $\psi_H\big|_t = H_t\left(\psi|_t\right)$ gilt.

Wir nutzen dieses Theorem, um folgenden Spezialfall einer Aussage aus [Sch12] zu beweisen:

Satz 4.21. *Sei $(F, h) \to X \times S$ eine Familie von hermiteschen, holomorphen Vektorbündeln auf der kompakten Kählermannigfaltigkeit (X, g), parametrisiert durch die komplexe Mannigfaltigkeit S. Die Funktion $h^q(F)$ sei konstant. Ist dann $\phi \in \Gamma\left(X \times S, \mathcal{A}^{0,q}(F)\right)$ mit $\bar\partial\phi = 0$ gegeben und $s_0 \in S$ ein fester Punkt, dann gibt es eine offene Umgebung $V \subset S$ um s_0 und eine Form $\chi \in \Gamma\left(X \times V, \mathcal{A}^{0,q-1}(F)\right)$, so dass für alle $t \in V$ gilt:*

$$\left(\phi + \bar\partial\chi\right)\big|_t = H_t\left(\phi|_t\right).$$

Beweis. Wir bezeichnen mit $\phi' \in \Gamma(X \times S, \mathcal{A}^{0,q}_{\mathrm{rel}}(F))$ die von ϕ induzierte relative Differentialform. Es gilt also $\phi'|_t = \phi\big|_t$ für alle $t \in S$. Da wir wegen der Hodge-Zerlegung auf $F_t \to X$ jeweils den Hodge-Isomorphismus $\mathcal{H}^{0,q}(X, F_t, h_t) \simeq H^q(X, \mathcal{O}(F_t))$ komplexer Vektorräume haben, ist nach Voraussetzung die Funktion

$$S \longrightarrow \mathbb{N}, \qquad t \longmapsto \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}^{0,q}(X, F_t, h_t) = \dim_{\mathbb{C}} H^q(X, \mathcal{O}(F_t))$$

konstant, so dass Theorem 4.20 auf die relative Differentialform ϕ' angewendet werden kann. Es existieren also relative Differentialformen $\psi'_G \in \Gamma(X \times S, \mathcal{A}^{0,q}_{\mathrm{rel}}(F))$ sowie $\psi'_H \in \Gamma(X \times S, \mathcal{A}^{0,q}_{\mathrm{rel}}(F))$ so dass für alle $t \in S$

$$\psi'_G\big|_t = G_t\left(\phi'\big|_t\right) = G_t\left(\phi|_t\right) \qquad \text{und} \qquad \psi'_H\big|_t = H_t\left(\phi'\big|_t\right) = H_t\left(\phi|_t\right)$$

gilt. Auf einer offenen Umgebung $V \subset S$ um den festen Punkt s_0 herum werden die relativen Differentialformen $\bar{\partial}^*_{\mathrm{rel}}\psi'_G$ sowie ψ'_H nach Lemma 4.19 von Formen $\psi_G \in \Gamma\left(X \times V, \mathcal{A}^{0,q-1}(F)\right)$ beziehungsweise $\psi_H \in \Gamma\left(X \times V, \mathcal{A}^{0,q}(F)\right)$ induziert. Es gilt also

$$\psi_G|_t = \bar{\partial}^* G_t\left(\phi|_t\right) \qquad \text{sowie} \qquad \psi_H|_t = H_t\left(\phi|_t\right) \qquad \text{für alle } t \in V.$$

Für einen festen Punkt $t \in V$ berechnen wir nun auf der Faser $F_t \to X$:

$$\begin{aligned}
\phi|_t &= H_t\left(\phi|_t\right) + \Box_{\bar{\partial}} G_t\left(\phi|_t\right) = H_t\left(\phi|_t\right) + \left(\bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial}\right) G_t\left(\phi|_t\right) \\
&= H_t\left(\phi|_t\right) + \bar{\partial}\bar{\partial}^* G_t\left(\phi|_t\right) + \bar{\partial}^* G_t\left(\bar{\partial}\, \phi|_t\right) \\
&= H_t\left(\phi|_t\right) + \bar{\partial}\bar{\partial}^* G_t\left(\phi|_t\right).
\end{aligned}$$

Dabei haben wir die Identität $\mathrm{id} = H_t + \Box_{\bar{\partial}} \circ G_t$ verwendet sowie die Tatsache, dass G_t mit der äußeren Ableitung kommutiert und ferner, dass wegen $\bar{\partial}\phi = 0$ auch $\bar{\partial}\, \phi|_t = 0$ gilt. Indem wir

$$\chi := -\psi_G \in \Gamma\left(X \times V, \mathcal{A}^{0,q-1}(F)\right)$$

wählen, erhalten wir schließlich für alle $t \in V$ unter Ausnutzung der eben hergeleiteten Identität:

$$\begin{aligned}
\left(\phi + \bar{\partial}\chi\right)\big|_t &= \phi|_t + \left(\bar{\partial}\chi\right)\big|_t = \phi|_t + \bar{\partial}\left(\chi|_t\right) = \phi|_t - \bar{\partial}\left(\psi_G|_t\right) \\
&= \phi|_t - \bar{\partial}\left(\bar{\partial}^* G_t\left(\phi|_t\right)\right) = H_t\left(\phi|_t\right).
\end{aligned}$$

□

Wir sehen also, dass nach geeigneter Einschränkung stets Repräsentanten der Dolbeault-Kohomologie des Vektorbündels F existieren, deren Restriktionen auf die Fasern über allen Punkten $t \in S$ bereits harmonisch sind. Um mit diesem Satz die Schnitte der höheren direkten Bildgarben berechnen zu können, zitieren wir noch das berühmte Theorem B aus der Theorie der steinschen Räume:

Theorem 4.22 ([GR77]). *Sei $\mathcal{F}$ eine kohärente Garbe auf dem steinschen Raum $(X, \mathcal{O}_X)$. Dann ist $H^q(X, \mathcal{F}) = 0$ für alle $q \geqslant 1$.*

Mit dieser Vorbereitung können wir schließlich folgendes Resultat zeigen, welches weite Teile unserer bisherigen Überlegungen noch einmal zusammenfasst.

Satz 4.23. *Sei $(F, h) \to X \times S$ eine Familie von hermiteschen, holomorphen Vektorbündeln auf der kompakten Kählermannigfaltigkeit (X, g), parametrisiert durch die komplexe Mannigfaltigkeit S, und sei $q \geqslant 0$. Dann gilt für jede offene, steinsche Teilmenge $V \subset S \setminus A_q(F)$:*

$$\Gamma\left(V, R^q p_* \mathcal{O}(F)\right) = H^q(X \times V, \mathcal{O}\left(F\right)).$$

Ferner gilt in dieser Situation: Ist $\psi \in \Gamma\left(V, R^q p_* \mathcal{O}(F)\right)$ gegeben und $s_0 \in V$ ein fester Punkt, dann gibt es nach einer eventuellen Verkleinerung von V um s_0 herum einen Repräsentanten $\psi = [\phi]$ der Dolbeault-Kohomologieklasse von ψ, so dass für alle $t \in V$ die Restriktion

$$\phi|_t \in \mathcal{H}^{0,q}(X, F_t, h_t)$$

gerade der harmonische Repräsentant des Wertes $\psi(t)$ in der Faser $H^q(X, \mathcal{O}\left(F_t\right))$ des von der höheren direkten Bildgarbe induzierten Vektorbündels auf $S \setminus A_q(F)$ ist.

Beweis. Nach dem Endlichkeitssatz von Grauert ist die Bildgarbe $R^q p_* \mathcal{O}(F)$ kohärent. Da $V \subset S \setminus A_q(F)$ offen und steinsch ist, folgt also mit Theorem B

$$H^k(V, R^q p_* \mathcal{O}(F)) = H^k(V, (R^q p_* \mathcal{O}(F))|_V) = 0 \qquad \text{für alle } k \geqslant 1. \tag{4.5}$$

In dieser Situation existiert aber außerdem die Leray-Spektralsequenz, welche man beispielsweise aus der Grothendieck-Spektralsequenz gewinnen kann (vergleiche [We94]), d.h. es gibt eine konvergente Spektralsequenz $\{E_r^{pq}\}$ im ersten Quadranten mit

$$E_2^{pq} = H^p(V, R^q p_* \mathcal{O}(F)) \quad \text{sowie} \quad E_r^{pq} \Rightarrow H^{p+q}(X \times V, \mathcal{O}\left(F\right)).$$

Wegen (4.5) entartet die Spektralsequenz in unserer Situation bereits in E_2, so dass $E_2^{pq} = E_\infty^{pq}$ und damit für alle $k \geqslant 0$

$$H^k(X \times V, \mathcal{O}\left(F\right)) = \bigoplus_{p+q=k} E_\infty^{pq} = \bigoplus_{p+q=k} E_2^{pq} = \bigoplus_{p+q=k} H^p(V, R^q p_* \mathcal{O}(F)) = H^0(V, R^k p_* \mathcal{O}(F))$$

folgt, wobei wir in der letzten Umformung erneut (4.5) verwendet haben. Also ist für alle $q \geqslant 0$

$$H^q(X \times V, \mathcal{O}\left(F\right)) = H^0(V, R^q p_* \mathcal{O}(F)) = \Gamma\left(V, R^q p_* \mathcal{O}(F)\right),$$

womit die erste Behauptung bewiesen ist.

Sei nun $\psi \in \Gamma\left(V, R^q p_* \mathcal{O}(F)\right)$ und $s_0 \in V$ ein fester Punkt. Ferner sei $\psi' \in \Gamma\left(X \times V, \mathcal{A}^{0,q}\left(F\right)\right)$ irgendein Repräsentant der Dolbeault-Kohomologieklasse von ψ. Da nach Voraussetzung $V \subset S \setminus A_q(F)$ gilt, ist $h^q(F)$ auf der Menge V konstant und da ferner $\bar{\partial}\psi' = 0$ gilt, ist Satz 4.21 anwendbar und liefert nach einer eventuellen Verkleinerung der Menge V um den Punkt s_0 herum eine Form $\chi \in \Gamma\left(X \times V, \mathcal{A}^{0,q-1}\left(F\right)\right)$, so dass für alle $t \in V$ gilt:

$$\left(\psi' + \bar{\partial}\chi\right)\big|_t = H_t\left(\psi'|_t\right).$$

Da der Punkt s_0 eine Umgebungsbasis aus steinschen, offenen Mengen besitzt, dürfen wir ohne Einschränkung davon ausgehen, dass die Menge V auch nach der Verkleinerung eine steinsche

Menge ist. Damit ist dann $\phi := \psi' + \bar{\partial}\chi \in \Gamma\left(X \times V, \mathcal{A}^{0,q}(F)\right)$ ein anderer Repräsentant von ψ, welcher die behauptete Eigenschaft wegen obiger Gleichung besitzt. □

Mit diesem Satz sind wir nun in der Lage, bequem mit den höheren direkten Bildgarben zu arbeiten, solange wir uns dabei auf steinsche Teilmengen von S beschränken. Da aber jeder Punkt $s_0 \in S$ eine Umgebungsbasis aus steinschen, offenen Mengen besitzt, stellt dies keine besonders schwerwiegende Einschränkung dar. Der Einfachheit halber werden wir das von der höheren direkten Bildgarbe $R^q p_* \mathcal{O}(F)$ auf der Menge $S \setminus A_q(F)$ induzierte holomorphe Vektorbündel ebenfalls mit $R^q p_* \mathcal{O}(F)$ bezeichnen.

Wir konstruieren nun die natürliche L_2-Metrik auf diesen Vektorbündeln. Zunächst notieren wir, dass wie in Abschnitt 2.4 erläutert, für alle $t \in S$ hermitesche Skalarprodukte auf den Räumen $\Gamma(X, \mathcal{A}^{p,q}(F_t))$ existieren, welche von der Kählermetrik g auf X und der hermiteschen Metrik h_t auf F_t induziert werden. Sind zwei Schnitte $\mu, \eta \in \Gamma(X \times V, \mathcal{A}^{p,q}(F))$ gegeben, dann definieren wir hiervon ausgehend die Funktion

$$\langle \mu, \eta \rangle : V \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \langle \mu, \eta \rangle (t) := \int_X (\mu|_t, \eta|_t) \frac{\omega^n}{n!},$$

wobei $(\mu|_t, \eta|_t)$ das Produkt der Formen bezeichnet (vergleiche Abschnitt 2.4). Da $\mu|_t$ und $\eta|_t$ in einer lokalen Beschreibung betrachtet differenzierbar vom Parameter $t \in V$ abhängen, ist offenbar auch die Funktion $\langle \mu, \eta \rangle$ differenzierbar auf V.

Definition 4.24. Sei $(F, h) \to X \times S$ eine Familie hermitescher, holomorpher Vektorbündel auf der kompakten Kählermannigfaltigkeit (X, g), parametrisiert durch die komplexe Mannigfaltigkeit S. Sind ferner eine offene, steinsche Menge $V \subset S \setminus A_q(F)$ sowie zwei Schnitte

$$[\varphi], [\psi] \in \Gamma(V, R^q p_* \mathcal{O}(F))$$

mit Repräsentanten $\varphi, \psi \in \Gamma\left(X \times V, \mathcal{A}^{0,q}(F)\right)$ gegeben, dann definieren wir die L_2-Metrik durch

$$\langle [\varphi], [\psi] \rangle_{L_2} : V \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \langle [\varphi], [\psi] \rangle_{L_2}(t) := \int_X (H_t(\varphi|_t), H_t(\psi|_t)) \frac{\omega^n}{n!},$$

wobei $H_t : \Gamma\left(X, \mathcal{A}^{0,q}(F_t)\right) \to \mathcal{H}^{0,q}(X, F_t, h_t)$ wie üblich die harmonische Projektion bezeichnet.

Mit dieser Definition statten wir die Fasern der Vektorbündel $R^q p_* \mathcal{O}(F)$ offenbar jeweils mit dem L_2-Skalarprodukt der harmonischen Formen aus und folglich erklären wir tatsächlich eine Funktion für beliebige offene Mengen $V \subset S \setminus A_q(F)$. Wir zeigen nun, dass es sich tatsächlich um eine Metrik handelt.

Satz 4.25. *Sei $(F, h) \to X \times S$ eine Familie hermitescher, holomorpher Vektorbündel auf der kompakten Kählermannigfaltigkeit (X, g), parametrisiert durch die komplexe Mannigfaltigkeit S. Dann wird durch die Funktionen $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L_2}$ eine hermitesche Metrik auf dem holomorphen Vektorbündel $R^q p_* \mathcal{O}(F) \to S \setminus A_q(F)$ erklärt.*

Beweis. Seien eine offene Menge $V \subset S \setminus A_q(F)$, zwei Schnitte $\varphi, \psi \in \Gamma(V, R^q p_* \mathcal{O}(F))$ sowie ein fester Punkt $s_0 \in V$ gegeben. Wir müssen zeigen, dass die Funktion $\langle \varphi, \psi \rangle_{L_2}$ im Punkt s_0

differenzierbar ist. Da es sich hierbei um eine lokale Aussage handelt, dürfen wir die Ausgangsmenge V um den Punkt s_0 herum zu einer steinschen, offenen Umgebung um s_0 verkleinern. Indem wir Satz 4.23 anwenden, können wir die Menge der Schnitte $\Gamma\left(V, R^q p_* \mathcal{O}\left(F\right)\right)$ mit der Dolbeault-Kohomologie berechnen und zwei Repräsentanten $[\varphi'] = \varphi$ sowie $[\psi'] = \psi$ wählen, deren Restriktionen für alle $t \in V$ bereits harmonisch sind. Gemäß der Definition der L_2-Metrik berechnen wir nun:

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{L_2}(t) = \int_X \left(H_t(\varphi'|_t), H_t(\psi'|_t) \right) \frac{\omega^n}{n!} = \int_X \left(\varphi'|_t, \psi'|_t \right) \frac{\omega^n}{n!} = \left\langle \varphi', \psi' \right\rangle(t).$$

Also ist die Funktion $\langle \varphi, \psi \rangle_{L_2}$ auf V und damit insbesondere im Punkt s_0 differenzierbar. $\square$

Dieser Beweis zeigt ferner, wie wir Satz 4.23 zur effektiven Berechnung der L_2-Metrik einsetzen können. Abschließend sei bemerkt, dass unsere Definition der L_2-Metrik auf den höheren direkten Bildgarben sowohl eine Verallgemeinerung der Weil-Petersson-Metrik des Modulraums der stabilen Vektorbündel, wie sie in [Ov92] konstruiert wird, als auch eine Verallgemeinerung der in [TW98] untersuchten Metrik ist.

4.2. Die Krümmung der höheren direkten Bildgarben

In diesem Abschnitt berechnen wir die Krümmung der im vorherigen Abschnitt auf der höheren direkten Bildgarbe $R^q p_* \mathcal{O}\left(F\right) \to S \setminus A_q(F)$ konstruierten natürlichen L_2-Metrik und arbeiten zu diesem Zweck in derselben Situation und mit denselben Voraussetzungen. Zusätzlich fixieren wir einen Punkt $s_0 \in S$, in welchem wir den Krümmungstensor berechnen werden, und wählen Normalkoordinaten bezüglich dieses Punktes, d.h. wir wählen eine offene Koordinatenumgebung (W, s) um den Punkt s_0 und einen Rahmen

$$\Xi_1, \ldots, \Xi_R \in \Gamma\left(W, R^q p_* \mathcal{O}\left(F\right)\right),$$

wobei wir $R := \mathrm{rk}(R^q p_* \mathcal{O}\left(F\right))$ vereinbaren, so dass wir für die Beschreibung

$$H : W \longrightarrow \mathbb{C}^{R \times R}$$

der L_2-Metrik bezüglich der von diesem Rahmen induzierten Trivialisierung die Eigenschaften

$$H(s_0) = \mathrm{id} \quad \text{sowie} \quad \left.\frac{\partial}{\partial s^k}\right|_{s_0} H_{\rho\overline{\sigma}} = 0 \quad \text{für alle } 1 \leqslant k \leqslant m \text{ und } 1 \leqslant \rho, \sigma \leqslant R \tag{4.6}$$

haben. Indem wir W gegebenenfalls endlich oft verkleinern, erhalten wir durch die Anwendung von Satz 4.23 Repräsentanten

$$\xi_1, \ldots, \xi_R \in \Gamma\left(X \times W, \mathcal{A}^{0,q}\left(F\right)\right)$$

der Dolbeault-Kohomologieklassen Ξ_i, so dass für alle Punkte $t \in W$ die eingeschränkten Formen $\xi_i|_t \in \mathcal{H}^{0,q}(X, F_t, h_t)$ harmonisch sind. Also gilt $\Xi_i(t) = \xi_i|_t$, wenn wir die Faser $(R^q p_* \mathcal{O}\left(F\right))_t$ des Vektorbündels mit dem Raum $\mathcal{H}^{0,q}(X, F_t, h_t)$ der harmonischen Formen identifizieren.

Wir notieren nun für unsere Rechnung einige Konsequenzen aus der konstruierten Situation. Zunächst kann die lokale Darstellung H der L_2-Metrik folgendermaßen berechnet werden, wobei wir das Argument aus dem Beweis von Satz 4.25 verwenden:

$$H_{\rho\overline{\sigma}} = \langle \Xi_\rho, \Xi_\sigma \rangle_{L_2} = \langle \xi_\rho, \xi_\sigma \rangle . \tag{4.7}$$

Bezeichnen wir nun die Krümmung der L_2-Metrik mit

$$\Omega_{L_2} \in \Gamma\left(S, \mathcal{A}^{1,1}\left(\operatorname{End}\left(R^q p_* \mathcal{O}\left(F\right)\right)\right)\right).$$

Diese wird lokal auf der Koordinatenumgebung (W, s) durch die Matrix

$$\Theta_{L_2} \in \left(\Gamma\left(W, \mathcal{A}^{1,1}\left(S\right)\right)\right)^{R\times R} \quad \text{mit} \quad \Theta^{\rho}_{L_2\,\sigma} = \sum_{k,l} R^{\rho}_{L_2\,\sigma k\bar{l}} ds^k \wedge ds^{\bar{l}}$$

beschrieben. Da wir Normalkoordinaten bezüglich des Punktes $s_0 \in W$ gewählt haben, ist insbesondere $\Theta_{L_2}(s_0) = \bar{\partial}\partial H(s_0)$, so dass wir wegen

$$\bar{\partial}\partial H_{\rho\overline{\sigma}} = \sum_{k,l} -\partial_{\bar{l}}\partial_k H_{\rho\overline{\sigma}} ds^k \wedge ds^{\bar{l}}$$

und (4.7) insgesamt folgende Gleichung erhalten:

$$R^{\rho}_{L_2\,\sigma k\bar{l}}(s_0) = -\partial_{\bar{l}}\partial_k H_{\rho\overline{\sigma}}(s_0) = -\partial_{\bar{l}}\partial_k \langle \xi_\rho, \xi_\sigma \rangle (s_0). \tag{4.8}$$

Um die Krümmung der L_2-Metrik im Punkt s_0 zu berechnen, werden wir diese Formel verwenden. Schließlich halten wir fest, dass für alle $t \in W$

$$\langle \xi_1|_t, \ldots, \xi_R|_t \rangle_{\mathbb{C}} = \mathcal{H}^{0,q}(X, F_t, h_t) \subset \Gamma\left(X, \mathcal{A}^{0,q}\left(F_t\right)\right) \tag{4.9}$$

gilt, genauer bilden die $\xi_1|_t, \ldots, \xi_R|_t$ nach Konstruktion sogar eine Basis des Raums der harmonischen Formen. Wir werden die eben stillschweigend verwendete Konvention, Koordinatenrichtungen auf S mit lateinischen und Koordinatenrichtungen auf X mit griechischen Indizes zu bezeichnen, auch später stets einsetzen. Entsprechend ist beispielsweise eine Ableitung ∂_k als Ableitung ∂_{s^k} zu lesen sowie ∂_α als ∂_{z^α}. Außerdem werden wir W häufig mit der flachen Kählermetrik ausstatten, d.h. mit der hermiteschen Metrik, welche durch die konstante Funktion $W \to \mathbb{C}^{m\times m}$ mit $t \mapsto \mathrm{id}$ erklärt wird. Ferner versehen wir dann $X \times W$ mit der Produktmetrik G. Ist also eine offene Überdeckung $\{U_j\}$ von X durch Koordinatenumgebungen (U_j, z_j) gegeben, dann kann G durch $G_j : U_j \times W \to \mathbb{C}^{(n+m)\times(n+m)}$ mit

$$G_j(x,t) = \begin{pmatrix} g_j(x) & 0 \\ 0 & \mathrm{id} \end{pmatrix}$$

beschrieben werden. Diese Konvention ist dabei nicht als inhaltlich wesentlich zu verstehen. Sie ermöglicht es lediglich für diverse, während der Rechnung auftretende Objekte eine einfachere Notation verwenden zu können. Beispielsweise zeigt obige Matrix, dass die Funktion G_j nicht vom Punkt $t \in W$ abhängt und folglich gilt für die Christoffelsymbole von G zu Koordinatenrichtungen auf W

$$\Gamma^{\rho}_{jG\,k\sigma} = \sum_{\tau} G_j^{\overline{\tau}\rho} \partial_k G_{j\,\sigma\overline{\tau}} = 0,$$

so dass die kovariante Ableitung $\nabla_{\overline{k}}$ einer $(0,q)$-Form auf $X \times W$ lokal durch Ableiten der schiefsymmetrischen Koeffizienten mit der partiellen Ableitung $\partial_{\overline{k}}$ gebildet wird.

Zur Berechnung der Krümmung werden wir die Rechnung in diesem Abschnitt immer wieder durch Beweise von Aussagen unterbrechen, die dazu erforderlich sind und deren Voraussetzungen wir gesondert notieren. Davon abgesehen behalten wir aber für den Verlauf der Rechnung obige Voraussetzungen und Konstruktionen bei. Zunächst beweisen wir einige Resultate, die direkt für die Berechnung von (4.8) erforderlich sind.

Lemma 4.26. *Es sei (X, g) eine kompakte Kählermannigfaltigkeit der Dimension n mit Kählerform ω und S eine komplexe Mannigfaltigkeit. Ferner sei (V, s) eine holomorphe Koordinatenumgebung auf S und $f : X \times S \to \mathbb{C}$ eine differenzierbare Funktion. Dann ist die Funktion*

$$F : S \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad t \longmapsto \int_X f(\cdot, t) \frac{\omega^n}{n!}$$

differenzierbar und für alle $t \in V$ gilt die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial s^k} F(t) = \int_X \frac{\partial}{\partial s^k} f(\cdot, t) \frac{\omega^n}{n!}.$$

Beweis. Wir wählen eine lokal endliche Überdeckung von X durch holomorphe Koordinatenumgebungen (U_j, z_j) sowie eine untergeordnete glatte Partition der Eins $\{\rho_j\}$. Ferner bezeichnen wir die den z_j unterliegenden reellen Koordinaten mit x_j. Dann ist für $t \in V$:

$$F(t) = \int_X f(\cdot, t) \frac{\omega^n}{n!} = \sum_j \int_{U_j} \rho_j(x) f(x,t) 2^n g_j(x) dx_j^1 \wedge \ldots \wedge dx_j^{2n}.$$

Da die Funktion f als beliebig oft differenzierbar vorausgesetzt wurde, kann lokal die Differentiation nach dem Parameter t und die Integration auf U_j vertauscht werden. Verwenden wir ferner, dass die Metrik g nicht von S abhängt, so berechnen wir in einem Punkt $s_0 \in V$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s^k} F(s_0) &= \frac{\partial}{\partial s^k}\bigg|_{s_0} \left(\sum_j \int_{U_j} \rho_j(x) f(x,t) 2^n g_j(x) dx_j^1 \wedge \ldots \wedge dx_j^{2n} \right) \\ &= \sum_j \int_{U_j} \rho_j(x) \left(\frac{\partial}{\partial s^k}\bigg|_{s_0} f(x,t) \right) 2^n g_j(x) dx_j^1 \wedge \ldots \wedge dx_j^{2n} = \int_X \frac{\partial}{\partial s^k} f(\cdot, s_0) \frac{\omega^n}{n!}.\end{aligned}$$

□

Der eigentliche Grund für die einfache Gestalt der eben bewiesenen Formel ist, dass eine triviale Familie $X \times S \to S$ komplexer Mannigfaltigkeiten, parametrisiert durch S, vorliegt. Im allgemeineren Fall einer Familie $\mathcal{X} \to S$ komplexer Mannigfaltigkeiten entsteht eine Lie-Ableitung, vergleiche beispielsweise [Sch12]. Wir leiten nun mit diesem Lemma eine Formel für die lokale Ableitung der Funktionen $\langle \cdot, \cdot \rangle$ her.

Proposition 4.27. *Es sei (X, g) eine kompakte Kählermannigfaltigkeit, S eine komplexe Mannigfaltigkeit und $(F, h) \to X \times S$ eine Familie von hermiteschen, holomorphen Vektorbündeln auf X. Ferner seien eine holomorphe Koordinatenumgebung (V, s) auf S und zwei $(0, q)$-Formen $\mu, \eta \in \Gamma\left(X \times V, \mathcal{A}^{0,q}(F)\right)$ auf $X \times V$ mit Werten in F gegeben. Dann gilt auf V:*

$$\frac{\partial}{\partial s^k} \langle \mu, \eta \rangle = \langle \nabla_k \mu, \eta \rangle + \left\langle \mu, \nabla_{\overline{k}} \eta \right\rangle.$$

Dabei sei V für die kovarianten Ableitungen mit der flachen Kählermetrik bezüglich der Koordinaten s und $X \times V$ mit der Produktmetrik ausgestattet.

Beweis. Es sei $s_0 \in V$ ein fester Punkt. Es genügt zu zeigen, dass

$$\left.\frac{\partial}{\partial s^k}\right|_{s_0} \left(\mu|_t \,, \eta|_t \right) = \left((\nabla_k \mu)|_{s_0} \,, \eta|_{s_0} \right) + \left(\mu|_{s_0} \,, \left(\nabla_{\overline{k}} \eta\right)\big|_{s_0} \right) \tag{4.10}$$

gilt, denn dann folgt mit obigem Lemma:

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial}{\partial s^k}\right|_{s_0} \langle \mu, \eta \rangle &= \int_X \left.\frac{\partial}{\partial s^k}\right|_{s_0} \left(\mu|_t \,, \eta|_t \right) \frac{\omega^n}{n!} = \int_X \left((\nabla_k \mu)|_{s_0} \,, \eta|_{s_0} \right) \frac{\omega^n}{n!} + \int_X \left(\mu|_{s_0} \,, \left(\nabla_{\overline{k}} \eta\right)\big|_{s_0} \right) \frac{\omega^n}{n!} \\ &= \langle \nabla_k \mu, \eta \rangle (s_0) + \left\langle \mu, \nabla_{\overline{k}} \eta \right\rangle (s_0). \end{aligned}$$

Zum Nachweis von (4.10) rechnen wir mit den Notationen aus 3.1. In dieser Situation werden μ beziehungsweise η lokal auf $U_j \times V$ durch $\mu_j = (\mu_j^1, \dots, \mu_j^r)^t$ beziehungsweise $\eta_j = (\eta_j^1, \dots, \eta_j^r)^t$ gegeben, wobei wir für $0 \leqslant l \leqslant r$

$$\mu_j^l = \frac{1}{q!} \sum_\beta \mu^l_{j\,\overline{\beta_1} \dots \overline{\beta_q}} dw_j^{\overline{\beta_1}} \wedge \dots \wedge dw_j^{\overline{\beta_q}} \quad \text{sowie} \quad \eta_j^l = \frac{1}{q!} \sum_\beta \eta^l_{j\,\overline{\beta_1} \dots \overline{\beta_q}} dw_j^{\overline{\beta_1}} \wedge \dots \wedge dw_j^{\overline{\beta_q}}$$

schreiben. Damit berechnen wir die Funktion $\left(\mu|_t \,, \eta|_t \right)$ lokal auf $U_j \subset X$ und für $t \in V$:

$$\left(\mu|_t \,, \eta|_t \right)|_{U_j} = \sum_{\lambda, \mu} h_{j\,\lambda \overline{\mu}}(t) \left(\mu_j^\lambda\Big|_t \,, \eta_j^\mu\Big|_t \right) = \frac{1}{q!} \sum_{\lambda, \mu} h_{j\,\lambda \overline{\mu}}(t) \sum_{\beta, \gamma} g_j^{\overline{\beta_1} \gamma_1} \cdots g_j^{\overline{\beta_q} \gamma_q} \mu^\lambda_{j\,\overline{\beta_1} \dots \overline{\beta_q}}(t) \overline{\eta^\mu_{j\,\overline{\gamma_1} \dots \overline{\gamma_q}}(t)}.$$

Auf U_j erhalten wir also:

$$\left.\frac{\partial}{\partial s^k}\right|_{s_0} \left(\mu|_t \,, \eta|_t \right)|_{U_j} = \left.\frac{\partial}{\partial s^k}\right|_{s_0} \left(\frac{1}{q!} \sum_{\lambda, \mu} h_{j\,\lambda \overline{\mu}}(t) \sum_{\beta, \gamma} g_j^{\overline{\beta_1} \gamma_1} \cdots g_j^{\overline{\beta_q} \gamma_q} \mu^\lambda_{j\,\overline{\beta_1} \dots \overline{\beta_q}}(t) \overline{\eta^\mu_{j\,\overline{\gamma_1} \dots \overline{\gamma_q}}(t)} \right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{q!}\sum_{\lambda,\mu} h_{j\,\lambda\overline{\mu}}(s_0)\sum_{\beta,\gamma} g_j^{\overline{\beta_1}\gamma_1}\cdots g_j^{\overline{\beta_q}\gamma_q}\mu^{\lambda}_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}}(s_0)\left(\frac{\partial}{\partial s^k}\bigg|_{s_0}\overline{\eta^{\mu}_{j\,\overline{\gamma_1}\ldots\overline{\gamma_q}}(t)}\right)\\
&\quad+\frac{1}{q!}\sum_{\lambda,\mu}\sum_{\beta,\gamma} g_j^{\overline{\beta_1}\gamma_1}\cdots g_j^{\overline{\beta_q}\gamma_q}\left(\frac{\partial}{\partial s^k}\bigg|_{s_0} h_{j\,\lambda\overline{\mu}}(t)\mu^{\lambda}_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}}(t)\right)\overline{\eta^{\mu}_{j\,\overline{\gamma_1}\ldots\overline{\gamma_q}}(s_0)}\\
&=: R_1 + R_2.
\end{aligned}
$$

Zunächst betrachten wir den Summanden R_1. Da F ein holomorphes Vektorbündel ist, ergibt sich für die kovariante Ableitung $\nabla_{\overline{k}}$ in eine antiholomorphe Richtung lokal auf $U_j \times V$ die Gleichung $\left(\nabla_{\overline{k}}\eta\right)_j = (\nabla_{\overline{k}}\eta^1_j, \ldots, \nabla_{\overline{k}}\eta^r_j)^t$. Hier ist die kovariante Ableitung der $(0,q)$-Formen auf $U_j \times V$ in eine antiholomorphe Richtung des Parameterraums zu bilden. Da wir jedoch V mit der flachen Kählermetrik bezüglich der Koordinaten s ausgestattet haben, verschwinden die in der kovarianten Ableitung auftretenden Christoffelsymbole und wir erhalten die einfache Gleichung

$$
\nabla_{\overline{k}}\eta^l_j = \frac{1}{q!}\sum_{\beta}\partial_{\overline{k}}\eta^l_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}} dw_j^{\overline{\beta_1}}\wedge\ldots\wedge dw_j^{\overline{\beta_q}}.
$$

Folglich ergibt sich auf U_j für die eingeschränkte Form $\nabla_{\overline{k}}\eta\big|_{s_0}$:

$$
\left(\nabla_{\overline{k}}\eta\big|_{s_0}\right)_j = \left((\nabla_{\overline{k}}\eta^1_j)\big|_{s_0}, \ldots, (\nabla_{\overline{k}}\eta^r_j)\big|_{s_0}\right)^t \;\text{ mit }\; \nabla_{\overline{k}}\eta^l_j\Big|_{s_0} = \frac{1}{q!}\sum_{\beta}\partial_{\overline{k}}\eta^l_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}}(s_0) dz_j^{\overline{\beta_1}}\wedge\ldots\wedge dz_j^{\overline{\beta_q}}.
$$

Mit diesen Vorbereitungen berechnen wir:

$$
\begin{aligned}
\left(\mu|_{s_0}, (\nabla_{\overline{k}}\eta)|_{s_0}\right)\Big|_{U_j} &= \sum_{\lambda,\mu} h_{j\,\lambda\overline{\mu}}(s_0)\left(\mu^{\lambda}_j\Big|_{s_0}, \left(\nabla_{\overline{k}}\eta^{\mu}_j\right)\Big|_{s_0}\right)\\
&= \frac{1}{q!}\sum_{\lambda,\mu} h_{j\,\lambda\overline{\mu}}(s_0)\sum_{\beta,\gamma} g_j^{\overline{\beta_1}\gamma_1}\cdots g_j^{\overline{\beta_q}\gamma_q}\mu^{\lambda}_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}}(s_0)\overline{\partial_{\overline{k}}\eta^{\mu}_{j\,\overline{\gamma_1}\ldots\overline{\gamma_q}}(s_0)}\\
&= \frac{1}{q!}\sum_{\lambda,\mu} h_{j\,\lambda\overline{\mu}}(s_0)\sum_{\beta,\gamma} g_j^{\overline{\beta_1}\gamma_1}\cdots g_j^{\overline{\beta_q}\gamma_q}\mu^{\lambda}_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}}(s_0)\left(\frac{\partial}{\partial s^k}\bigg|_{s_0}\overline{\eta^{\mu}_{j\,\overline{\gamma_1}\ldots\overline{\gamma_q}}(t)}\right)\\
&= R_1.
\end{aligned}
$$

Wir kommen nun zur Untersuchung des Summanden R_2. Zunächst haben wir auf $U_j \times V$ die Gleichung $(\nabla_k\mu)_j = ((\nabla_k\mu)^1_j, \ldots, (\nabla_k\mu)^r_j)^t$ und da wir die kovariante Ableitung ∇_k eines bündelwertigen Schnitts in eine holomorphe Richtung des Parameterraums berechnen, erhalten wir Korrekturterme. Genauer ist für $0 \leqslant l \leqslant r$

$$
(\nabla_k\mu)^l_j = \left(\left(h_j^{-1}\right)^t\nabla_k\left(h^t_j\mu_j\right)\right)^l = \left(\left(h_j^{-1}\right)^t\partial_k\left(h^t_j\mu_j\right)\right)^l = \sum_{\tau} h_j^{\overline{\tau}l}\partial_k\left(\sum_{\nu} h_{j\,\nu\overline{\tau}}\mu^{\nu}_j\right),
$$

wobei wir verwendet haben, dass ∇_k hier komponentenweise auf $(0,q)$-Formen auf $U_j \times V$ angewendet wird und aus diesem Grund mit der gewöhnlichen Ableitung ∂_k übereinstimmt. Wir erhalten damit für die Komponenten $\left(\nabla_k \mu|_{s_0}\right)^l_j$ der eingeschränkten Form $\nabla_k \mu|_{s_0}$ auf U_j

$$\left(\nabla_k \mu|_{s_0}\right)^l_j = \frac{1}{q!} \sum_\beta \sum_\tau h_j^{\overline{\tau} l}(s_0) \left.\frac{\partial}{\partial s^k}\right|_{s_0} \left(\sum_\nu h_{j\,\nu\overline{\tau}}(t) \mu^\nu_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}}(t) \right) dz_j^{\overline{\beta_1}} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\beta_q}}$$

und berechnen:

$$\begin{aligned}
\left((\nabla_k \mu)|_{s_0}, \eta|_{s_0} \right)\big|_{U_j} &= \sum_{\lambda,\mu} h_{j\,\lambda\overline{\mu}}(s_0) \left(\left(\nabla_k \mu|_{s_0}\right)^\lambda_j, \left.\eta^\mu_j\right|_{s_0} \right) \\
&= \frac{1}{q!} \sum_{\lambda,\mu} h_{j\,\lambda\overline{\mu}}(s_0) \sum_{\beta,\gamma} g_j^{\overline{\beta_1}\gamma_1} \cdots g_j^{\overline{\beta_q}\gamma_q} \sum_\tau h_j^{\overline{\tau}\lambda}(s_0) \left.\frac{\partial}{\partial s^k}\right|_{s_0} \left(\sum_\nu h_{j\,\nu\overline{\tau}}(t) \mu^\nu_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}}(t) \right) \overline{\eta^\mu_{j\,\overline{\gamma_1}\ldots\overline{\gamma_q}}(s_0)} \\
&= \frac{1}{q!} \sum_{\mu,\nu} \sum_{\beta,\gamma} g_j^{\overline{\beta_1}\gamma_1} \cdots g_j^{\overline{\beta_q}\gamma_q} \left(\left.\frac{\partial}{\partial s^k}\right|_{s_0} \left(h_{j\,\nu\overline{\mu}}(t) \mu^\nu_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}}(t) \right) \right) \overline{\eta^\mu_{j\,\overline{\gamma_1}\ldots\overline{\gamma_q}}(s_0)} \\
&= R_2.
\end{aligned}$$

Damit ist aber (4.10) für alle Elemente U_j der Überdeckung von X und folglich überhaupt nachgewiesen. □

Korollar 4.28. *In der Situation aus obiger Proposition gilt ferner auf V:*

$$\frac{\partial}{\partial s^{\overline{k}}} \langle \mu, \eta \rangle = \left\langle \nabla_{\overline{k}} \mu, \eta \right\rangle + \langle \mu, \nabla_k \eta \rangle .$$

Die in folgendem Lemma zusammengefasste Konstruktion spielt in unserer weiteren Rechnung mehrfach eine wichtige Rolle. Die Aussage ist im Wesentlichen, dass die kovariante Ableitung einer geschlossenen Form in eine Richtung des Parameterraums auf konsistente Weise in eine äußere Ableitung auf den Fasern umgerechnet werden kann.

Lemma 4.29. *Es sei (X,g) eine kompakte Kählermannigfaltigkeit, S eine komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension m und $(F,h) \to X \times S$ eine Familie von hermiteschen, holomorphen Vektorbündeln auf X. Ferner seien eine holomorphe Koordinatenumgebung (V,s) auf S und für $q > 0$ eine $(0,q)$-Form $\mu \in \Gamma\left(X \times V, \mathcal{A}^{0,q}(F)\right)$ auf $X \times V$ mit Werten in F gegeben. Gilt nun $\bar\partial \mu = 0$, dann existiert zu $1 \leqslant l \leqslant m$ jeweils eine Form*

$$F_{\overline{l}}(\mu) \in \Gamma\left(X \times V, \mathcal{A}^{0,q-1}(F)\right),$$

so dass für alle $t \in V$ gilt:

$$\bar\partial\left(\left.F_{\overline{l}}(\mu)\right|_t \right) = \left.\left(\nabla_{\overline{l}} \mu\right)\right|_t .$$

Dabei sei V für die kovariante Ableitung mit der flachen Kählermetrik bezüglich der Koordinaten s und $X \times V$ mit der Produktmetrik ausgestattet.

Beweis. Wir rechnen mit den Notationen aus 3.1 und schreiben die Form μ auf $U_j \times V$ in der Gestalt $\mu_j = (\mu_j^1, \ldots, \mu_j^r)^t$. Genauer schreiben wir für $1 \leqslant \zeta \leqslant r$:

$$\mu_j^\zeta = \frac{1}{q!} \sum_\beta \mu^\zeta_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}} dz_j^{\overline{\beta_1}} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\beta_q}} + \frac{1}{(q-1)!} \sum_{\beta,k} \mu^\zeta_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}\,\overline{k}} dz_j^{\overline{\beta_1}} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\beta_{q-1}}} \wedge ds^{\overline{k}}$$
$$+ \text{ Summanden mit mehr als einem } d\overline{s}\text{-Faktor.}$$

Da das Vektorbündel F holomorph ist, ergibt sich für die kovariante Ableitung $\nabla_{\overline{l}}\mu$ lokal auf $U_j \times V$ die Darstellung $(\nabla_{\overline{l}}\mu_j^1, \ldots, \nabla_{\overline{l}}\mu_j^r)^t$ und da wir V ferner mit der flachen Kählermetrik bezüglich der Koordinaten s ausgestattet haben, berechnen wir für $1 \leqslant \zeta \leqslant r$:

$$\nabla_{\overline{l}}\mu_j^\zeta = \frac{1}{q!} \sum_\beta \partial_{\overline{l}}\mu^\zeta_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}} dz_j^{\overline{\beta_1}} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\beta_q}} + \frac{1}{(q-1)!} \sum_{\beta,k} \partial_{\overline{l}}\mu^\zeta_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}\,\overline{k}} dz_j^{\overline{\beta_1}} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\beta_{q-1}}} \wedge ds^{\overline{k}}$$
$$+ \text{ Summanden mit mehr als einem } d\overline{s}\text{-Faktor.}$$

Insbesondere erhalten wir für die eingeschränkte Form $\nabla_{\overline{l}}\mu|_t$ zu einem Punkt $t \in V$ auf U_j:

$$\left(\nabla_{\overline{l}}\mu\big|_t\right)_j = \Big((\nabla_{\overline{l}}\mu_j^1)\big|_t, \ldots, (\nabla_{\overline{l}}\mu_j^r)\big|_t \Big)^t \text{ mit } \nabla_{\overline{l}}\mu_j^\zeta\Big|_t = \frac{1}{q!} \sum_\beta \partial_{\overline{l}}\mu^\zeta_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}}(t) dz_j^{\overline{\beta_1}} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\beta_q}}. \tag{4.11}$$

Wir halten dieses Zwischenergebnis fest und verwenden nun die vorausgesetzte Gleichung $\bar\partial\mu = 0$. Lokal auf $U_j \times V$ ist $\bar\partial\mu$ durch $(\bar\partial\mu)_j = (\bar\partial\mu_j^1, \ldots, \bar\partial\mu_j^r)^t$ gegeben und wir berechnen:

$$\begin{aligned} 0 = \bar\partial\mu_j^\zeta = &\frac{1}{(q+1)!} \sum_\beta \sum_\nu (-1)^{\nu+1} \partial_{\overline{\beta_\nu}} \mu^\zeta_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\widehat{\overline{\beta_\nu}}\ldots\overline{\beta_{q+1}}} dz_j^{\overline{\beta_1}} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\beta_{q+1}}} \\ &+ \frac{1}{q!} \sum_{\beta,k} (-1)^q \partial_{\overline{k}} \mu^\zeta_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}} dz_j^{\overline{\beta_1}} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\beta_q}} \wedge ds^{\overline{k}} \\ &+ \frac{1}{q!} \sum_{\beta,k} \sum_\nu (-1)^{\nu+1} \partial_{\overline{\beta_\nu}} \mu^\zeta_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\widehat{\overline{\beta_\nu}}\ldots\overline{\beta_q}\,\overline{k}} dz_j^{\overline{\beta_1}} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\beta_q}} \wedge ds^{\overline{k}} \\ &+ \text{ Summanden mit mehr als einem } d\overline{s}\text{-Faktor.} \end{aligned}$$

Wir betrachten die mittleren beiden Summanden dieser Gleichung. Da bei allen übrigen Summanden nicht genau ein $d\overline{s}$-Faktor auftritt, erhalten wir aus Gründen der linearen Unabhängigkeit auf $U_j \times V$ die Gleichung

$$\frac{1}{q!} \sum_{\beta,k} \left(\sum_\nu (-1)^{\nu+1} \partial_{\overline{\beta_\nu}} \mu^\zeta_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\widehat{\overline{\beta_\nu}}\ldots\overline{\beta_q}\,\overline{k}} + (-1)^q \partial_{\overline{k}} \mu^\zeta_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}} \right) dz_j^{\overline{\beta_1}} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\beta_q}} \wedge ds^{\overline{k}} = 0 \tag{4.12}$$

und damit insbesondere für das feste l:

$$\frac{1}{q!} \sum_\beta \sum_\nu (-1)^{\nu+1} \partial_{\overline{\beta_\nu}} \mu^\zeta_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\widehat{\overline{\beta_\nu}}\ldots\overline{\beta_q}\,\overline{l}} dz_j^{\overline{\beta_1}} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\beta_q}} = \frac{-1}{q!} \sum_\beta (-1)^q \partial_{\overline{l}} \mu^\zeta_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}} dz_j^{\overline{\beta_1}} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\beta_q}}.$$

Wir definieren nun auf $U_j \times V$ die $(0, q-1)$-Formen

$$\psi_j^\zeta := \frac{1}{(q-1)!} \sum_\beta (-1)^{q+1} \mu^\zeta_{j\,\overline{\beta_1} \ldots \overline{\beta_{q-1}}\,\bar{l}} dz_j^{\overline{\beta_1}} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\beta_{q-1}}} \tag{4.13}$$

und erhalten vermöge $\psi_j = (\psi_j^1, \ldots, \psi_j^r)^t$ eine $(0, q-1)$-Form auf $U_j \times V$ mit Werten in F. Eine leichte Rechnung ergibt, dass sich die ψ_j geeignet transformieren und zu einer bündelwertigen Form $\psi \in \Gamma\left(X \times V, \mathcal{A}^{0,q-1}(F)\right)$ Anlass geben. Aus der eben hergeleiteten Formel sowie (4.11) folgt, dass sich für $t \in V$ die Form $\bar{\partial}(\psi|_t) \in \Gamma\left(X, \mathcal{A}^{0,q}(F_t)\right)$ auf U_j zu

$$\begin{aligned}
\left(\bar{\partial}(\psi|_t)\right)_j^\zeta &= (-1)^{q+1} \frac{1}{q!} \sum_\beta \sum_\nu (-1)^{\nu+1} \partial_{\overline{\beta_\nu}} \mu^\zeta_{j\,\overline{\beta_1} \ldots \widehat{\overline{\beta_\nu}} \ldots \overline{\beta_q}\,\bar{l}}(t) dz_j^{\overline{\beta_1}} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\beta_q}} \\
&= \frac{1}{q!} \sum_\beta \partial_{\bar{l}} \mu^\zeta_{j\,\overline{\beta_1} \ldots \overline{\beta_q}}(t) dz_j^{\overline{\beta_1}} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\beta_q}} \\
&= \left(\nabla_{\bar{l}} \mu_j^\zeta\right)\Big|_t
\end{aligned}$$

berechnet. Wir haben also gezeigt, dass die Gleichung $\bar{\partial}(\psi|_t) = \nabla_{\bar{l}}\mu\big|_t$ für alle $t \in V$ gilt. Damit können wir $F_{\bar{l}}(\mu) := \psi$ setzen und haben die Behauptung nachgewiesen. □

Als eine erste Anwendung dieser Konstruktion können wir folgendes Resultat herleiten:

Proposition 4.30. *Es sei (X, g) eine kompakte Kählermannigfaltigkeit, S eine komplexe Mannigfaltigkeit und $(F, h) \to X \times S$ eine Familie von hermiteschen, holomorphen Vektorbündeln auf X. Ferner seien eine holomorphe Koordinatenumgebung (V, s) auf S und zwei $(0, q)$-Formen $\mu, \eta \in \Gamma\left(X \times V, \mathcal{A}^{0,q}(F)\right)$ auf $X \times V$ mit Werten in F gegeben. Gilt nun $\bar{\partial}\eta = 0$ sowie $\bar{\partial}^*(\mu|_{s_0}) = 0$ für einen Punkt $s_0 \in V$, dann folgt:*

$$\left\langle \mu, \nabla_{\bar{k}}\eta \right\rangle (s_0) = 0.$$

Dabei sei V für die kovariante Ableitung mit der flachen Kählermetrik bezüglich der Koordinaten s und $X \times V$ mit der Produktmetrik ausgestattet.

Beweis. Im Fall $q = 0$ ist η ein differenzierbarer Schnitt von F über $X \times V$. Nach Voraussetzung ist $\bar{\partial}\eta = 0$, so dass η sogar holomorph ist. Da F ein holomorphes Vektorbündel ist, gilt in diesem Fall $\left(\nabla_{\bar{k}}\eta\right)_j^\zeta = \partial_{\bar{k}}\eta_j^\zeta = 0$ und damit $\left\langle \mu, \nabla_{\bar{k}}\eta \right\rangle (s_0) = 0$.

Sei also $q > 0$. Indem wir Lemma 4.29 anwenden, erhalten wir eine Differentialform

$$F_{\bar{k}}(\eta) \in \Gamma\left(X \times V, \mathcal{A}^{0,q-1}(F)\right),$$

welche insbesondere $(\nabla_{\bar{k}}\eta)\big|_{s_0} = \bar{\partial}(F_{\bar{k}}(\eta)\big|_{s_0})$ erfüllt. Damit berechnen wir

$$\left\langle \mu, \nabla_{\bar{k}}\eta \right\rangle (s_0) = \left\langle \mu|_{s_0}, \nabla_{\bar{k}}\eta\big|_{s_0} \right\rangle = \left\langle \mu|_{s_0}, \bar{\partial}\left(F_{\bar{k}}(\eta)\big|_{s_0}\right) \right\rangle = \left\langle \bar{\partial}^*\left(\mu|_{s_0}\right), F_{\bar{k}}(\eta)\big|_{s_0} \right\rangle = 0,$$

wobei wir verwendet haben, dass $\bar{\partial}^*\left(\mu|_{s_0}\right) = 0$ nach Voraussetzung gilt. □

Indem wir alle bislang gezeigten Aussagen einsetzen, erhalten wir folgendes Resultat:

Korollar 4.31. *Es sei (X, g) eine kompakte Kählermannigfaltigkeit, S eine komplexe Mannigfaltigkeit und $(F, h) \to X \times S$ eine Familie von hermiteschen, holomorphen Vektorbündeln auf X. Ferner seien eine holomorphe Koordinatenumgebung (V, s) auf S und zwei $(0, q)$-Formen $\mu, \eta \in \Gamma\left(X \times V, \mathcal{A}^{0,q}(F)\right)$ auf $X \times V$ mit Werten in F gegeben. Gilt nun $\bar{\partial}\eta = 0$ und $\bar{\partial}^*(\mu|_t) = 0$ für jeden Punkt $t \in V$, dann folgt:*

$$\frac{\partial^2}{\partial s^{\bar{l}} \partial s^k} \langle \mu, \eta \rangle = \langle \nabla_k \mu, \nabla_l \eta \rangle + \left\langle \nabla_{\bar{l}} \nabla_k \mu, \eta \right\rangle .$$

Dabei sei V für die kovarianten Ableitungen mit der flachen Kählermetrik bezüglich der Koordinaten s und $X \times V$ mit der Produktmetrik ausgestattet.

Beweis. Zunächst erhalten wir aus Proposition 4.27

$$\frac{\partial}{\partial s^k} \langle \mu, \eta \rangle = \langle \nabla_k \mu, \eta \rangle + \left\langle \mu, \nabla_{\bar{k}} \eta \right\rangle = \langle \nabla_k \mu, \eta \rangle ,$$

wobei wir in der letzten Umformung außerdem verwendet haben, dass unter den gegebenen Voraussetzungen $\left\langle \mu, \nabla_{\bar{k}} \eta \right\rangle$ gemäß Proposition 4.30 in allen Punkten $t \in V$ verschwindet. Wenden wir schließlich Korollar 4.28 an, dann erhalten wir:

$$\frac{\partial^2}{\partial s^{\bar{l}} \partial s^k} \langle \mu, \eta \rangle = \frac{\partial}{\partial s^{\bar{l}}} \langle \nabla_k \mu, \eta \rangle = \langle \nabla_k \mu, \nabla_l \eta \rangle + \left\langle \nabla_{\bar{l}} \nabla_k \mu, \eta \right\rangle .$$

□

Für unsere Berechnung spielt die Anwendung der Operatoren $\bar{\partial}$ sowie $\bar{\partial}^*$ der Fasern auf Differentialformen der Gestalt $\left.(\nabla_k \mu)\right|_{s_0}$ für bündelwertige $(0, q)$-Formen μ eine große Rolle. Aus diesem Grund berechnen wir sie in den folgenden beiden Propositionen unter geeigneten Voraussetzungen.

Proposition 4.32. *Es sei (X, g) eine kompakte Kählermannigfaltigkeit, S eine komplexe Mannigfaltigkeit und $(F, h) \to X \times S$ eine Familie von hermiteschen, holomorphen Vektorbündeln auf X. Ferner seien eine holomorphe Koordinatenumgebung (V, s) auf S und eine $(0, q)$-Form $\mu \in \Gamma\left(X \times V, \mathcal{A}^{0,q}(F)\right)$ auf $X \times V$ mit Werten in F gegeben. Gilt nun $\bar{\partial}^*(\mu|_t) = 0$ für alle $t \in V$, dann folgt für jeden Punkt $s_0 \in V$:*

$$\bar{\partial}^*\left(\left.(\nabla_k \mu)\right|_{s_0}\right) = 0.$$

Dabei sei V für die kovariante Ableitung mit der flachen Kählermetrik bezüglich der Koordinaten s und $X \times V$ mit der Produktmetrik ausgestattet.

Beweis. Wir arbeiten mit den Notationen aus 3.1 und zeigen vorab, dass für alle Indizes auf $U_j \times V$ die Gleichung

$$\partial_k \Gamma^{\zeta}_{j\,\alpha\nu} + \sum_{\lambda} \Gamma^{\zeta}_{j\,k\lambda} \Gamma^{\lambda}_{j\,\alpha\nu} = \partial_\alpha \Gamma^{\zeta}_{j\,k\nu} + \sum_{\lambda} \Gamma^{\zeta}_{j\,\alpha\lambda} \Gamma^{\lambda}_{jk\nu} \tag{4.14}$$

gilt. Dazu berechnen wir lediglich unter Verwendung der entsprechenden Definitionen:

$$\begin{aligned}\partial_k \Gamma^{\zeta}_{j\,\alpha\nu} &= \partial_k \sum_{\tau} h_j^{\overline{\tau}\zeta} \partial_\alpha h_{j\,\nu\overline{\tau}} = \sum_{\tau} \left(\partial_k h_j^{\overline{\tau}\zeta}\right)(\partial_\alpha h_{j\,\nu\overline{\tau}}) + \sum_{\tau} h_j^{\overline{\tau}\zeta} \partial_k \partial_\alpha h_{j\,\nu\overline{\tau}} \\ &= -\sum_{\tau}\sum_{\lambda,\varepsilon} h_j^{\overline{\tau}\lambda}(\partial_k h_{j\,\lambda\overline{\varepsilon}}) h_j^{\overline{\varepsilon}\zeta}(\partial_\alpha h_{j\,\nu\overline{\tau}}) + \sum_{\tau} h_j^{\overline{\tau}\zeta}\partial_k\partial_\alpha h_{j\,\nu\overline{\tau}} \\ &= -\sum_{\lambda} \Gamma^{\lambda}_{j\,\alpha\nu}\Gamma^{\zeta}_{j\,k\lambda} + \sum_{\tau} h_j^{\overline{\tau}\zeta}\partial_k\partial_\alpha h_{j\,\nu\overline{\tau}}.\end{aligned}$$

Durch Umformen ist hiermit die Gleichung

$$\partial_k \Gamma^{\zeta}_{j\,\alpha\nu} + \sum_{\lambda} \Gamma^{\zeta}_{j\,k\lambda}\Gamma^{\lambda}_{j\,\alpha\nu} = \sum_{\tau} h_j^{\overline{\tau}\zeta}\partial_k\partial_\alpha h_{j\,\nu\overline{\tau}}$$

gezeigt. Eine völlig analoge Rechnung mit vertauschten α und k ergibt aber andererseits

$$\partial_\alpha \Gamma^{\zeta}_{j\,k\nu} + \sum_{\lambda} \Gamma^{\zeta}_{j\,\alpha\lambda}\Gamma^{\lambda}_{jk\nu} = \sum_{\tau} h_j^{\overline{\tau}\zeta}\partial_\alpha\partial_k h_{j\,\nu\overline{\tau}},$$

so dass die behauptete Identität (4.14) wegen des Lemmas von Schwarz richtig ist.

Wir schreiben nun μ lokal auf $U_j \times V$ in der Gestalt $\mu_j = (\mu_j^1, \ldots, \mu_j^r)^t$ mit

$$\mu_j^\zeta = \frac{1}{q!} \sum_{\beta} \mu^{\zeta}_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}} dw_j^{\overline{\beta_1}} \wedge \ldots \wedge dw_j^{\overline{\beta_q}}.$$

Für jeden Punkt $t \in V$ ist nach Voraussetzung $\bar{\partial}^*(\mu|_t) = 0$. Da diese eingeschränkten Formen auf U_j durch $(\mu|_t)_j = (\mu_j^1|_t, \ldots, \mu_j^r|_t)^t$ mit

$$\mu_j^\zeta\Big|_t = \frac{1}{q!} \sum_{\beta} \mu^{\zeta}_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}}(t) dz_j^{\overline{\beta_1}} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\beta_q}}$$

gegeben sind, berechnen wir $\phi(t) := \bar{\partial}^*(\mu|_t) = 0$ lokal auf U_j mit $\phi(t)_j = (\phi(t)_j^1, \ldots, \phi(t)_j^r)^t$ zu

$$\phi(t)_j^\zeta = \frac{1}{(q-1)!} \sum_{\beta} \phi^{\zeta}_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}}(t) dz_j^{\overline{\beta_1}} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\beta_{q-1}}},$$

wobei wir den Punkt t in der Definition von ϕ explizit notieren, da wir diese Formen später nicht nur für einen festen Punkt t benötigen. Da $\phi(t) = 0$ gilt, verschwinden die schiefsymmetrischen Koeffizienten allesamt und gemäß Satz 2.15 folgt für alle $t \in V$:

$$\begin{aligned}0 = \phi^{\zeta}_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}}(t) &= -\sum_{\beta,\gamma} g_j^{\overline{\beta}\gamma} \left(\nabla_\gamma \mu^{\zeta}_{j\,\overline{\beta}\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}}(t) + \sum_{\nu} \Gamma^{\zeta}_{j\,\gamma\nu}(t)\mu^{\nu}_{j\,\overline{\beta}\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}}(t)\right) \\ &= -\sum_{\beta,\gamma} g_j^{\overline{\beta}\gamma} \left(\partial_\gamma \mu^{\zeta}_{j\,\overline{\beta}\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}}(t) + \sum_{\nu} \Gamma^{\zeta}_{j\,\gamma\nu}(t)\mu^{\nu}_{j\,\overline{\beta}\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}}(t)\right). \qquad (4.15)\end{aligned}$$

Nach dieser Vorarbeit kommen wir nun zum eigentlichen Argument. Es wird $\nabla_k\mu$ lokal durch $(\nabla_k\mu)_j = ((\nabla_k\mu)_j^1, \ldots, (\nabla_k\mu)_j^r)^t$ beschrieben mit

$$\begin{aligned}(\nabla_k\mu)_j^\zeta &= \left(\left(h_j^{-1}\right)^t \nabla_k\left(h_j^t\mu_j\right)\right)^\zeta = \sum_\tau h_j^{\overline{\tau}\zeta}\partial_k\left(\sum_\nu h_{j\,\nu\overline{\tau}}\mu_j^\nu\right)\\ &= \sum_{\tau,\nu} h_j^{\overline{\tau}\zeta} h_{j\,\nu\overline{\tau}}\partial_k\mu_j^\nu + \sum_{\tau,\nu} h_j^{\overline{\tau}\zeta}\left(\partial_k h_{j\,\nu\overline{\tau}}\right)\mu_j^\nu = \partial_k\mu_j^\zeta + \sum_\nu \Gamma^\zeta_{j\,k\nu}\mu_j^\nu,\end{aligned}$$

also ist, indem wir $\eta := \nabla_k\mu$ definieren,

$$(\nabla_k\mu)_j^\zeta = \frac{1}{q!}\sum_\beta \eta^\zeta_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}} dw_j^{\overline{\beta_1}}\wedge\ldots\wedge dw_j^{\overline{\beta_q}} \quad \text{mit} \quad \eta^\zeta_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}} = \partial_k\mu^\zeta_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}} + \sum_\nu \Gamma^\zeta_{j\,k\nu}\mu^\nu_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}}. \tag{4.16}$$

Folglich erhalten wir auf U_j für die auf die Faser zu unserem festen Punkt $s_0 \in V$ eingeschränkte Form $\nabla_k\mu|_{s_0}$ lokal $(\nabla_k\mu|_{s_0})_j = ((\nabla_k\mu)_j^1|_{s_0}, \ldots, (\nabla_k\mu)_j^r|_{s_0})^t$ mit:

$$(\nabla_k\mu)_j^\zeta\Big|_{s_0} = \frac{1}{q!}\sum_\beta\left(\partial_k\mu^\zeta_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}}(s_0) + \sum_\nu \Gamma^\zeta_{j\,k\nu}(s_0)\mu^\nu_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}}(s_0)\right) dz_j^{\overline{\beta_1}}\wedge\ldots\wedge dz_j^{\overline{\beta_q}}.$$

Damit berechnen wir $\psi := \bar\partial^*(\nabla_k\mu|_{s_0}) \in \Gamma\left(X, \mathcal{A}^{0,q-1}(F_{s_0})\right)$ lokal auf U_j zu $\psi_j = (\psi_j^1, \ldots \psi_j^r)^t$ mit

$$\psi_j^\zeta = \frac{1}{(q-1)!}\sum_\beta \psi^\zeta_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}} dz_j^{\overline{\beta_1}}\wedge\ldots\wedge dz_j^{\overline{\beta_{q-1}}},$$

wobei wir gemäß Satz 2.15 für die schiefsymmetrischen Koeffizienten erhalten:

$$\begin{aligned}\psi^\zeta_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}} &= -\sum_{\beta,\gamma} g_j^{\overline{\beta}\gamma}\left(\nabla_\gamma\eta^\zeta_{j\,\overline{\beta}\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}}(s_0) + \sum_\nu \Gamma^\zeta_{j\,\gamma\nu}(s_0)\eta^\nu_{j\,\overline{\beta}\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}}(s_0)\right)\\
&= -\sum_{\beta,\gamma} g_j^{\overline{\beta}\gamma}\Bigg(\partial_\gamma\left(\partial_k\mu^\zeta_{j\,\overline{\beta}\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}}(s_0) + \sum_\lambda \Gamma^\zeta_{j\,k\lambda}(s_0)\mu^\lambda_{j\,\overline{\beta}\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}}(s_0)\right)\\
&\qquad + \sum_\nu \Gamma^\zeta_{j\,\gamma\nu}(s_0)\left(\partial_k\mu^\nu_{j\,\overline{\beta}\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}}(s_0) + \sum_\lambda \Gamma^\nu_{j\,k\lambda}(s_0)\mu^\lambda_{j\,\overline{\beta}\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}}(s_0)\right)\Bigg)\\
&= -\sum_{\beta,\gamma} g_j^{\overline{\beta}\gamma}\Bigg(\partial_\gamma\partial_k\mu^\zeta_{j\,\overline{\beta}\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}}(s_0) + \sum_\lambda\left(\partial_\gamma\Gamma^\zeta_{j\,k\lambda}(s_0)\right)\mu^\lambda_{j\,\overline{\beta}\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}}(s_0)\\
&\qquad + \sum_\lambda \Gamma^\zeta_{j\,k\lambda}(s_0)\partial_\gamma\mu^\lambda_{j\,\overline{\beta}\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}}(s_0) + \sum_\nu \Gamma^\zeta_{j\,\gamma\nu}(s_0)\partial_k\mu^\nu_{j\,\overline{\beta}\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}}(s_0)\\
&\qquad + \sum_\nu\sum_\lambda \Gamma^\zeta_{j\,\gamma\nu}(s_0)\Gamma^\nu_{j\,k\lambda}(s_0)\mu^\lambda_{j\,\overline{\beta}\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}}(s_0)\Bigg)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\sum_{\beta,\gamma} g_j^{\overline{\beta}\gamma} \Bigg(\partial_k \partial_\gamma \mu^\zeta_{j\,\overline{\beta\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}}(s_0) + \sum_\lambda \Bigg(\partial_\gamma \Gamma^\zeta_{j\,k\lambda}(s_0) + \sum_\nu \Gamma^\zeta_{j\,\gamma\nu}(s_0) \Gamma^\nu_{j\,k\lambda}(s_0) \Bigg) \mu^\lambda_{j\,\overline{\beta\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}}(s_0) \\
&\qquad + \sum_\lambda \Gamma^\zeta_{j\,k\lambda}(s_0) \partial_\gamma \mu^\lambda_{j\,\overline{\beta\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}}(s_0) + \sum_\lambda \Gamma^\zeta_{j\,\gamma\lambda}(s_0) \partial_k \mu^\lambda_{j\,\overline{\beta\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}}(s_0) \Bigg) \\
&\overset{(4.14)}{=} -\sum_{\beta,\gamma} g_j^{\overline{\beta}\gamma} \Bigg(\partial_k \partial_\gamma \mu^\zeta_{j\,\overline{\beta\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}}(s_0) + \sum_\lambda \Bigg(\partial_k \Gamma^\zeta_{j\,\gamma\lambda}(s_0) + \sum_\nu \Gamma^\zeta_{j\,k\nu}(s_0) \Gamma^\nu_{j\,\gamma\lambda}(s_0) \Bigg) \mu^\lambda_{j\,\overline{\beta\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}}(s_0) \\
&\qquad + \sum_\lambda \Gamma^\zeta_{j\,k\lambda}(s_0) \partial_\gamma \mu^\lambda_{j\,\overline{\beta\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}}(s_0) + \sum_\lambda \Gamma^\zeta_{j\,\gamma\lambda}(s_0) \partial_k \mu^\lambda_{j\,\overline{\beta\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}}(s_0) \Bigg) \\
&= -\sum_{\beta,\gamma} g_j^{\overline{\beta}\gamma} \Bigg(\partial_k \partial_\gamma \mu^\zeta_{j\,\overline{\beta\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}}(s_0) + \sum_\lambda \left(\partial_k \Gamma^\zeta_{j\,\gamma\lambda}(s_0) \right) \mu^\lambda_{j\,\overline{\beta\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}}(s_0) \\
&\qquad + \sum_\lambda \sum_\nu \Gamma^\zeta_{j\,k\nu}(s_0) \Gamma^\nu_{j\,\gamma\lambda}(s_0) \mu^\lambda_{j\,\overline{\beta\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}}(s_0) + \sum_\nu \Gamma^\zeta_{j\,k\nu}(s_0) \partial_\gamma \mu^\nu_{j\,\overline{\beta\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}}(s_0) \\
&\qquad + \sum_\lambda \Gamma^\zeta_{j\,\gamma\lambda}(s_0) \partial_k \mu^\lambda_{j\,\overline{\beta\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}}(s_0) \Bigg) \\
&= \partial_k|_{s_0} \left(-\sum_{\beta,\gamma} g_j^{\overline{\beta}\gamma} \left(\partial_\gamma \mu^\zeta_{j\,\overline{\beta\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}}(t) + \sum_\lambda \Gamma^\zeta_{j\,\gamma\lambda}(t) \mu^\lambda_{j\,\overline{\beta\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}}(t) \right) \right) \\
&\qquad + \sum_\nu \Gamma^\zeta_{j\,k\nu}(s_0) \left(-\sum_{\beta,\gamma} g_j^{\overline{\beta}\gamma} \left(\partial_\gamma \mu^\nu_{j\,\overline{\beta\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}}(s_0) + \sum_\lambda \Gamma^\nu_{j\,\gamma\lambda}(s_0) \mu^\lambda_{j\,\overline{\beta\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}}(s_0) \right) \right) \\
&\overset{(4.15)}{=} \partial_k|_{s_0} \left(\phi^\zeta_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}}(t) \right) + \sum_\nu \Gamma^\zeta_{j\,k\nu}(s_0) \phi^\nu_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}}(s_0) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Die letzte Gleichheit folgt dabei unter erneuter Anwendung von (4.15) für alle $t \in V$. Damit haben wir gezeigt, dass $\bar{\partial}^*(\nabla_k \mu|_{s_0}) = \psi = 0$ gilt, also ist alles gezeigt. □

Bevor wir die entsprechende Rechnung für den $\bar{\partial}$-Operator auf der Faser durchführen können, müssen wir zunächst wieder einige Notationen vereinbaren. Sei dazu $E \to M$ ein holomorphes Vektorbündel auf einer komplexen Mannigfaltigkeit M sowie $A \in \Gamma\left(M, \mathcal{A}^{p,q}\left(\mathrm{End}(E)\right)\right)$ eine endomorphismenbündelwertige (p,q)-Form. Dann erhalten wir einen Operator

$$A \cap : \Gamma\left(M, \mathcal{A}^{r,s}(E)\right) \longrightarrow \Gamma\left(M, \mathcal{A}^{p+r,q+s}(E)\right), \qquad \psi \longmapsto A \cap \psi,$$

indem wir den Endomorphismus auf den Bündelanteil anwenden und die Formenanteile multiplizieren. Genauer definieren wir lokal

$$(A \cap \psi)^\zeta_j := \sum_\tau A^\zeta_{j\,\tau} \wedge \psi^\tau_j$$

auf einem Element U_j aus einer offenen Überdeckung von M durch Umgebungen, über denen E trivialisiert werden kann. Ist ferner M kompakt mit einer hermiteschen Metrik g sowie h eine hermitesche Metrik auf E, dann können wir den zu $A\cap$ formal adjungierten Operator

$$A\cup : \Gamma\left(M, \mathcal{A}^{p+r,q+s}(E)\right) \longrightarrow \Gamma\left(M, \mathcal{A}^{r,s}(E)\right), \qquad \psi \longmapsto A\cup\psi$$

betrachten, d.h. es gilt für alle $\eta \in \Gamma\left(M, \mathcal{A}^{r,s}(E)\right)$ und $\psi \in \Gamma\left(M, \mathcal{A}^{p+r,q+s}(E)\right)$:

$$\langle A\cap\eta, \psi\rangle = \langle \eta, A\cup\psi\rangle .$$

Mit diesen Operatoren und den Objekten ρ_k aus Abschnitt 3.5 erhalten wir folgendes Ergebnis:

Proposition 4.33. *Es sei (X,g) eine kompakte Kählermannigfaltigkeit, S eine komplexe Mannigfaltigkeit und $(F,h) \to X\times S$ eine Familie von hermiteschen, holomorphen Vektorbündeln auf X. Ferner seien eine holomorphe Koordinatenumgebung (V,s) auf S und eine $(0,q)$-Form $\mu \in \Gamma\left(X\times V, \mathcal{A}^{0,q}(F)\right)$ auf $X\times V$ mit Werten in F gegeben. Gilt nun $\bar\partial\left(\mu|_t\right) = 0$ für alle $t\in V$, dann folgt für jeden Punkt $s_0 \in S$:*

$$\bar\partial\left((\nabla_k\mu)|_{s_0}\right) = -\, \rho_k|_{s_0} \cap \mu|_{s_0} .$$

Dabei sei V für die kovariante Ableitung mit der flachen Kählermetrik bezüglich der Koordinaten s und $X\times V$ mit der Produktmetrik ausgestattet.

Beweis. Wir verwenden die Notationen aus 3.1 und schreiben μ auf $U_j\times V$ als $\mu_j = (\mu_j^1, \ldots, \mu_j^r)^t$ mit

$$\mu_j^\zeta = \frac{1}{q!}\sum_\beta \mu^\zeta_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}} dw_j^{\overline{\beta_1}} \wedge \ldots \wedge dw_j^{\overline{\beta_q}}.$$

Zunächst berechnen wir eine lokale Formel für $\bar\partial(\nabla_k\mu|_{s_0})$. Dazu beschreiben wir $\eta := \nabla_k\mu$ lokal durch $(\nabla_k\mu)_j = ((\nabla_k\mu)_j^1, \ldots, (\nabla_k\mu)_j^r)^t$ und wie im Beweis von Proposition 4.32 folgt für die schiefsymmetrischen Koeffizienten (vergleiche Formel (4.16))

$$(\nabla_k\mu)_j^\zeta = \frac{1}{q!}\sum_\beta \eta^\zeta_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}} dw_j^{\overline{\beta_1}} \wedge \ldots \wedge dw_j^{\overline{\beta_q}} \quad \text{mit} \quad \eta^\zeta_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}} = \partial_k \mu^\zeta_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}} + \sum_\nu \Gamma^\zeta_{j\,k\nu}\mu^\nu_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}}.$$

Wir erhalten für die eingeschränkte Form $\nabla_k\mu|_{s_0}$ lokal $(\nabla_k\mu|_{s_0})_j = ((\nabla_k\mu)_j^1|_{s_0}, \ldots, (\nabla_k\mu)_j^r|_{s_0})^t$ und mit obiger Formel gilt genauer

$$(\nabla_k\mu)_j^\zeta\Big|_{s_0} = \frac{1}{q!}\sum_\beta \eta^\zeta_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}}(s_0) dz_j^{\overline{\beta_1}} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\beta_q}}.$$

Damit berechnen wir $\bar\partial(\nabla_k\mu|_{s_0})$ lokal auf U_j

$$\left(\bar\partial\left(\nabla_k\mu|_{s_0}\right)\right)_j^\zeta = \frac{1}{(q+1)!}\sum_\beta \underbrace{\sum_\nu (-1)^{\nu+1}\partial_{\overline{\beta_\nu}}\eta^\zeta_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\widehat{\overline{\beta_\nu}}\ldots\overline{\beta_{q+1}}}(s_0)}_{=\left(\bar\partial\left(\nabla_k\mu|_{s_0}\right)\right)^\zeta_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q+1}}}} dz_j^{\overline{\beta_1}} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\beta_{q+1}}}$$

und erhalten durch umformen der schiefsymmetrischen Koeffizienten:

$$
\begin{aligned}
\left(\bar\partial\left(\nabla_k\mu|_{s_0}\right)\right)^{\zeta}_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q+1}}} &= \sum_\nu (-1)^{\nu+1}\partial_{\overline{\beta_\nu}}\left(\partial_k\mu^{\zeta}_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\widehat{\overline{\beta_\nu}}\ldots\overline{\beta_{q+1}}}(s_0)+\sum_\lambda \Gamma^{\zeta}_{j\,k\lambda}(s_0)\mu^{\lambda}_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\widehat{\overline{\beta_\nu}}\ldots\overline{\beta_{q+1}}}(s_0)\right)\\
&= \sum_\nu(-1)^{\nu+1}\left(\partial_k\partial_{\overline{\beta_\nu}}\mu^{\zeta}_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\widehat{\overline{\beta_\nu}}\ldots\overline{\beta_{q+1}}}(s_0)+\sum_\lambda\Gamma^{\zeta}_{j\,k\lambda}(s_0)\partial_{\overline{\beta_\nu}}\mu^{\lambda}_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\widehat{\overline{\beta_\nu}}\ldots\overline{\beta_{q+1}}}(s_0)\right)\\
&\quad+\sum_\nu(-1)^{\nu+1}\sum_\lambda\left(\partial_{\overline{\beta_\nu}}\Gamma^{\zeta}_{j\,k\lambda}(s_0)\right)\mu^{\lambda}_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\widehat{\overline{\beta_\nu}}\ldots\overline{\beta_{q+1}}}(s_0)\\
&= \partial_k|_{s_0}\left(\sum_\nu(-1)^{\nu+1}\partial_{\overline{\beta_\nu}}\mu^{\zeta}_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\widehat{\overline{\beta_\nu}}\ldots\overline{\beta_{q+1}}}(t)\right)+\sum_\lambda\Gamma^{\zeta}_{j\,k\lambda}(s_0)\left(\sum_\nu(-1)^{\nu+1}\partial_{\overline{\beta_\nu}}\mu^{\lambda}_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\widehat{\overline{\beta_\nu}}\ldots\overline{\beta_{q+1}}}(s_0)\right)\\
&\quad+\sum_\nu(-1)^{\nu+1}\sum_\lambda\left(\partial_{\overline{\beta_\nu}}\Gamma^{\zeta}_{j\,k\lambda}(s_0)\right)\mu^{\lambda}_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\widehat{\overline{\beta_\nu}}\ldots\overline{\beta_{q+1}}}(s_0).
\end{aligned}
$$

Ist nun $t\in V$ ein Punkt, dann gilt nach Voraussetzung $\bar\partial\left(\mu|_t\right)=0$. Lokal bedeutet dies

$$
0=\bar\partial\left(\mu^{\zeta}_j\Big|_t\right)=\frac{1}{(q+1)!}\sum_\beta\sum_\nu(-1)^{\nu+1}\partial_{\overline{\beta_\nu}}\mu^{\zeta}_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\widehat{\overline{\beta_\nu}}\ldots\overline{\beta_{q+1}}}(t)dz_j^{\overline{\beta_1}}\wedge\ldots\wedge dz_j^{\overline{\beta_{q+1}}},
$$

also folgt für alle Indizes und alle t:

$$
\sum_\nu(-1)^{\nu+1}\partial_{\overline{\beta_\nu}}\mu^{\zeta}_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\widehat{\overline{\beta_\nu}}\ldots\overline{\beta_{q+1}}}(t)=0.
$$

Damit vereinfacht sich die eben ausgerechnete Formel für die schiefsymmetrischen Koeffizienten wesentlich und wir erhalten die Gleichung:

$$
\left(\bar\partial\left(\nabla_k\mu|_{s_0}\right)\right)^{\zeta}_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q+1}}}=\sum_\nu(-1)^{\nu+1}\sum_\lambda\left(\partial_{\overline{\beta_\nu}}\Gamma^{\zeta}_{j\,k\lambda}(s_0)\right)\mu^{\lambda}_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\widehat{\overline{\beta_\nu}}\ldots\overline{\beta_{q+1}}}(s_0). \tag{4.17}
$$

Nun berechnen wir $\rho_k|_{s_0}\cap\mu|_{s_0}$. Zunächst ist $\rho_k|_{s_0}$ gemäß der Definition aus Abschnitt 3.5 lokal auf U_j durch

$$
\left(\rho_k|_{s_0}\right)_j=\left(\sum_\beta R^{\rho}_{j\,\sigma k\overline{\beta}}(s_0)dz_j^{\overline{\beta}}\right)_{\rho,\sigma}
$$

gegeben. Indem wir die Formel (4.17) einsetzen, können wir hiermit berechnen:

$$
\begin{aligned}
\left(\rho_k|_{s_0}\cap\mu|_{s_0}\right)^{\zeta}_j &= \sum_\lambda\left(\sum_\beta R^{\zeta}_{j\,\lambda k\overline{\beta}}(s_0)dz_j^{\overline{\beta}}\right)\wedge\left(\frac{1}{q!}\sum_\beta\mu^{\lambda}_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}}(s_0)dz_j^{\overline{\beta_1}}\wedge\ldots\wedge dz_j^{\overline{\beta_q}}\right)\\
&= \frac{1}{(q+1)!}\sum_\beta\sum_\nu(-1)^{\nu+1}\sum_\lambda R^{\zeta}_{j\,\lambda k\overline{\beta_\nu}}(s_0)\mu^{\lambda}_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\widehat{\overline{\beta_\nu}}\ldots\overline{\beta_{q+1}}}(s_0)dz_j^{\overline{\beta_1}}\wedge\ldots\wedge dz_j^{\overline{\beta_{q+1}}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{(q+1)!} \sum_{\beta} \sum_{\nu} (-1)^{\nu+1} \sum_{\lambda} \left(\partial_{\overline{\beta_\nu}} \Gamma^{\zeta}_{j\,k\lambda}(s_0) \right) \mu^{\lambda}_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\widehat{\overline{\beta_\nu}}\ldots\overline{\beta_{q+1}}}(s_0) dz_j^{\overline{\beta_1}} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\beta_{q+1}}} \\
&= -\frac{1}{(q+1)!} \sum_{\beta} \left(\bar\partial \left(\nabla_k \mu|_{s_0} \right) \right)^{\zeta}_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q+1}}} dz_j^{\overline{\beta_1}} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\beta_{q+1}}} \\
&= \; - \left(\bar\partial \left(\nabla_k \mu|_{s_0} \right) \right)^{\zeta}_{j}.
\end{aligned}
$$

Also haben wir wie behauptet $\rho_k|_{s_0} \cap \mu|_{s_0} = -\bar\partial \left(\nabla_k \mu|_{s_0} \right)$ gezeigt. $\square$

Die von uns konstruierten Formen ξ_i sind $\bar\partial$-geschlossen und für jeden Punkt $t \in V$ ist

$$\xi_i \in \mathcal{H}^{0,q}(X, F_t, h_t)$$

harmonisch. Insbesondere gilt für alle $t \in V$ sowohl $\bar\partial \left(\xi_i|_t \right) = 0$ als auch $\bar\partial^* \left(\xi_i|_t \right) = 0$. Wir können also Korollar 4.31 auf die Formel (4.8) über die Krümmung der L_2-Metrik auf der höheren direkten Bildgarbe im Punkt s_0 anwenden und erhalten:

$$R^{\rho}_{L_2\,\sigma k \bar l}(s_0) = -\partial_{\bar l} \partial_k \left\langle \xi_\rho, \xi_\sigma \right\rangle (s_0) = -\Big(\underbrace{\left\langle \nabla_k \xi_\rho, \nabla_l \xi_\sigma \right\rangle (s_0)}_{=:S_1} + \underbrace{\left\langle \nabla_{\bar l} \nabla_k \xi_\rho, \xi_\sigma \right\rangle (s_0)}_{=:S_2} \Big). \tag{4.18}$$

Wir verwenden nun die bislang bereitgestellten Resultate und berechnen den ersten Summanden S_1. Zunächst folgt wie im Beweis von Korollar 4.31 aus den Propositionen 4.27 und 4.30 auf ganz W:

$$\frac{\partial}{\partial s^k} \left\langle \xi_\rho, \xi_\sigma \right\rangle = \left\langle \nabla_k \xi_\rho, \xi_\sigma \right\rangle + \left\langle \xi_\rho, \nabla_{\bar k} \xi_\sigma \right\rangle = \left\langle \nabla_k \xi_\rho, \xi_\sigma \right\rangle.$$

Speziell im Punkt s_0 liefern also die Eigenschaften (4.6) der Normalkoordinaten:

$$\left\langle \nabla_k \xi_\rho|_{s_0}, \xi_\sigma|_{s_0} \right\rangle = \left\langle \nabla_k \xi_\rho, \xi_\sigma \right\rangle (s_0) = \left. \frac{\partial}{\partial s^k} \right|_{s_0} \left\langle \xi_\rho, \xi_\sigma \right\rangle = \left. \frac{\partial}{\partial s^k} \right|_{s_0} H_{\rho\bar\sigma} = 0.$$

Wir erhalten hieraus und mit (4.9) für alle Indizes k und ρ:

$$\nabla_k \xi_\rho|_{s_0} \perp \left\langle \xi_1|_{s_0}, \ldots, \xi_R|_{s_0} \right\rangle_{\mathbb{C}} = \mathcal{H}^{0,q}(X, F_{s_0}, h_{s_0}) \subset \Gamma \left(X, \mathcal{A}^{0,q} \left(F_{s_0} \right) \right).$$

Da die Hodge-Zerlegung aus Theorem 2.14 orthogonal ist, enthält also $\nabla_k \xi_\rho|_{s_0}$ keine harmonischen Bestandteile, so dass wir gezeigt haben:

$$H_{s_0} \left(\nabla_k \xi_\rho|_{s_0} \right) = 0.$$

Aus der Identität $H_{s_0} + \Box_{\bar\partial} \circ G_{s_0} = \mathrm{id}$ (vergleiche Abschnitt 2.4) folgt nun, da der Green-Operator mit $\bar\partial$ und $\bar\partial^*$ kommutiert:

$$
\begin{aligned}
\nabla_k \xi_\rho|_{s_0} &= H_{s_0} \left(\nabla_k \xi_\rho|_{s_0} \right) + \Box_{\bar\partial} \circ G_{s_0} \left(\nabla_k \xi_\rho|_{s_0} \right) = \left(\bar\partial \bar\partial^* + \bar\partial^* \bar\partial \right) G_{s_0} \left(\nabla_k \xi_\rho|_{s_0} \right) \\
&= G_{s_0} \left(\left(\bar\partial \bar\partial^* + \bar\partial^* \bar\partial \right) \nabla_k \xi_\rho|_{s_0} \right) = G_{s_0} \left(\bar\partial \bar\partial^* \left(\nabla_k \xi_\rho|_{s_0} \right) + \bar\partial^* \bar\partial \left(\nabla_k \xi_\rho|_{s_0} \right) \right).
\end{aligned}
$$

Da wir aus Proposition 4.32 ferner $\bar{\partial}^*(\nabla_k \xi_\rho|_{s_0}) = 0$ erhalten, folgt weiter:

$$\nabla_k \xi_\rho|_{s_0} = G_{s_0}\left(\bar{\partial}^*\bar{\partial}\left(\nabla_k \xi_\rho|_{s_0}\right)\right) = \bar{\partial}^* G_{s_0}\bar{\partial}\left(\nabla_k \xi_\rho|_{s_0}\right).$$

Wir wenden diese Gleichung auf den Summanden S_1 an:

$$\begin{aligned} S_1 = \langle \nabla_k \xi_\rho, \nabla_l \xi_\sigma\rangle (s_0) &= \left\langle \nabla_k \xi_\rho|_{s_0}, \nabla_l \xi_\sigma|_{s_0}\right\rangle = \left\langle \bar{\partial}^* G_{s_0}\bar{\partial}\left(\nabla_k \xi_\rho|_{s_0}\right), \nabla_l \xi_\sigma|_{s_0}\right\rangle \\ &= \left\langle G_{s_0}\bar{\partial}\left(\nabla_k \xi_\rho|_{s_0}\right), \bar{\partial}\left(\nabla_l \xi_\sigma|_{s_0}\right)\right\rangle. \end{aligned}$$

Aus Proposition 4.33 folgt außerdem für alle Indizes

$$\bar{\partial}\left(\nabla_k \xi_\rho|_{s_0}\right) = -\, \rho_k|_{s_0} \cap \xi_\rho|_{s_0},$$

so dass wir schließlich für den ersten Summanden folgende Gleichung erhalten:

$$S_1 = \left\langle G_{s_0}\left(\rho_k|_{s_0} \cap \xi_\rho|_{s_0}\right), \rho_l|_{s_0} \cap \xi_\sigma|_{s_0}\right\rangle. \tag{4.19}$$

Um den zweiten Summanden zu vereinfachen, unterbrechen wir unsere Darstellung erneut, um vorab wieder einige Resultate zusammenzustellen. Dazu ist zunächst die folgende technische Aussage erforderlich:

Lemma 4.34. *Es sei $(E,h) \to M$ ein hermitesches, holomorphes Vektorbündel auf der komplexen Mannigfaltigkeit M mit hermitescher Metrik g sowie $\mu \in \Gamma(M, \mathcal{A}^{p,q}(E))$. Auf einer Koordinatenumgebung (U_j, z_j), über der E trivialisiert werden kann, sei μ durch $\mu_j = (\mu_j^1, \ldots, \mu_j^r)^t$ mit*

$$\mu_j^\zeta = \frac{1}{p!q!}\sum_{\alpha,\beta} \mu^\zeta_{j\,\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}} dz_j^{\alpha_1}\wedge\ldots\wedge dz_j^{\alpha_p}\wedge dz_j^{\overline{\beta_1}}\wedge\ldots\wedge dz_j^{\overline{\beta_q}}$$

gegeben. Dann gilt für die schiefsymmetrischen Koeffizienten der lokalen Darstellung der Form

$$\psi := \nabla_\gamma\nabla_{\overline{\eta}}\mu - \nabla_{\overline{\eta}}\nabla_\gamma\mu \in \Gamma(U_j, \mathcal{A}^{p,q}(E))$$

für beliebige Koordinatenrichtungen η und γ die Gleichung

$$\begin{aligned} \psi^\zeta_{j\,\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}} = &\sum_{\nu=1}^{q}\sum_\tau \overline{R^\tau_{jM\,\beta_\nu\eta\overline{\gamma}}}\mu^\zeta_{j\,\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{\nu-1}}\overline{\tau}\overline{\beta_{\nu+1}}\ldots\overline{\beta_q}} \\ &-\sum_{\nu=1}^{p}\sum_\tau R^\tau_{jM\,\alpha_\nu\gamma\overline{\eta}}\mu^\zeta_{j\,\alpha_1\ldots\alpha_{\nu-1}\tau\alpha_{\nu+1}\ldots\alpha_p\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}} + \sum_\rho R^\zeta_{jE\,\rho\gamma\overline{\eta}}\mu^\rho_{j\,\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}}. \end{aligned}$$

Beweis. Zunächst berechnen wir $\nabla_\gamma\nabla_{\overline{\eta}}\mu$. Da E ein holomorphes Vektorbündel ist, folgt indem wir die kovariante Ableitung in die antiholomorphe Richtung bilden

$$(\nabla_{\overline{\eta}}\mu)^\zeta_{j\,\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}} = \partial_{\overline{\eta}}\mu^\zeta_{j\,\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}} - \sum_{\nu_1=1}^{q}\sum_{\tau_1}\overline{\Gamma^{\tau_1}_{jM\,\eta\beta_{\nu_1}}}\mu^\zeta_{j\,\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{\nu_1-1}}\overline{\tau_1}\overline{\beta_{\nu_1+1}}\ldots\overline{\beta_q}}$$

und damit ergibt erneutes kovariantes Ableiten in die holomorphe Richtung:

$$
\begin{aligned}
&(\nabla_\gamma \nabla_{\overline{\eta}}\mu)^{\zeta}_{j\,\alpha_1\dots\alpha_p\overline{\beta_1}\dots\overline{\beta_q}} = \nabla_\gamma \left(\nabla_{\overline{\eta}}\mu\right)^{\zeta}_{j\,\alpha_1\dots\alpha_p\overline{\beta_1}\dots\overline{\beta_q}} + \sum_\rho \Gamma^{\zeta}_{jE\,\gamma\rho} \left(\nabla_{\overline{\eta}}\mu\right)^{\rho}_{j\,\alpha_1\dots\alpha_p\overline{\beta_1}\dots\overline{\beta_q}} \\
&\quad = \partial_\gamma \left(\nabla_{\overline{\eta}}\mu\right)^{\zeta}_{j\,\alpha_1\dots\alpha_p\overline{\beta_1}\dots\overline{\beta_q}} - \sum_{\nu_2=1}^{p}\sum_{\tau_2} \Gamma^{\tau_2}_{jM\,\gamma\alpha_{\nu_2}} \left(\nabla_{\overline{\eta}}\mu\right)^{\zeta}_{j\,\alpha_1\dots\alpha_{\nu_2-1}\tau_2\alpha_{\nu_2+1}\dots\alpha_p\overline{\beta_1}\dots\overline{\beta_q}} \\
&\qquad + \sum_\rho \Gamma^{\zeta}_{jE\,\gamma\rho} \left(\nabla_{\overline{\eta}}\mu\right)^{\rho}_{j\,\alpha_1\dots\alpha_p\overline{\beta_1}\dots\overline{\beta_q}} \\
&\quad = \partial_\gamma\partial_{\overline{\eta}}\mu^{\zeta}_{j\,\alpha_1\dots\alpha_p\overline{\beta_1}\dots\overline{\beta_q}} - \sum_{\nu_1=1}^{q}\sum_{\tau_1} \left(\partial_\gamma \overline{\Gamma^{\tau_1}_{jM\,\eta\beta_{\nu_1}}}\right) \mu^{\zeta}_{j\,\alpha_1\dots\alpha_p\overline{\beta_1}\dots\overline{\beta_{\nu_1-1}}\,\overline{\tau_1}\,\overline{\beta_{\nu_1+1}}\dots\overline{\beta_q}} \\
&\qquad - \sum_{\nu_1=1}^{q}\sum_{\tau_1} \overline{\Gamma^{\tau_1}_{jM\,\eta\beta_{\nu_1}}}\,\partial_\gamma \mu^{\zeta}_{j\,\alpha_1\dots\alpha_p\overline{\beta_1}\dots\overline{\beta_{\nu_1-1}}\,\overline{\tau_1}\,\overline{\beta_{\nu_1+1}}\dots\overline{\beta_q}} \\
&\qquad - \sum_{\nu_2=1}^{p}\sum_{\tau_2} \Gamma^{\tau_2}_{jM\,\gamma\alpha_{\nu_2}}\,\partial_{\overline{\eta}} \mu^{\zeta}_{j\,\alpha_1\dots\alpha_{\nu_2-1}\tau_2\alpha_{\nu_2+1}\dots\alpha_p\overline{\beta_1}\dots\overline{\beta_q}} \\
&\qquad + \sum_{\nu_2=1}^{p}\sum_{\tau_2} \Gamma^{\tau_2}_{jM\,\gamma\alpha_{\nu_2}} \sum_{\nu_1=1}^{q}\sum_{\tau_1} \overline{\Gamma^{\tau_1}_{jM\,\eta\beta_{\nu_1}}}\, \mu^{\zeta}_{j\,\alpha_1\dots\alpha_{\nu_2-1}\tau_2\alpha_{\nu_2+1}\dots\alpha_p\overline{\beta_1}\dots\overline{\beta_{\nu_1-1}}\,\overline{\tau_1}\,\overline{\beta_{\nu_1+1}}\dots\overline{\beta_q}} \\
&\qquad + \sum_\rho \Gamma^{\zeta}_{jE\,\gamma\rho}\,\partial_{\overline{\eta}} \mu^{\rho}_{j\,\alpha_1\dots\alpha_p\overline{\beta_1}\dots\overline{\beta_q}} - \sum_\rho \Gamma^{\zeta}_{jE\,\gamma\rho} \sum_{\nu_1=1}^{q}\sum_{\tau_1} \overline{\Gamma^{\tau_1}_{jM\,\eta\beta_{\nu_1}}}\, \mu^{\rho}_{j\,\alpha_1\dots\alpha_p\overline{\beta_1}\dots\overline{\beta_{\nu_1-1}}\,\overline{\tau_1}\,\overline{\beta_{\nu_1+1}}\dots\overline{\beta_q}}.
\end{aligned}
$$

Andererseits können wir auch $\nabla_{\overline{\eta}}\nabla_\gamma\mu$ berechnen. Zunächst ist

$$
\begin{aligned}
&(\nabla_\gamma\mu)^{\zeta}_{j\,\alpha_1\dots\alpha_p\overline{\beta_1}\dots\overline{\beta_q}} = \nabla_\gamma \mu^{\zeta}_{j\,\alpha_1\dots\alpha_p\overline{\beta_1}\dots\overline{\beta_q}} + \sum_\rho \Gamma^{\zeta}_{jE\,\gamma\rho}\mu^{\rho}_{j\,\alpha_1\dots\alpha_p\overline{\beta_1}\dots\overline{\beta_q}} \\
&\quad = \partial_\gamma \mu^{\zeta}_{j\,\alpha_1\dots\alpha_p\overline{\beta_1}\dots\overline{\beta_q}} - \sum_{\nu_2=1}^{p}\sum_{\tau_2} \Gamma^{\tau_2}_{jM\,\gamma\alpha_{\nu_2}} \mu^{\zeta}_{j\,\alpha_1\dots\alpha_{\nu_2-1}\tau_2\alpha_{\nu_2+1}\dots\alpha_p\overline{\beta_1}\dots\overline{\beta_q}} + \sum_\rho \Gamma^{\zeta}_{jE\,\gamma\rho}\mu^{\rho}_{j\,\alpha_1\dots\alpha_p\overline{\beta_1}\dots\overline{\beta_q}},
\end{aligned}
$$

wobei wir jetzt bereits in diesem ersten Schritt Korrekturterme von der Metrik des holomorphen Vektorbündels erhalten. Damit berechnen wir weiter:

$$
\begin{aligned}
&(\nabla_{\overline{\eta}}\nabla_\gamma\mu)^{\zeta}_{j\,\alpha_1\dots\alpha_p\overline{\beta_1}\dots\overline{\beta_q}} = \nabla_{\overline{\eta}} \left(\nabla_\gamma\mu\right)^{\zeta}_{j\,\alpha_1\dots\alpha_p\overline{\beta_1}\dots\overline{\beta_q}} \\
&\quad = \partial_{\overline{\eta}} \left(\nabla_\gamma\mu\right)^{\zeta}_{j\,\alpha_1\dots\alpha_p\overline{\beta_1}\dots\overline{\beta_q}} - \sum_{\nu_1=1}^{q}\sum_{\tau_1} \overline{\Gamma^{\tau_1}_{jM\,\eta\beta_{\nu_1}}} \left(\nabla_\gamma\mu\right)^{\zeta}_{j\,\alpha_1\dots\alpha_p\overline{\beta_1}\dots\overline{\beta_{\nu_1-1}}\,\overline{\tau_1}\,\overline{\beta_{\nu_1+1}}\dots\overline{\beta_q}} \\
&\quad = \partial_{\overline{\eta}}\partial_\gamma \mu^{\zeta}_{j\,\alpha_1\dots\alpha_p\overline{\beta_1}\dots\overline{\beta_q}} - \sum_{\nu_2=1}^{p}\sum_{\tau_2} \left(\partial_{\overline{\eta}}\Gamma^{\tau_2}_{jM\,\gamma\alpha_{\nu_2}}\right) \mu^{\zeta}_{j\,\alpha_1\dots\alpha_{\nu_2-1}\tau_2\alpha_{\nu_2+1}\dots\alpha_p\overline{\beta_1}\dots\overline{\beta_q}} \\
&\qquad - \sum_{\nu_2=1}^{p}\sum_{\tau_2} \Gamma^{\tau_2}_{jM\,\gamma\alpha_{\nu_2}}\,\partial_{\overline{\eta}} \mu^{\zeta}_{j\,\alpha_1\dots\alpha_{\nu_2-1}\tau_2\alpha_{\nu_2+1}\dots\alpha_p\overline{\beta_1}\dots\overline{\beta_q}} + \sum_\rho \left(\partial_{\overline{\eta}}\Gamma^{\zeta}_{jE\,\gamma\rho}\right) \mu^{\rho}_{j\,\alpha_1\dots\alpha_p\overline{\beta_1}\dots\overline{\beta_q}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{\rho}\Gamma^{\zeta}_{jE\,\gamma\rho}\partial_{\overline{\eta}}\mu^{\rho}_{j\,\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}}-\sum_{\nu_1=1}^{q}\sum_{\tau_1}\overline{\Gamma^{\tau_1}_{jM\,\eta\beta_{\nu_1}}}\partial_{\gamma}\mu^{\zeta}_{j\,\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{\nu_1-1}}\overline{\tau_1}\overline{\beta_{\nu_1+1}}\ldots\overline{\beta_q}}\\
&+\sum_{\nu_1=1}^{q}\sum_{\tau_1}\overline{\Gamma^{\tau_1}_{jM\,\eta\beta_{\nu_1}}}\sum_{\nu_2=1}^{p}\sum_{\tau_2}\Gamma^{\tau_2}_{jM\,\gamma\alpha_{\nu_2}}\mu^{\zeta}_{j\,\alpha_1\ldots\alpha_{\nu_2-1}\tau_2\alpha_{\nu_2+1}\ldots\alpha_p\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{\nu_1-1}}\overline{\tau_1}\overline{\beta_{\nu_1+1}}\ldots\overline{\beta_q}}\\
&-\sum_{\nu_1=1}^{q}\sum_{\tau_1}\overline{\Gamma^{\tau_1}_{jM\,\eta\beta_{\nu_1}}}\sum_{\rho}\Gamma^{\zeta}_{jE\,\gamma\rho}\mu^{\rho}_{j\,\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{\nu_1-1}}\overline{\tau_1}\overline{\beta_{\nu_1+1}}\ldots\overline{\beta_q}}.
\end{aligned}
$$

Bei der Subtraktion fallen nun die meisten Summanden fort, so dass wir mit

$$
\begin{aligned}
(\nabla_\gamma\nabla_{\overline{\eta}}\mu-\nabla_{\overline{\eta}}\nabla_\gamma\mu)^{\zeta}_{j\,\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}}&=-\sum_{\nu_1=1}^{q}\sum_{\tau_1}\left(\partial_\gamma\overline{\Gamma^{\tau_1}_{jM\,\eta\beta_{\nu_1}}}\right)\mu^{\zeta}_{j\,\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{\nu_1-1}}\overline{\tau_1}\overline{\beta_{\nu_1+1}}\ldots\overline{\beta_q}}\\
&+\sum_{\nu_2=1}^{p}\sum_{\tau_2}\left(\partial_{\overline{\eta}}\Gamma^{\tau_2}_{jM\,\gamma\alpha_{\nu_2}}\right)\mu^{\zeta}_{j\,\alpha_1\ldots\alpha_{\nu_2-1}\tau_2\alpha_{\nu_2+1}\ldots\alpha_p\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}}-\sum_{\rho}\left(\partial_{\overline{\eta}}\Gamma^{\zeta}_{jE\,\gamma\rho}\right)\mu^{\rho}_{j\,\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}}\\
&=\sum_{\nu_1=1}^{q}\sum_{\tau_1}\overline{R^{\tau_1}_{jM\,\beta_{\nu_1}\eta\overline{\gamma}}}\mu^{\zeta}_{j\,\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{\nu_1-1}}\overline{\tau_1}\overline{\beta_{\nu_1+1}}\ldots\overline{\beta_q}}\\
&-\sum_{\nu_2=1}^{p}\sum_{\tau_2}R^{\tau_2}_{jM\,\alpha_{\nu_2}\gamma\overline{\eta}}\mu^{\zeta}_{j\,\alpha_1\ldots\alpha_{\nu_2-1}\tau_2\alpha_{\nu_2+1}\ldots\alpha_p\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}}+\sum_{\rho}R^{\zeta}_{jE\,\rho\gamma\overline{\eta}}\mu^{\rho}_{j\,\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}}
\end{aligned}
$$

die behauptete Identität erhalten. □

Korollar 4.35. *Es sei (X,g) eine kompakte Kählermannigfaltigkeit, S eine komplexe Mannigfaltigkeit und $(F,h)\to X\times S$ eine Familie von hermiteschen, holomorphen Vektorbündeln auf X. Ferner seien eine holomorphe Koordinatenumgebung (V,s) auf S und eine $(0,q)$-Form $\mu\in\Gamma\left(X\times V,\mathcal{A}^{0,q}(F)\right)$ auf $X\times V$ mit Werten in F gegeben. Dann folgt:*

$$\nabla_k\nabla_{\overline{l}}\mu-\nabla_{\overline{l}}\nabla_k\mu=\rho_{k\overline{l}}\cap\mu.$$

Dabei sei V für die kovarianten Ableitungen mit der flachen Kählermetrik bezüglich der Koordinaten s und $X\times V$ mit der Produktmetrik ausgestattet.

Beweis. Mit den Notationen aus 3.1 schreiben wir μ über $U_j\times V$ in der Form $\mu_j=(\mu_j^1,\ldots,\mu_j^r)^t$ mit

$$\mu_j^{\zeta}=\frac{1}{q!}\sum_{\beta}\mu^{\zeta}_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}}dw_j^{\overline{\beta_1}}\wedge\ldots\wedge dw_j^{\overline{\beta_q}}.$$

Da wir V mit der flachen Kählermetrik ausgestattet haben, vereinfacht sich die Formel aus Lemma 4.34 und wir finden

$$\left(\nabla_k\nabla_{\overline{l}}\mu-\nabla_{\overline{l}}\nabla_k\mu\right)^{\zeta}_j=\frac{1}{q!}\sum_{\beta}\sum_{\lambda}R^{\zeta}_{j\,\lambda k\overline{l}}\mu^{\lambda}_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}}dw_j^{\overline{\beta_1}}\wedge\ldots\wedge dw_j^{\overline{\beta_q}}=\left(\rho_{k\overline{l}}\cap\mu\right)^{\zeta}_j,$$

wobei wir noch verwendet haben, dass $\left(\rho_{k\overline{l}}\right)_j=\left(R^{\rho}_{j\,\sigma k\overline{l}}\right)_{\rho,\sigma}$ gilt. □

Proposition 4.36. *Es sei (X, g) eine kompakte Kählermannigfaltigkeit, S eine komplexe Mannigfaltigkeit und $(F, h) \to X \times S$ eine Familie von Hermite-Einstein-Vektorbündeln auf X. Ferner sei eine holomorphe Koordinatenumgebung (V, s) auf S gegeben. Dann gilt für jeden Punkt $s_0 \in V$:*

$$\Box_{\bar\partial}\left(\rho_{k\bar l}\big|_{s_0}\right) = \sqrt{-1}\Lambda_g\left[\rho_k|_{s_0}, \rho_{\bar l}\big|_{s_0}\right].$$

Beweis. Wir statten V mit der flachen Kählermetrik bezüglich s aus und berechnen

$$\Box_{\bar\partial}\left(\rho_{k\bar l}\big|_{s_0}\right) = (\bar\partial^*\bar\partial + \bar\partial\bar\partial^*)\left(\rho_{k\bar l}\big|_{s_0}\right) = \bar\partial^*\bar\partial\left(\rho_{k\bar l}\big|_{s_0}\right) + \bar\partial\,\underbrace{\bar\partial^*\left(\rho_{k\bar l}\big|_{s_0}\right)}_{=0} = \bar\partial^*\bar\partial\left(\rho_{k\bar l}\big|_{s_0}\right),$$

wobei $\bar\partial^*(\rho_{k\bar l}|_{s_0})$ als $(0,-1)$-Form verschwindet. Mit den Notationen aus 3.1 können wir $\rho_{k\bar l}|_{s_0}$ lokal auf U_j als $(\rho_{k\bar l}|_{s_0})^{\rho}_{j\,\sigma} = R^{\rho}_{j\,\sigma k\bar l}(s_0)$ schreiben, so dass wir erhalten:

$$\left(\bar\partial\left(\rho_{k\bar l}\big|_{s_0}\right)\right)^{\rho}_{j\,\sigma} = \sum_{\beta}\partial_{\overline{\beta}}R^{\rho}_{j\,\sigma k\bar l}(s_0)dz^{\overline{\beta}}_j.$$

Folglich finden wir mit Satz 2.15:

$$\left(\bar\partial^*\bar\partial\left(\rho_{k\bar l}\big|_{s_0}\right)\right)^{\rho}_{j\,\sigma} = -\sum_{\beta,\gamma} g^{\overline{\beta}\gamma}_j\left(\nabla_\gamma\left(\partial_{\overline{\beta}}R^{\rho}_{j\,\sigma k\bar l}(s_0)\right) + \sum_{\eta,\tau}\Gamma^{(\rho\sigma)}_{j\,\gamma(\eta\tau)}(s_0)\left(\partial_{\overline{\beta}}R^{\eta}_{j\,\tau k\bar l}(s_0)\right)\right). \tag{4.20}$$

Andererseits können wir auf U_j die Form $(\nabla_\gamma\nabla_{\bar l}\rho_{k\overline{\beta}})\big|_{s_0}$ berechnen, wobei wir natürlich

$$\rho_{k\overline{\beta}} := \frac{\partial}{\partial z^{\overline{\beta}}_j} \lrcorner \left(\frac{\partial}{\partial s^k}\lrcorner\Omega\right) \in \Gamma\left(U_j \times V, \mathcal{A}^{0,0}\left(\mathrm{End}(F)\right)\right)$$

definieren. Da $\mathrm{End}(F) \to X \times S$ ein holomorphes Vektorbündel ist und wir V mit der flachen Kählermetrik ausgestattet haben, ist

$$\left(\nabla_{\bar l}\rho_{k\overline{\beta}}\right)^{\rho}_{j\,\sigma} = \partial_{\bar l}R^{\rho}_{j\,\sigma k\overline{\beta}}. \tag{4.21}$$

Wir wollen diese Gleichung ein wenig umformen. Da $F \to X \times S$ ein holomorphes Vektorbündel ist, gilt lokal für die Matrixdarstellungen der Krümmung sowie des Chern-Zusammenhangs die Beziehung $\Theta_j = \bar\partial\theta_j$. Folglich ist $\bar\partial\Theta_j = \bar\partial\bar\partial\theta_j = 0$ und wir finden

$$0 = \bar\partial\Theta^{\rho}_{j\,\sigma} = \bar\partial\left(\sum_{\alpha,\beta}R^{\rho}_{j\,\sigma\alpha\overline{\beta}}dw^{\alpha}_j\wedge dw^{\overline{\beta}}_j\right) = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta} -\left(\partial_{\overline{\beta_1}}R^{\rho}_{j\,\sigma\alpha\overline{\beta_2}} - \partial_{\overline{\beta_2}}R^{\rho}_{j\,\sigma\alpha\overline{\beta_1}}\right)dw^{\alpha}_j\wedge dw^{\overline{\beta_1}}_j\wedge dw^{\overline{\beta_2}}_j,$$

woraus wiederum die Beziehung

$$\partial_{\overline{\beta_1}}R^{\rho}_{j\,\sigma\alpha\overline{\beta_2}} = \partial_{\overline{\beta_2}}R^{\rho}_{j\,\sigma\alpha\overline{\beta_1}} \qquad \text{für alle } 1 \leqslant \alpha, \beta_1, \beta_2 \leqslant n+m \text{ sowie } 1 \leqslant \rho, \sigma \leqslant r$$

folgt. Wenden wir diese auf die Formel (4.21) an, dann schließen wir:

$$\left(\nabla_{\bar{l}}\rho_{k\overline{\beta}}\right)^{\rho}_{j\,\sigma} = \partial_{\bar{l}} R^{\rho}_{j\,\sigma k\overline{\beta}} = \partial_{\overline{\beta}} R^{\rho}_{j\,\sigma k\bar{l}}.$$

Damit können wir

$$\left(\nabla_{\gamma}\nabla_{\bar{l}}\rho_{k\overline{\beta}}\right)^{\rho}_{j\,\sigma} = \nabla_{\gamma}\left(\partial_{\overline{\beta}} R^{\rho}_{j\,\sigma k\bar{l}}\right) + \sum_{\eta,\tau} \Gamma^{(\rho\sigma)}_{j\,\gamma(\eta\tau)}\left(\partial_{\overline{\beta}} R^{\eta}_{j\,\tau k\bar{l}}\right)$$

berechnen und erhalten mit (4.20):

$$\begin{aligned}\sum_{\beta,\gamma} g_j^{\overline{\beta}\gamma}\left(\left(\nabla_{\gamma}\nabla_{\bar{l}}\rho_{k\overline{\beta}}\right)\Big|_{s_0}\right)^{\rho}_{j\,\sigma} &= \sum_{\beta,\gamma} g_j^{\overline{\beta}\gamma}\left(\nabla_{\gamma}\left(\partial_{\overline{\beta}} R^{\rho}_{j\,\sigma k\bar{l}}(s_0)\right) + \sum_{\eta,\tau}\Gamma^{(\rho\sigma)}_{j\,\gamma(\eta\tau)}(s_0)\left(\partial_{\overline{\beta}} R^{\eta}_{j\,\tau k\bar{l}}(s_0)\right)\right)\\ &= -\left(\bar{\partial}^*\bar{\partial}\left(\rho_{k\bar{l}}\big|_{s_0}\right)\right)^{\rho}_{j\,\sigma}.\end{aligned}$$

Wir haben also folgende Gleichung auf U_j nachgewiesen, was unser Anliegen war:

$$\left(\Box_{\bar{\partial}}\left(\rho_{k\bar{l}}\big|_{s_0}\right)\right)^{\rho}_{j\,\sigma} = \left(\bar{\partial}^*\bar{\partial}\left(\rho_{k\bar{l}}\big|_{s_0}\right)\right)^{\rho}_{j\,\sigma} = -\sum_{\beta,\gamma} g_j^{\overline{\beta}\gamma}\left(\left(\nabla_{\gamma}\nabla_{\bar{l}}\rho_{k\overline{\beta}}\right)\Big|_{s_0}\right)^{\rho}_{j\,\sigma}. \tag{4.22}$$

Wir wenden nun Lemma 4.34 auf das Vektorbündel $\mathrm{End}(F) \to U_j \times V$ sowie die Form $\rho_{k\overline{\beta}}$ an und erhalten aus Proposition 2.6:

$$\begin{aligned}\left(\nabla_{\gamma}\nabla_{\bar{l}}\rho_{k\overline{\beta}} - \nabla_{\bar{l}}\nabla_{\gamma}\rho_{k\overline{\beta}}\right)^{\rho}_{j\,\sigma} &= \sum_{\eta,\tau} R^{(\rho\sigma)}_{j\,(\eta\tau)\gamma\bar{l}}\left(\rho_{k\overline{\beta}}\right)^{\eta}_{j\,\tau} = \sum_{\eta,\tau}\left(\delta^{\tau}_{\sigma} R^{\rho}_{j\eta\gamma\bar{l}} - \delta^{\rho}_{\eta} R^{\tau}_{j\sigma\gamma\bar{l}}\right) R^{\eta}_{j\,\tau k\overline{\beta}}\\ &= \sum_{\eta,\tau}\delta^{\tau}_{\sigma} R^{\rho}_{j\eta\gamma\bar{l}} R^{\eta}_{j\,\tau k\overline{\beta}} - \sum_{\eta,\tau}\delta^{\rho}_{\eta} R^{\tau}_{j\sigma\gamma\bar{l}} R^{\eta}_{j\,\tau k\overline{\beta}} = \sum_{\eta} R^{\rho}_{j\eta\gamma\bar{l}} R^{\eta}_{j\,\sigma k\overline{\beta}} - \sum_{\tau} R^{\tau}_{j\sigma\gamma\bar{l}} R^{\rho}_{j\,\tau k\overline{\beta}}\\ &= \left(\rho_{\gamma\bar{l}}\wedge\rho_{k\overline{\beta}}\right)^{\rho}_{j\,\sigma} - \left(\rho_{k\overline{\beta}}\wedge\rho_{\gamma\bar{l}}\right)^{\rho}_{j\,\sigma} = \left(\left[\rho_{\gamma\bar{l}},\rho_{k\overline{\beta}}\right]\right)^{\rho}_{j\,\sigma}.\end{aligned}$$

Dabei haben wir wieder verwendet, dass V mit der flachen Kählermetrik ausgestattet ist, so dass die im Lemma auftretenden Krümmungsterme der Metrik auf $X \times V$ verschwinden. Wir finden nun mit (4.22):

$$\left(\Box_{\bar{\partial}}\left(\rho_{k\bar{l}}\big|_{s_0}\right)\right)^{\rho}_{j\,\sigma} = \underbrace{-\sum_{\beta,\gamma} g_j^{\overline{\beta}\gamma}\left(\left[\rho_{\gamma\bar{l}},\rho_{k\overline{\beta}}\right]\Big|_{s_0}\right)^{\rho}_{j\,\sigma}}_{=:R_1}\underbrace{-\sum_{\beta,\gamma} g_j^{\overline{\beta}\gamma}\left(\left(\nabla_{\bar{l}}\nabla_{\gamma}\rho_{k\overline{\beta}}\right)\Big|_{s_0}\right)^{\rho}_{j\,\sigma}}_{=:R_2}. \tag{4.23}$$

Zunächst berechnen wir den ersten Summanden R_1. Indem wir sein Vorzeichen in der Lie-Klammer auflösen, erhalten wir:

$$R_1 = \sum_{\beta,\gamma} g_j^{\overline{\beta}\gamma}\left(\left[\rho_{k\overline{\beta}},\rho_{\gamma\bar{l}}\right]\Big|_{s_0}\right)^{\rho}_{j\,\sigma} = \sum_{\beta,\gamma} g_j^{\overline{\beta}\gamma}\left(\sum_{\tau} R^{\rho}_{j\,\tau k\overline{\beta}}(s_0) R^{\tau}_{j\sigma\gamma\bar{l}}(s_0) - \sum_{\tau} R^{\rho}_{j\tau\gamma\bar{l}}(s_0) R^{\tau}_{j\,\sigma k\overline{\beta}}(s_0)\right).$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned}
\left(\left[\rho_k\big|_{s_0}, \rho_{\bar{l}}\big|_{s_0}\right]\right)^{\rho}_{j\,\sigma} &= \left(\rho_k\big|_{s_0} \wedge \rho_{\bar{l}}\big|_{s_0} - (-1)^{1\cdot 1}\, \rho_{\bar{l}}\big|_{s_0} \wedge \rho_k\big|_{s_0}\right)^{\rho}_{j\,\sigma} \\
&= \sum_{\tau} \left(\sum_{\beta} R^{\rho}_{j\,\tau k\overline{\beta}}(s_0) dz_j^{\overline{\beta}}\right) \wedge \left(\sum_{\alpha} -R^{\tau}_{j\,\sigma\alpha\bar{l}}(s_0) dz_j^{\alpha}\right) \\
&\quad + \sum_{\tau} \left(\sum_{\alpha} -R^{\rho}_{j\,\tau\alpha\bar{l}}(s_0) dz_j^{\alpha}\right) \wedge \left(\sum_{\beta} R^{\tau}_{j\,\sigma k\overline{\beta}}(s_0) dz_j^{\overline{\beta}}\right) \\
&= \sum_{\alpha,\beta} \left(\sum_{\tau} R^{\rho}_{j\,\tau k\overline{\beta}}(s_0) R^{\tau}_{j\,\sigma\alpha\bar{l}}(s_0) - \sum_{\tau} R^{\rho}_{j\,\tau\alpha\bar{l}}(s_0) R^{\tau}_{j\,\sigma k\overline{\beta}}(s_0)\right) dz_j^{\alpha} \wedge dz_j^{\overline{\beta}}
\end{aligned}$$

und damit folgt für die Kontraktion:

$$\left(\sqrt{-1}\Lambda_g \left[\rho_k\big|_{s_0}, \rho_{\bar{l}}\big|_{s_0}\right]\right)^{\rho}_{j\,\sigma} = \sum_{\gamma,\beta} g_j^{\overline{\beta}\gamma} \left(\sum_{\tau} R^{\rho}_{j\,\tau k\overline{\beta}}(s_0) R^{\tau}_{j\,\sigma\gamma\bar{l}}(s_0) - \sum_{\tau} R^{\rho}_{j\,\tau\gamma\bar{l}}(s_0) R^{\tau}_{j\,\sigma k\overline{\beta}}(s_0)\right) = R_1.$$

Nach (4.23) gilt nun

$$\left(\Box_{\bar{\partial}} \left(\rho_{k\bar{l}}\big|_{s_0}\right)\right)^{\rho}_{j\,\sigma} = \left(\sqrt{-1}\Lambda_g \left[\rho_k\big|_{s_0}, \rho_{\bar{l}}\big|_{s_0}\right]\right)^{\rho}_{j\,\sigma} + R_2,$$

so dass es genügt, $R_2 = 0$ zu zeigen. Zunächst folgt mit der Bianchi-Identität aus Satz 2.8:

$$\begin{aligned}
\left(\nabla_{\gamma}\rho_{k\overline{\beta}}\right)^{\rho}_{j\,\sigma} &= \partial_{\gamma} \left(\rho_{k\overline{\beta}}\right)^{\rho}_{j\,\sigma} + \sum_{\eta,\tau} \Gamma^{(\rho\sigma)}_{j\,\gamma(\eta\tau)} \left(\rho_{k\overline{\beta}}\right)^{\eta}_{j\,\tau} = \partial_{\gamma} R^{\rho}_{j\,\sigma k\overline{\beta}} + \sum_{\eta,\tau} \Gamma^{(\rho\sigma)}_{j\,\gamma(\eta\tau)} R^{\eta}_{j\,\tau k\overline{\beta}} \\
&= \partial_k R^{\rho}_{j\,\sigma\gamma\overline{\beta}} + \sum_{\eta,\tau} \Gamma^{(\rho\sigma)}_{j\,k(\eta\tau)} R^{\eta}_{j\,\tau\gamma\overline{\beta}} = \partial_k \left(\rho_{\gamma\overline{\beta}}\right)^{\rho}_{j\,\sigma} + \sum_{\eta,\tau} \Gamma^{(\rho\sigma)}_{j\,k(\eta\tau)} \left(\rho_{\gamma\overline{\beta}}\right)^{\eta}_{j\,\tau} = \left(\nabla_k \rho_{\gamma\overline{\beta}}\right)^{\rho}_{j\,\sigma}.
\end{aligned}$$

Wir haben also die Beziehung $\nabla_{\gamma}\rho_{k\overline{\beta}} = \nabla_k \rho_{\gamma\overline{\beta}}$ gefunden. Mit dieser Vorarbeit können wir den Summanden R_2 berechnen:

$$\begin{aligned}
R_2 &= -\sum_{\beta,\gamma} g_j^{\overline{\beta}\gamma} \left(\left(\nabla_{\bar{l}}\nabla_{\gamma}\rho_{k\overline{\beta}}\right)\Big|_{s_0}\right)^{\rho}_{j\,\sigma} = -\sum_{\beta,\gamma} g_j^{\overline{\beta}\gamma} \left(\left(\nabla_{\bar{l}}\nabla_k\rho_{\gamma\overline{\beta}}\right)\Big|_{s_0}\right)^{\rho}_{j\,\sigma} \\
&= -\sum_{\beta,\gamma} g_j^{\overline{\beta}\gamma} \partial_{\bar{l}} \left(\partial_k R^{\rho}_{j\,\sigma\gamma\overline{\beta}} + \sum_{\eta,\tau} \Gamma^{(\rho\sigma)}_{j\,k(\eta\tau)} R^{\eta}_{j\,\tau\gamma\overline{\beta}}\right)(s_0) \\
&= -\partial_{\bar{l}} \left(\partial_k \left(\sum_{\beta,\gamma} g_j^{\overline{\beta}\gamma} R^{\rho}_{j\,\sigma\gamma\overline{\beta}}\right) + \sum_{\eta,\tau} \Gamma^{(\rho\sigma)}_{j\,k(\eta\tau)} \left(\sum_{\beta,\gamma} g_j^{\overline{\beta}\gamma} R^{\eta}_{j\,\tau\gamma\overline{\beta}}\right)\right)(s_0) \\
&= -\partial_{\bar{l}} \left(\partial_k \left(\kappa\delta^{\rho}_{\sigma}\right) + \sum_{\eta,\tau} \Gamma^{(\rho\sigma)}_{j\,k(\eta\tau)} \left(\kappa\delta^{\eta}_{\tau}\right)\right)(s_0) = \kappa(s_0) \left(\left(\nabla_{\bar{l}}\nabla_k\, \mathrm{id}\right)\big|_{s_0}\right)^{\rho}_{j\,\sigma}.
\end{aligned}$$

Dabei bezeichnet κ die Hermite-Einstein-Konstante der Fasern und wir haben verwendet, dass diese Funktion nach Satz 3.12 auf S lokal konstant ist. Schließlich ist mit Proposition 2.4

$$(\nabla_k \operatorname{id})^{\rho}_{j\,\sigma} = \partial_k \delta^{\rho}_{\sigma} + \sum_{\eta,\tau} \Gamma^{(\rho\sigma)}_{j\,k(\eta\tau)} \delta^{\eta}_{\tau} = \sum_{\tau} \Gamma^{(\rho\sigma)}_{j\,k(\tau\tau)} = \sum_{\tau} \left(\delta^{\tau}_{\sigma} \Gamma^{\rho}_{j\,k\tau} - \delta^{\rho}_{\tau} \Gamma^{\tau}_{j\,k\sigma} \right) = \Gamma^{\rho}_{j\,k\sigma} - \Gamma^{\rho}_{j\,k\sigma} = 0$$

und damit folgt $R_2 = 0$, wie gewünscht. □

Wir zerlegen nun den zweiten Summanden der Krümmung aus (4.18) in zwei weitere Summanden S_{2a} und S_{2b}, indem wir Korollar 4.35 anwenden:

$$S_2 = \left\langle \nabla_{\bar{l}} \nabla_k \xi_\rho, \xi_\sigma \right\rangle (s_0) = \underbrace{\left\langle \nabla_k \nabla_{\bar{l}} \xi_\rho, \xi_\sigma \right\rangle (s_0)}_{=:S_{2a}} \underbrace{- \left\langle \rho_{k\bar{l}} \cap \xi_\rho, \xi_\sigma \right\rangle (s_0)}_{=:S_{2b}} . \tag{4.24}$$

Auf dem Endomorphismenbündel $\operatorname{End}(F_{s_0})$ steht uns vermöge der induzierten Metrik H_{s_0} die Hodge-Theorie zur Verfügung. Wir nutzen die Gleichung $H + \Box_{\bar{\partial}} \circ G = \operatorname{id}$ und erhalten mit Proposition 4.36, da $\Box_{\bar{\partial}}$ und G kommutieren:

$$\rho_{k\bar{l}}\big|_{s_0} = H\left(\rho_{k\bar{l}}\big|_{s_0} \right) + G\left(\Box_{\bar{\partial}} \left(\rho_{k\bar{l}}\big|_{s_0} \right) \right) = H\left(\rho_{k\bar{l}}\big|_{s_0} \right) + G\left(\sqrt{-1} \Lambda_g \left[\rho_k\big|_{s_0}, \rho_{\bar{l}}\big|_{s_0} \right] \right).$$

Also berechnen wir den Summanden S_{2b} zu:

$$\begin{aligned} S_{2b} &= - \left\langle \rho_{k\bar{l}} \cap \xi_\rho, \xi_\sigma \right\rangle (s_0) = - \left\langle \rho_{k\bar{l}}\big|_{s_0} \cap \xi_\rho\big|_{s_0}, \xi_\sigma\big|_{s_0} \right\rangle \\ &= - \left\langle H\left(\rho_{k\bar{l}}\big|_{s_0} \right) \cap \xi_\rho\big|_{s_0}, \xi_\sigma\big|_{s_0} \right\rangle - \left\langle G\left(\sqrt{-1} \Lambda_g \left[\rho_k\big|_{s_0}, \rho_{\bar{l}}\big|_{s_0} \right] \right) \cap \xi_\rho\big|_{s_0}, \xi_\sigma\big|_{s_0} \right\rangle . \end{aligned} \tag{4.25}$$

Der unerwünschte Summand

$$- \left\langle H\left(\rho_{k\bar{l}}\big|_{s_0} \right) \cap \xi_\rho\big|_{s_0}, \xi_\sigma\big|_{s_0} \right\rangle$$

verschwindet im Allgemeinen nicht. In späteren Abschnitten zeigen wir, dass zumindest unter geeigneten Bedingungen an die Familie $H(\rho_{k\bar{l}}\big|_{s_0})$ und damit auch obiger Summand verschwindet. Vorerst sammeln wir jedoch einige Resultate zur Berechnung von S_{2a}.

Proposition 4.37. *Es sei (X, g) eine kompakte Kählermannigfaltigkeit, S eine komplexe Mannigfaltigkeit und $(F, h) \to X \times S$ eine Familie von hermiteschen, holomorphen Vektorbündeln auf X. Ferner seien eine holomorphe Koordinatenumgebung (V, s) auf S und für $q > 0$ eine Form $\mu \in \Gamma\left(X \times V, \mathcal{A}^{0,q}(F)\right)$ gegeben. Gilt nun zusätzlich $\bar{\partial}\mu = 0$, dann folgt mit der Differentialform*

$$F_{\bar{l}}(\mu) \in \Gamma\left(X \times V, \mathcal{A}^{0,q-1}(F)\right)$$

aus Lemma 4.29 in jedem Punkt $t \in V$:

$$\left(\nabla_k \nabla_{\bar{l}} \mu\right)\big|_t = \bar{\partial}\left(\left(\nabla_k F_{\bar{l}}(\mu)\right)\big|_t \right) + \rho_k\big|_t \cap \left(F_{\bar{l}}(\mu)\big|_t \right).$$

Dabei sei V für die kovarianten Ableitungen mit der flachen Kählermetrik bezüglich der Koordinaten s und $X \times V$ mit der Produktmetrik ausgestattet.

Beweis. Wir arbeiten mit den Notationen aus 3.1 und schreiben die Form μ auf $U_j \times V$ als $\mu_j = (\mu_j^1, \ldots, \mu_j^r)^t$ mit:

$$\mu_j^\zeta = \frac{1}{q!} \sum_\beta \mu^\zeta_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}} dz_j^{\overline{\beta_1}} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\beta_q}} + \frac{1}{(q-1)!} \sum_{\beta,i} \mu^\zeta_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}\,\overline{i}} dz_j^{\overline{\beta_1}} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\beta_{q-1}}} \wedge ds^{\overline{i}}$$

$$+ \text{ Summanden mit mehr als einem } d\overline{s}\text{-Faktor.}$$

Damit erhalten wir völlig analog wie im Beweis von Lemma 4.29 (vergleiche die Formel (4.12)) aus der Voraussetzung $\bar{\partial}\mu = 0$ auf $U_j \times V$:

$$\frac{1}{q!} \sum_{\beta,i} \left(\sum_\nu (-1)^{\nu+1} \partial_{\overline{\beta_\nu}} \mu^\zeta_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\widehat{\overline{\beta_\nu}}\ldots\overline{\beta_q}\,\overline{i}} + (-1)^q \partial_{\overline{i}} \mu^\zeta_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}} \right) dz_j^{\overline{\beta_1}} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\beta_q}} \wedge ds^{\overline{i}} = 0.$$

Wir finden also für alle Indizes die Gleichung

$$\partial_{\overline{i}} \mu^\zeta_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}} = (-1)^{q+1} \sum_\nu (-1)^{\nu+1} \partial_{\overline{\beta_\nu}} \mu^\zeta_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\widehat{\overline{\beta_\nu}}\ldots\overline{\beta_q}\,\overline{i}} \tag{4.26}$$

und nutzen diese zur Berechnung von $(\nabla_k \nabla_{\overline{l}} \mu)\big|_t$. Da F ein holomorphes Vektorbündel und V mit der flachen Kählermetrik ausgestattet ist, folgt zunächst:

$$\left(\nabla_{\overline{l}}\mu\right)_j^\zeta = \frac{1}{q!} \sum_\beta \partial_{\overline{l}} \mu^\zeta_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}} dz_j^{\overline{\beta_1}} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\beta_q}} + \frac{1}{(q-1)!} \sum_{\beta,i} \partial_{\overline{l}} \mu^\zeta_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}\,\overline{i}} dz_j^{\overline{\beta_1}} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\beta_{q-1}}} \wedge ds^{\overline{i}}$$

$$+ \text{ Summanden mit mehr als einem } d\overline{s}\text{-Faktor.}$$

Damit erhalten wir für die zweite kovariante Ableitung:

$$\begin{aligned}
\left(\nabla_k \nabla_{\overline{l}}\mu\right)_j^\zeta &= \partial_k \left(\nabla_{\overline{l}}\mu\right)_j^\zeta + \sum_\tau \Gamma^\zeta_{j\,k\tau} \left(\nabla_{\overline{l}}\mu\right)_j^\tau \\
&= \frac{1}{q!} \sum_\beta \left(\partial_k \partial_{\overline{l}} \mu^\zeta_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}} + \sum_\tau \Gamma^\zeta_{j\,k\tau} \partial_{\overline{l}} \mu^\tau_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}} \right) dz_j^{\overline{\beta_1}} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\beta_q}} \\
&\quad + \frac{1}{(q-1)!} \sum_{\beta,i} \left(\partial_k \partial_{\overline{l}} \mu^\zeta_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}\,\overline{i}} + \sum_\tau \Gamma^\zeta_{j\,k\tau} \partial_{\overline{l}} \mu^\tau_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}\,\overline{i}} \right) dz_j^{\overline{\beta_1}} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\beta_{q-1}}} \wedge ds^{\overline{i}} \\
&\quad + \text{ Summanden mit mehr als einem } d\overline{s}\text{-Faktor.}
\end{aligned}$$

Insbesondere berechnen wir also auf U_j mit (4.26), indem wir ausnutzen, dass bei der Restriktion auf die Faser die meisten Summanden wegfallen:

$$\left((\nabla_k \nabla_{\overline{l}}\mu)\big|_t \right)_j^\zeta = \frac{1}{q!} \sum_\beta \left(\partial_k \partial_{\overline{l}} \mu^\zeta_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}}(t) + \sum_\tau \Gamma^\zeta_{j\,k\tau}(t) \partial_{\overline{l}} \mu^\tau_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}}(t) \right) dz_j^{\overline{\beta_1}} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\beta_q}}$$

$$
\begin{aligned}
&= (-1)^{q+1}\frac{1}{q!}\sum_\beta \Bigg(\partial_k \sum_\nu (-1)^{\nu+1}\partial_{\overline{\beta_\nu}}\mu^\zeta_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\widehat{\overline{\beta_\nu}}\ldots\overline{\beta_q}\,\bar{l}}(t) \\
&\qquad + \sum_\tau \Gamma^\zeta_{j\,k\tau}(t)\sum_\nu (-1)^{\nu+1}\partial_{\overline{\beta_\nu}}\mu^\tau_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\widehat{\overline{\beta_\nu}}\ldots\overline{\beta_q}\,\bar{l}}(t)\Bigg) dz_j^{\overline{\beta_1}}\wedge\ldots\wedge dz_j^{\overline{\beta_q}} \\
&= (-1)^{q+1}\frac{1}{q!}\sum_\beta\sum_\nu (-1)^{\nu+1}\Bigg(\partial_{\overline{\beta_\nu}}\Bigg(\partial_k\mu^\zeta_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\widehat{\overline{\beta_\nu}}\ldots\overline{\beta_q}\,\bar{l}}(t) + \sum_\tau \Gamma^\zeta_{j\,k\tau}(t)\mu^\tau_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\widehat{\overline{\beta_\nu}}\ldots\overline{\beta_q}\,\bar{l}}(t)\Bigg) \\
&\qquad - \sum_\tau \left(\partial_{\overline{\beta_\nu}}\Gamma^\zeta_{j\,k\tau}(t)\right)\mu^\tau_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\widehat{\overline{\beta_\nu}}\ldots\overline{\beta_q}\,\bar{l}}(t)\Bigg) dz_j^{\overline{\beta_1}}\wedge\ldots\wedge dz_j^{\overline{\beta_q}} \\
&= \frac{1}{q!}\sum_\beta\sum_\nu (-1)^{\nu+q}\partial_{\overline{\beta_\nu}}\Bigg(\partial_k\mu^\zeta_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\widehat{\overline{\beta_\nu}}\ldots\overline{\beta_q}\,\bar{l}}(t) + \sum_\tau \Gamma^\zeta_{j\,k\tau}(t)\mu^\tau_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\widehat{\overline{\beta_\nu}}\ldots\overline{\beta_q}\,\bar{l}}(t)\Bigg) dz_j^{\overline{\beta_1}}\wedge\ldots\wedge dz_j^{\overline{\beta_q}} \\
&\quad + \frac{1}{q!}\sum_\beta\sum_\nu (-1)^{\nu+q}\sum_\tau R^\zeta_{j\,\tau k\overline{\beta_\nu}}(t)\mu^\tau_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\widehat{\overline{\beta_\nu}}\ldots\overline{\beta_q}\,\bar{l}}(t) dz_j^{\overline{\beta_1}}\wedge\ldots\wedge dz_j^{\overline{\beta_q}}.
\end{aligned}
\tag{4.27}
$$

Damit ist die linke Seite der Behauptung ausgerechnet. Für die Berechnung der rechten Seite bemerken wir zunächst, dass wir im Beweis von Lemma 4.29 die Form $F_{\bar{l}}(\mu)$ lokal auf $U_j \times V$ durch

$$\left(F_{\bar{l}}(\mu)\right)^\zeta_j = \frac{1}{(q-1)!}\sum_\beta (-1)^{q+1}\mu^\zeta_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}\,\bar{l}} dz_j^{\overline{\beta_1}}\wedge\ldots\wedge dz_j^{\overline{\beta_{q-1}}}$$

konstruiert hatten, vergleiche Formel (4.13). Damit ist

$$\left(\nabla_k F_{\bar{l}}(\mu)\right)^\zeta_j = \frac{1}{(q-1)!}\sum_\beta (-1)^{q+1}\Bigg(\partial_k\mu^\zeta_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}\,\bar{l}} + \sum_\tau \Gamma^\zeta_{j\,k\tau}\mu^\tau_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}\,\bar{l}}\Bigg) dz_j^{\overline{\beta_1}}\wedge\ldots\wedge dz_j^{\overline{\beta_{q-1}}}$$

und folglich:

$$
\begin{aligned}
&\left(\left(\nabla_k F_{\bar{l}}(\mu)\right)\big|_t\right)^\zeta_j = \\
&= \frac{1}{(q-1)!}\sum_\beta (-1)^{q+1}\Bigg(\partial_k\mu^\zeta_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}\,\bar{l}}(t) + \sum_\tau \Gamma^\zeta_{j\,k\tau}(t)\mu^\tau_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}\,\bar{l}}(t)\Bigg) dz_j^{\overline{\beta_1}}\wedge\ldots\wedge dz_j^{\overline{\beta_{q-1}}}.
\end{aligned}
$$

Wir können also $\phi := \bar{\partial}\left(\left(\nabla_k F_{\bar{l}}(\mu)\right)\big|_t\right)$ berechnen:

$$\phi^\zeta_j = \frac{1}{q!}\sum_\beta\sum_\nu (-1)^{\nu+q}\partial_{\overline{\beta_\nu}}\Bigg(\partial_k\mu^\zeta_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\widehat{\overline{\beta_\nu}}\ldots\overline{\beta_q}\,\bar{l}}(t) + \sum_\tau \Gamma^\zeta_{j\,k\tau}(t)\mu^\tau_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\widehat{\overline{\beta_\nu}}\ldots\overline{\beta_q}\,\bar{l}}(t)\Bigg) dz_j^{\overline{\beta_1}}\wedge\ldots\wedge dz_j^{\overline{\beta_q}}. \tag{4.28}$$

Andererseits ist $\psi := \rho_k|_t \cap F_{\bar{l}}(\mu)\big|_t$ lokal gegeben durch:

$$\psi^\zeta_j = \sum_\tau \left(\rho_k|_t\right)^\zeta_{j\,\tau}\wedge\left(F_{\bar{l}}(\mu)\big|_t\right)^\tau_j$$

$$= \sum_\tau \left(\sum_\beta R^\zeta_{j\,\tau k\overline{\beta}}(t) dz_j^{\overline{\beta}} \right) \wedge \left(\frac{1}{(q-1)!} \sum_\beta (-1)^{q+1} \mu^\tau_{j\,\overline{\beta_1 \ldots \beta_{q-1}}\,\overline{l}}(t) dz_j^{\overline{\beta_1}} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\beta_{q-1}}} \right)$$

$$= \frac{1}{q!} \sum_\beta \sum_\nu (-1)^{\nu+q} \sum_\tau R^\zeta_{j\,\tau k\overline{\beta_\nu}}(t) \mu^\tau_{j\,\overline{\beta_1 \ldots \widehat{\beta_\nu} \ldots \beta_q}\,\overline{l}}(t) dz_j^{\overline{\beta_1}} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\beta_q}}. \tag{4.29}$$

Indem wir (4.28) und (4.29) in (4.27) einsetzen, erhalten wir

$$\left(\left(\nabla_k \nabla_{\bar{l}} \mu \right)\big|_t \right)^\zeta_j = \phi^\zeta_j + \psi^\zeta_j = \left(\bar{\partial} \left(\left(\nabla_k F_{\bar{l}}(\mu) \right)\big|_t \right) \right)^\zeta_j + \left(\rho_k|_t \cap F_{\bar{l}}(\mu)\big|_t \right)^\zeta_j$$

und somit die Behauptung. □

Proposition 4.38. *Es sei (M, g) eine kompakte Kählermannigfaltigkeit und $(E, h) \to M$ ein hermitesches, holomorphes Vektorbündel auf M. Ferner sei $A \in \Gamma\left(M, \mathcal{A}^{0,1}(\mathrm{End}(E))\right)$ gegeben. Dann wird der Operator*

$$A \cup : \Gamma\left(M, \mathcal{A}^{0,q}(E)\right) \longrightarrow \Gamma\left(M, \mathcal{A}^{0,q-1}(E)\right)$$

vermöge $A \cup \eta = \sqrt{-1}\Lambda_g (A^* \cap \eta)$ berechnet.

Beweis. Wir rechnen auf einer Überdeckung von M durch Koordinatenumgebungen (U_j, z_j), über denen E trivialisiert werden kann, und fixieren ein beliebiges $\psi \in \Gamma\left(M, \mathcal{A}^{0,q-1}(E)\right)$, welches wir lokal auf U_j durch $\psi_j = (\psi^1_j, \ldots, \psi^r_j)^t$ mit

$$\psi^\zeta_j = \frac{1}{(q-1)!} \sum_\beta \psi^\zeta_{j\,\overline{\beta_1 \ldots \beta_{q-1}}} dz_j^{\overline{\beta_1}} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\beta_{q-1}}}$$

beschreiben. In dieser Situation wird der Endomorphismus A lokal gegeben durch

$$A_j = \left(A^\rho_{j\,\sigma} \right)_{\rho,\sigma} \qquad \text{mit} \qquad A^\rho_{j\,\sigma} = \sum_\beta A^\rho_{j\,\sigma\overline{\beta}} dz_j^{\overline{\beta}}.$$

Zunächst berechnen wir $A \cap \psi \in \Gamma\left(M, \mathcal{A}^{0,q}(E)\right)$ auf U_j:

$$(A \cap \psi)^\zeta_j = \sum_\tau A^\zeta_{j\,\tau} \wedge \psi^\tau_j = \sum_\tau \left(\sum_\beta A^\zeta_{j\,\tau\overline{\beta}} dz_j^{\overline{\beta}} \right) \wedge \left(\frac{1}{(q-1)!} \sum_\beta \psi^\tau_{j\,\overline{\beta_1 \ldots \beta_{q-1}}} dz_j^{\overline{\beta_1}} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\beta_{q-1}}} \right)$$

$$= \frac{1}{q!} \sum_\beta \sum_\nu (-1)^{\nu+1} \sum_\tau A^\zeta_{j\,\tau\overline{\beta_\nu}} \psi^\tau_{j\,\overline{\beta_1 \ldots \widehat{\beta_\nu} \ldots \beta_q}} dz_j^{\overline{\beta_1}} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\beta_q}}.$$

Indem wir η lokal in der Form $\eta_j = (\eta^1_j, \ldots, \eta^r_j)^t$ mit

$$\eta^\zeta_j = \frac{1}{q!} \sum_\beta \eta^\zeta_{j\,\overline{\beta_1 \ldots \beta_q}} dz_j^{\overline{\beta_1}} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\beta_q}}$$

schreiben, können wir die Funktion $(A \cap \psi, \eta) \in \Gamma(M, \mathcal{A}(M))$ auf U_j berechnen:

$$\begin{aligned}
(A \cap \psi, \eta)|_{U_j} &= \sum_{\lambda,\mu} h_{j\,\lambda\overline{\mu}} \left((A \cap \psi)_j^\lambda, \eta_j^\mu \right) \\
&= \frac{1}{q!} \sum_{\lambda,\mu} h_{j\,\lambda\overline{\mu}} \sum_{\gamma,\beta} g_j^{\overline{\beta_1}\gamma_1} \cdots g_j^{\overline{\beta_q}\gamma_q} (A \cap \psi)^\lambda_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}} \overline{\eta^\mu_{j\,\overline{\gamma_1}\ldots\overline{\gamma_q}}} \\
&= \frac{1}{q!} \sum_{\lambda,\mu} h_{j\,\lambda\overline{\mu}} \sum_{\gamma,\beta} g_j^{\overline{\beta_1}\gamma_1} \cdots g_j^{\overline{\beta_q}\gamma_q} \sum_\nu (-1)^{\nu+1} \sum_\tau A^\lambda_{j\,\tau\overline{\beta_\nu}} \psi^\tau_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\widehat{\overline{\beta_\nu}}\ldots\overline{\beta_q}} \overline{\eta^\mu_{j\,\overline{\gamma_1}\ldots\overline{\gamma_q}}}.
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Andererseits wollen wir $\left(\psi, \sqrt{-1}\Lambda_g (A^* \cap \eta)\right) \in \Gamma(M, \mathcal{A}(M))$ berechnen und notieren zunächst für den adjungierten Endomorphismus zu A die lokale Gestalt

$$A_j^* = \left(A^{*\,\rho}_{j\,\sigma} \right)_{\rho,\sigma} \qquad \text{mit} \qquad A^{*\,\rho}_{j\,\sigma} = \sum_\alpha \sum_{\gamma,\delta} h_j^{\overline{\gamma}\rho} \overline{A^\delta_{j\,\gamma\overline{\alpha}}} h_{j\,\sigma\overline{\delta}} dz_j^\alpha.$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
(A^* \cap \eta)_j^\zeta &= \sum_\tau A^{*\,\zeta}_{j\,\tau} \wedge \eta_j^\tau = \sum_\tau \left(\sum_\alpha \sum_{\gamma,\delta} h_j^{\overline{\gamma}\zeta} \overline{A^\delta_{j\,\gamma\overline{\alpha}}} h_{j\,\tau\overline{\delta}} dz_j^\alpha \right) \wedge \left(\frac{1}{q!} \sum_\beta \eta^\tau_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}} dz_j^{\overline{\beta_1}} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\beta_q}} \right) \\
&= \frac{1}{q!} \sum_{\alpha,\beta} \left(\sum_\tau \sum_{\gamma,\delta} h_j^{\overline{\gamma}\zeta} \overline{A^\delta_{j\,\gamma\overline{\alpha}}} h_{j\,\tau\overline{\delta}} \eta^\tau_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}} \right) dz_j^\alpha \wedge dz_j^{\overline{\beta_1}} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\beta_q}},
\end{aligned}$$

also erhalten wir für die Kontraktion $\phi := \sqrt{-1}\Lambda_g (A^* \cap \eta)$:

$$\phi_j^\zeta = \frac{1}{(q-1)!} \sum_\beta -\sqrt{-1}^2 \sum_{\alpha,\varrho} g_j^{\overline{\varrho}\alpha} \left(\sum_\tau \sum_{\gamma,\delta} h_j^{\overline{\gamma}\zeta} \overline{A^\delta_{j\,\gamma\overline{\alpha}}} h_{j\,\tau\overline{\delta}} \eta^\tau_{j\,\overline{\varrho}\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}} \right) dz_j^{\overline{\beta_1}} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\beta_{q-1}}}.$$

Nach dieser Vorbereitung berechnen wir auf U_j das Produkt von ψ mit der eben lokal ausgerechneten Differentialform und erhalten:

$$\begin{aligned}
&\left(\psi, \sqrt{-1}\Lambda_g (A^* \cap \eta)\right)\big|_{U_j} = \sum_{\lambda,\mu} h_{j\,\lambda\overline{\mu}} \left(\psi_j^\lambda, \phi_j^\mu \right) \\
&= \frac{1}{(q-1)!} \sum_{\lambda,\mu} h_{j\,\lambda\overline{\mu}} \sum_{\beta,\varepsilon} g_j^{\overline{\beta_1}\varepsilon_1} \cdots g_j^{\overline{\beta_{q-1}}\varepsilon_{q-1}} \psi^\lambda_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}} \overline{\phi^\mu_{j\,\overline{\varepsilon_1}\ldots\overline{\varepsilon_{q-1}}}} \\
&= \frac{1}{(q-1)!} \sum_{\lambda,\mu} h_{j\,\lambda\overline{\mu}} \sum_{\beta,\varepsilon} g_j^{\overline{\beta_1}\varepsilon_1} \cdots g_j^{\overline{\beta_{q-1}}\varepsilon_{q-1}} \psi^\lambda_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}} \overline{\sum_{\alpha,\varrho} g_j^{\overline{\varrho}\alpha} \left(\sum_\tau \sum_{\gamma,\delta} h_j^{\overline{\gamma}\mu} \overline{A^\delta_{j\,\gamma\overline{\alpha}}} h_{j\,\tau\overline{\delta}} \eta^\tau_{j\,\varrho\overline{\varepsilon_1}\ldots\overline{\varepsilon_{q-1}}} \right)} \\
&= \frac{1}{(q-1)!} \sum_{\lambda,\mu} h_{j\,\lambda\overline{\mu}} \sum_{\beta,\varepsilon} g_j^{\overline{\beta_1}\varepsilon_1} \cdots g_j^{\overline{\beta_{q-1}}\varepsilon_{q-1}} \psi^\lambda_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}} \sum_{\alpha,\varrho} g_j^{\overline{\alpha}\varrho} \left(\sum_\tau \sum_{\gamma,\delta} h_j^{\overline{\mu}\gamma} A^\delta_{j\,\gamma\overline{\alpha}} h_{j\,\delta\overline{\tau}} \overline{\eta^\tau_{j\,\varrho\overline{\varepsilon_1}\ldots\overline{\varepsilon_{q-1}}}} \right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(q-1)!}\sum_{\lambda}\sum_{\beta,\varepsilon} g_j^{\overline{\beta_1}\varepsilon_1}\cdots g_j^{\overline{\beta_{q-1}}\varepsilon_{q-1}}\psi^{\lambda}_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}}\sum_{\alpha,\varrho} g_j^{\overline{\alpha}\varrho}\left(\sum_{\tau,\delta} A^{\delta}_{j\,\lambda\overline{\alpha}}h_{j\,\delta\overline{\tau}}\overline{\eta^{\tau}_{j\,\overline{\varrho}\overline{\varepsilon_1}\ldots\overline{\varepsilon_{q-1}}}}\right)$$
$$= \frac{1}{(q-1)!}\sum_{\tau,\delta} h_{j\,\delta\overline{\tau}}\sum_{\beta,\varepsilon,\alpha,\varrho} g_j^{\overline{\beta_1}\varepsilon_1}\cdots g_j^{\overline{\beta_{q-1}}\varepsilon_{q-1}}g_j^{\overline{\alpha}\varrho}\sum_{\lambda}\left(A^{\delta}_{j\,\lambda\overline{\alpha}}\psi^{\lambda}_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}}\right)\overline{\eta^{\tau}_{j\,\overline{\varrho}\overline{\varepsilon_1}\ldots\overline{\varepsilon_{q-1}}}}.$$

Wir benennen α in β_q und ϱ in ε_q um und formen weiter um:

$$= \frac{1}{(q-1)!}\sum_{\tau,\delta} h_{j\,\delta\overline{\tau}}\sum_{\beta,\varepsilon} g_j^{\overline{\beta_1}\varepsilon_1}\cdots g_j^{\overline{\beta_q}\varepsilon_q}\sum_{\lambda}\left(A^{\delta}_{j\,\lambda\overline{\beta_q}}\psi^{\lambda}_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}}\right)\overline{\eta^{\tau}_{j\,\overline{\varepsilon_q}\overline{\varepsilon_1}\ldots\overline{\varepsilon_{q-1}}}}$$
$$= \frac{1}{(q-1)!}\sum_{\tau,\delta} h_{j\,\delta\overline{\tau}}\sum_{\beta,\varepsilon} g_j^{\overline{\beta_1}\varepsilon_1}\cdots g_j^{\overline{\beta_q}\varepsilon_q}(-1)^{q+1}\sum_{\lambda}\left(A^{\delta}_{j\,\lambda\overline{\beta_q}}\psi^{\lambda}_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}}\right)\overline{\eta^{\tau}_{j\,\overline{\varepsilon_1}\ldots\overline{\varepsilon_q}}}.$$

Nun summieren wir q-Kopien der Summe über die Indizes β und ε in künstlicher Abhängigkeit von einem Parameter ν auf. Da wir in jedem der q-Summanden über alle Möglichkeiten von β und ε summieren, können wir jeweils eine andere Permutation auf diese Indizes anwenden. Wir machen Gebrauch vom Parameter ν und wenden die Permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & \nu-1 & \nu & \nu+1 & \cdots & q-1 & q \\ 1 & \cdots & \nu-1 & \nu+1 & \nu+2 & \cdots & q & \nu \end{pmatrix}$$

im Summanden ν an. Dadurch erhalten wir:

$$= \frac{1}{(q-1)!}\sum_{\tau,\delta} h_{j\,\delta\overline{\tau}}\frac{1}{q}\sum_{\nu=1}^{q}\sum_{\beta,\varepsilon} g_j^{\overline{\beta_1}\varepsilon_1}\cdots g_j^{\overline{\beta_q}\varepsilon_q}(-1)^{q+1}\sum_{\lambda}\left(A^{\delta}_{j\,\lambda\overline{\beta_q}}\psi^{\lambda}_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}}\right)\overline{\eta^{\tau}_{j\,\overline{\varepsilon_1}\ldots\overline{\varepsilon_q}}}$$
$$= \frac{1}{q!}\sum_{\tau,\delta} h_{j\,\delta\overline{\tau}}\sum_{\nu}\sum_{\beta,\varepsilon} g_j^{\overline{\beta_1}\varepsilon_1}\cdots g_j^{\overline{\beta_q}\varepsilon_q}(-1)^{q+1}\sum_{\lambda}\left(A^{\delta}_{j\,\lambda\overline{\beta_\nu}}\psi^{\lambda}_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\widehat{\overline{\beta_\nu}}\ldots\overline{\beta_q}}\right)\overline{\eta^{\tau}_{j\,\overline{\varepsilon_1}\ldots\widehat{\overline{\varepsilon_\nu}}\ldots\overline{\varepsilon_q}\overline{\varepsilon_\nu}}}.$$

Nun tauschen wir im η-Anteil das ε_ν an seine eigentliche Stelle zurück, wodurch wir jeweils ein Vorzeichen $(-1)^{q-\nu}$ produzieren. Vergleichen wir das Ergebnis ferner mit (4.30), dann folgt:

$$= \frac{1}{q!}\sum_{\tau,\delta} h_{j\,\delta\overline{\tau}}\sum_{\nu}\sum_{\beta,\varepsilon} g_j^{\overline{\beta_1}\varepsilon_1}\cdots g_j^{\overline{\beta_q}\varepsilon_q}(-1)^{q+1+q-\nu}\sum_{\lambda}\left(A^{\delta}_{j\,\lambda\overline{\beta_\nu}}\psi^{\lambda}_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\widehat{\overline{\beta_\nu}}\ldots\overline{\beta_q}}\right)\overline{\eta^{\tau}_{j\,\overline{\varepsilon_1}\ldots\overline{\varepsilon_q}}}$$
$$= \frac{1}{q!}\sum_{\tau,\delta} h_{j\,\delta\overline{\tau}}\sum_{\beta,\varepsilon} g_j^{\overline{\beta_1}\varepsilon_1}\cdots g_j^{\overline{\beta_q}\varepsilon_q}\sum_{\nu,\lambda}(-1)^{\nu+1}\left(A^{\delta}_{j\,\lambda\overline{\beta_\nu}}\psi^{\lambda}_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\widehat{\overline{\beta_\nu}}\ldots\overline{\beta_q}}\right)\overline{\eta^{\tau}_{j\,\overline{\varepsilon_1}\ldots\overline{\varepsilon_q}}}$$
$$= (A\cap\psi,\eta)|_{U_j}\,.$$

Wir haben also gezeigt, dass für alle $\psi\in\Gamma\left(M,\mathcal{A}^{0,q-1}(E)\right)$ stets

$$\langle\psi, A\cup\eta\rangle = \langle A\cap\psi,\eta\rangle = \left\langle\psi,\sqrt{-1}\Lambda_g\left(A^*\cap\eta\right)\right\rangle$$

gilt, und folglich ist die behauptete Gleichung $A\cup\eta = \sqrt{-1}\Lambda_g\left(A^*\cap\eta\right)$ nachgewiesen. $\square$

Proposition 4.39. *Es sei (X, g) eine kompakte Kählermannigfaltigkeit, S eine komplexe Mannigfaltigkeit und $(F, h) \to X \times S$ eine Familie von hermiteschen, holomorphen Vektorbündeln auf X. Ferner seien eine holomorphe Koordinatenumgebung (V, s) auf S und für $q > 0$ eine $(0, q)$-Form $\mu \in \Gamma\left(X \times V, \mathcal{A}^{0,q}(F)\right)$ auf $X \times V$ mit Werten in F gegeben. Gilt nun $\bar{\partial}\mu = 0$ und ist $\bar{\partial}^*(\mu|_t) = 0$ für alle Punkte $t \in V$, dann folgt mit der Form*

$$F_{\bar{l}}(\mu) \in \Gamma\left(X \times V, \mathcal{A}^{0,q-1}(F)\right)$$

aus Lemma 4.29 in jedem Punkt $t \in V$:

$$\bar{\partial}^*\bar{\partial}\left(F_{\bar{l}}(\mu)\big|_t\right) = \left(\rho_{\bar{l}}\big|_t\right)^* \cup \mu|_t .$$

Beweis. Wir statten V mit der flachen Kählermetrik bezüglich der Koordinaten s aus. Nach Lemma 4.29 ist $\bar{\partial}\left(F_{\bar{l}}(\mu)\big|_t\right) = \left(\nabla_{\bar{l}}\mu\right)\big|_t$. Damit können wir die Form aus der Behauptung durch

$$\bar{\partial}^*\bar{\partial}\left(F_{\bar{l}}(\mu)\big|_t\right) = \bar{\partial}^*\left(\left(\nabla_{\bar{l}}\mu\right)\big|_t\right) \tag{4.31}$$

berechnen. Zu diesem Zweck schreiben wir μ lokal auf $U_j \times V$ als $\mu_j = (\mu_j^1, \ldots, \mu_j^r)^t$ mit

$$\mu_j^\zeta = \frac{1}{q!}\sum_\beta \mu^\zeta_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}} dz_j^{\overline{\beta_1}} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\beta_q}} + \text{ Summanden mit } d\bar{s}\text{-Faktoren},$$

wobei wir die Notationen aus 3.1 verwenden. Da F ein holomorphes Vektorbündel ist und wir V mit der flachen Kählermetrik ausgestattet haben, ist $\left(\nabla_{\bar{l}}\mu\right)_j = \left(\nabla_{\bar{l}}\mu_j^1, \ldots, \nabla_{\bar{l}}\mu_j^r\right)^t$ mit

$$\nabla_{\bar{l}}\mu_j^\zeta = \frac{1}{q!}\sum_\beta \partial_{\bar{l}}\mu^\zeta_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}} dz_j^{\overline{\beta_1}} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\beta_q}} + \text{ Summanden mit } d\bar{s}\text{-Faktoren}$$

und folglich wird $\left(\nabla_{\bar{l}}\mu\right)\big|_t$ lokal beschrieben durch

$$\nabla_{\bar{l}}\mu_j^\zeta\Big|_t = \frac{1}{q!}\sum_\beta \partial_{\bar{l}}\mu^\zeta_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}}(t) dz_j^{\overline{\beta_1}} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\beta_q}}.$$

Damit berechnen wir $\psi := \bar{\partial}^*\left(\left(\nabla_{\bar{l}}\mu\right)\big|_t\right)$ mit Satz 2.15:

$$\begin{aligned}
\psi_j^\zeta &= \frac{-1}{(q-1)!}\sum_\beta\sum_{\gamma,\alpha} g_j^{\bar{\gamma}\alpha}\left(\nabla_\alpha\partial_{\bar{l}}\mu^\zeta_{j\,\bar{\gamma}\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}}(t) + \sum_\tau \Gamma^\zeta_{j\,\alpha\tau}(t)\partial_{\bar{l}}\mu^\tau_{j\,\bar{\gamma}\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}}(t)\right) dz_j^{\overline{\beta_1}} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\beta_{q-1}}} \\
&= \frac{-1}{(q-1)!}\sum_\beta \partial_{\bar{l}}\big|_t\left(\sum_{\gamma,\alpha} g_j^{\bar{\gamma}\alpha}\left(\partial_\alpha\mu^\zeta_{j\,\bar{\gamma}\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}} + \sum_\tau \Gamma^\zeta_{j\,\alpha\tau}\mu^\tau_{j\,\bar{\gamma}\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}}\right)\right) dz_j^{\overline{\beta_1}} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\beta_{q-1}}} \\
&\quad + \frac{1}{(q-1)!}\sum_\beta\sum_{\gamma,\alpha} g_j^{\bar{\gamma}\alpha}\left(\sum_\tau \left(\partial_{\bar{l}}\Gamma^\zeta_{j\,\alpha\tau}(t)\right)\mu^\tau_{j\,\bar{\gamma}\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}}(t)\right) dz_j^{\overline{\beta_1}} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\beta_{q-1}}} \\
&=: R_1 + R_2.
\end{aligned}$$

Zunächst untersuchen wir R_1. Da nach Voraussetzung $\bar{\partial}^*(\mu|_t) = 0$ für alle Punkte $t \in V$ gilt, folgt für alle Indizes:

$$0 = \left(\bar{\partial}^*\left(\mu|_t\right)\right)^{\zeta}_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}} = -\sum_{\gamma,\alpha} g_j^{\overline{\gamma}\alpha}\left(\nabla_\alpha \mu^{\zeta}_{j\,\overline{\gamma}\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}}(t) + \sum_\tau \Gamma^{\zeta}_{j\,\alpha\tau}(t)\mu^{\tau}_{j\,\overline{\gamma}\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}}(t)\right).$$

Da diese Gleichung auf ganz V gilt, erhalten wir insbesondere auch für jeden Punkt $t \in V$

$$\partial_{\bar{l}}\big|_t \left(\sum_{\gamma,\alpha} g_j^{\overline{\gamma}\alpha}\left(\partial_\alpha \mu^{\zeta}_{j\,\overline{\gamma}\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}} + \sum_\tau \Gamma^{\zeta}_{j\,\alpha\tau}\mu^{\tau}_{j\,\overline{\gamma}\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}}\right)\right) = 0,$$

also ist $R_1 = 0$ und wir finden:

$$\psi_j^\zeta = R_2 = \frac{1}{(q-1)!}\sum_\beta\sum_{\gamma,\alpha} g_j^{\overline{\gamma}\alpha}\left(\sum_\tau\left(\partial_{\bar{l}}\Gamma^{\zeta}_{j\,\alpha\tau}(t)\right)\mu^{\tau}_{j\,\overline{\gamma}\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}}(t)\right) dz_j^{\overline{\beta_1}} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\beta_{q-1}}}. \tag{4.32}$$

Wir berechnen nun $\left(\rho_{\bar{l}}\big|_t\right) \cap \mu|_t$

$$\begin{aligned}\left(\left(\rho_{\bar{l}}\big|_t\right) \cap \mu|_t\right)_j^\zeta &= \sum_\tau\left(\sum_\alpha -R^{\zeta}_{j\,\tau\alpha\bar{l}}(t)dz_j^\alpha\right) \wedge \left(\frac{1}{q!}\sum_\beta \mu^\tau_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}}(t)dz_j^{\overline{\beta_1}} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\beta_q}}\right)\\ &= \frac{1}{q!}\sum_{\alpha,\beta}\sum_\tau -R^{\zeta}_{j\,\tau\alpha\bar{l}}(t)\mu^\tau_{j\,\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}}(t)dz_j^\alpha \wedge dz_j^{\overline{\beta_1}} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\beta_q}}\end{aligned}$$

und damit:

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{-1}\Lambda_g\left(\rho_{\bar{l}}\big|_t\right) \cap \mu|_t\right)_j^\zeta &= \frac{-\sqrt{-1}^2}{(q-1)!}\sum_\beta\sum_{\alpha,\gamma} g_j^{\overline{\gamma}\alpha}\sum_\tau -R^{\zeta}_{j\,\tau\alpha\bar{l}}(t)\mu^\tau_{j\,\overline{\gamma}\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}}(t)dz_j^{\overline{\beta_1}} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\beta_{q-1}}}\\ &= \frac{1}{(q-1)!}\sum_\beta\sum_{\alpha,\gamma} g_j^{\overline{\gamma}\alpha}\sum_\tau\left(\partial_{\bar{l}}\Gamma^{\zeta}_{j\,\alpha\tau}(t)\right)\mu^\tau_{j\,\overline{\gamma}\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}}(t)dz_j^{\overline{\beta_1}} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\beta_{q-1}}}.\end{aligned}$$

Mit Blick auf (4.31) und (4.32) sowie unter Ausnutzung von Proposition 4.38 erhalten wir schließlich die Identität

$$\begin{aligned}\bar{\partial}^*\bar{\partial}\left(F_{\bar{l}}(\mu)\big|_t\right) &= \bar{\partial}^*\left(\left(\nabla_{\bar{l}}\mu\right)\big|_t\right) = \psi = \sqrt{-1}\Lambda_g\left(\rho_{\bar{l}}\big|_t\right) \cap \mu|_t\\ &= \left(\rho_{\bar{l}}\big|_t\right)^* \cup \left(\mu|_t\right),\end{aligned}$$

womit alles gezeigt ist. □

Mit den bereitgestellten Ergebnissen kommen wir nun auf die Berechnung des letzten verbliebenen Summanden S_{2a} zurück. Dazu erinnern wir zunächst noch einmal daran, dass dieser nach (4.24) die Gestalt

$$S_{2a} = \left\langle \nabla_k\nabla_{\bar{l}}\xi_\rho, \xi_\sigma\right\rangle(s_0) = \left\langle \left(\nabla_k\nabla_{\bar{l}}\xi_\rho\right)\big|_{s_0}, \xi_\sigma|_{s_0}\right\rangle$$

besitzt. Ist $q = 0$, dann ist ξ_ρ nach Konstruktion eine bündelwertige $(0,0)$-Form mit $\bar\partial\xi_\rho = 0$ und damit ein holomorpher Schnitt des Vektorbündels F. In diesem Fall ist also $\nabla_{\bar l}\xi_\rho = 0$ und folglich auch $S_{2a} = 0$. Es sei also $q > 0$. Dann berechnen wir mit Proposition 4.37:

$$\begin{aligned} S_{2a} &= \left\langle \left(\nabla_k\nabla_{\bar l}\xi_\rho\right)\big|_{s_0}, \xi_\sigma|_{s_0}\right\rangle = \left\langle \bar\partial\left(\left(\nabla_k F_{\bar l}\left(\xi_\rho\right)\right)\big|_{s_0}\right), \xi_\sigma|_{s_0}\right\rangle + \left\langle \rho_k|_{s_0} \cap \left(F_{\bar l}\left(\xi_\rho\right)\big|_{s_0}\right), \xi_\sigma|_{s_0}\right\rangle \\ &= \left\langle \left(\nabla_k F_{\bar l}\left(\xi_\rho\right)\right)\big|_{s_0}, \bar\partial^*\left(\xi_\sigma|_{s_0}\right)\right\rangle + \left\langle \rho_k|_{s_0} \cap \left(F_{\bar l}\left(\xi_\rho\right)\big|_{s_0}\right), \xi_\sigma|_{s_0}\right\rangle \\ &= \left\langle \rho_k|_{s_0} \cap \left(F_{\bar l}\left(\xi_\rho\right)\big|_{s_0}\right), \xi_\sigma|_{s_0}\right\rangle. \end{aligned}$$

Dabei ist $\bar\partial^*\left(\xi_\sigma|_{s_0}\right) = 0$, da $\xi_\sigma|_{s_0}$ nach Konstruktion harmonisch ist. Indem wir die Propositionen 3.22 und 4.39 einsetzen, formen wir weiter um:

$$\begin{aligned} S_{2a} &= \left\langle \rho_k|_{s_0} \cap \left(F_{\bar l}\left(\xi_\rho\right)\big|_{s_0}\right), \xi_\sigma|_{s_0}\right\rangle = \left\langle F_{\bar l}\left(\xi_\rho\right)\big|_{s_0}, \rho_k|_{s_0} \cup \xi_\sigma|_{s_0}\right\rangle \\ &= -\left\langle F_{\bar l}\left(\xi_\rho\right)\big|_{s_0}, \left(\rho_{\bar k}|_{s_0}\right)^* \cup \xi_\sigma|_{s_0}\right\rangle = -\left\langle F_{\bar l}\left(\xi_\rho\right)\big|_{s_0}, \bar\partial^*\bar\partial\left(F_{\bar k}\left(\xi_\sigma\right)\big|_{s_0}\right)\right\rangle \\ &= -\left\langle \bar\partial\left(F_{\bar l}\left(\xi_\rho\right)\big|_{s_0}\right), \bar\partial\left(F_{\bar k}\left(\xi_\sigma\right)\big|_{s_0}\right)\right\rangle. \end{aligned}$$

Da die Hodge-Zerlegung

$$\Gamma\left(X, \mathcal{A}^{0,q}\left(F_{s_0}\right)\right) = \bar\partial\Gamma\left(X, \mathcal{A}^{0,q-1}\left(F_{s_0}\right)\right) \oplus \mathcal{H}^{0,q}(X, F_{s_0}, h_{s_0}) \oplus \bar\partial^*\Gamma\left(X, \mathcal{A}^{0,q+1}\left(F_{s_0}\right)\right)$$

direkt ist, folgt für die harmonische Projektion

$$H\left(\bar\partial\left(F_{\bar l}\left(\xi_\rho\right)\big|_{s_0}\right)\right) = 0$$

und damit:

$$\begin{aligned} \bar\partial\left(F_{\bar l}\left(\xi_\rho\right)\big|_{s_0}\right) &= H\left(\bar\partial\left(F_{\bar l}\left(\xi_\rho\right)\big|_{s_0}\right)\right) + \Box_{\bar\partial} \circ G\left(\bar\partial\left(F_{\bar l}\left(\xi_\rho\right)\big|_{s_0}\right)\right) \\ &= G\left(\left(\bar\partial^*\bar\partial + \bar\partial\bar\partial^*\right)\bar\partial\left(F_{\bar l}\left(\xi_\rho\right)\big|_{s_0}\right)\right) = G\left(\bar\partial\bar\partial^*\bar\partial\left(F_{\bar l}\left(\xi_\rho\right)\big|_{s_0}\right)\right) \\ &= \bar\partial G\left(\bar\partial^*\bar\partial\left(F_{\bar l}\left(\xi_\rho\right)\big|_{s_0}\right)\right). \end{aligned}$$

Indem wir diese Gleichung und erneut die Propositionen 3.22 sowie 4.39 einsetzen, können wir weiterrechnen:

$$\begin{aligned} S_{2a} &= -\left\langle \bar\partial\left(F_{\bar l}\left(\xi_\rho\right)\big|_{s_0}\right), \bar\partial\left(F_{\bar k}\left(\xi_\sigma\right)\big|_{s_0}\right)\right\rangle = -\left\langle \bar\partial G\left(\bar\partial^*\bar\partial\left(F_{\bar l}\left(\xi_\rho\right)\big|_{s_0}\right)\right), \bar\partial\left(F_{\bar k}\left(\xi_\sigma\right)\big|_{s_0}\right)\right\rangle \\ &= -\left\langle G\left(\bar\partial^*\bar\partial\left(F_{\bar l}\left(\xi_\rho\right)\big|_{s_0}\right)\right), \bar\partial^*\bar\partial\left(F_{\bar k}\left(\xi_\sigma\right)\big|_{s_0}\right)\right\rangle \\ &= -\left\langle G\left(\left(\rho_{\bar l}|_{s_0}\right)^* \cup \xi_\rho|_{s_0}\right), \left(\rho_{\bar k}|_{s_0}\right)^* \cup \xi_\sigma|_{s_0}\right\rangle \\ &= -\left\langle G\left(\rho_l|_{s_0} \cup \xi_\rho|_{s_0}\right), \rho_k|_{s_0} \cup \xi_\sigma|_{s_0}\right\rangle. \end{aligned} \tag{4.33}$$

Wir tragen nun alle unsere Ergebnisse noch einmal zusammen und haben folgendes Resultat:

Theorem 4.40. *Es sei (X, g) eine kompakte Kählermannigfaltigkeit, S eine komplexe Mannigfaltigkeit und $(F, h) \to X \times S$ eine Familie von Hermite-Einstein-Vektorbündeln auf X. Ist $s_0 \in S \setminus A_q(F)$ ein nichtsingulärer Punkt der höheren direkten Bildgarbe $R^q p_* \mathcal{O}(F)$ zu $q \in \mathbb{N}$, dann gibt es eine holomorphe Koordinatenumgebung (W, s) um s_0 herum sowie einen Rahmen $\Xi_1, \ldots, \Xi_R \in \Gamma(W, \mathcal{O}(R^q p_* \mathcal{O}(F)))$, so dass für den Krümmungstensor der natürlichen L_2-Metrik, welcher lokal durch*

$$\Theta^{\rho}_{L_2\,\sigma} = \sum_{k,l} R^{\rho}_{L_2\,\sigma k\bar{l}} ds^k \wedge ds^{\bar{l}}$$

gegeben wird, im Fall $q > 0$ gilt:

$$\begin{aligned} R^{\rho}_{L_2\,\sigma k\bar{l}}(s_0) = &\left\langle G\left(\rho_{s_0}\left(\left.\frac{\partial}{\partial s^l}\right|_{s_0}\right) \cup \Xi_\rho(s_0)\right), \rho_{s_0}\left(\left.\frac{\partial}{\partial s^k}\right|_{s_0}\right) \cup \Xi_\sigma(s_0)\right\rangle \\ &- \left\langle G\left(\sqrt{-1}\Lambda_g\left[\rho_{s_0}\left(\left.\frac{\partial}{\partial s^k}\right|_{s_0}\right), \rho_{s_0}\left(\left.\frac{\partial}{\partial s^l}\right|_{s_0}\right)^*\right]\right) \cap \Xi_\rho(s_0), \Xi_\sigma(s_0)\right\rangle \\ &- \left\langle G\left(\rho_{s_0}\left(\left.\frac{\partial}{\partial s^k}\right|_{s_0}\right) \cap \Xi_\rho(s_0)\right), \rho_{s_0}\left(\left.\frac{\partial}{\partial s^l}\right|_{s_0}\right) \cap \Xi_\sigma(s_0)\right\rangle \\ &+ \left\langle H\left(\left.\rho_{k\bar{l}}\right|_{s_0}\right) \cap \Xi_\rho(s_0), \Xi_\sigma(s_0)\right\rangle. \end{aligned}$$

Im Spezialfall $q = \dim_{\mathbb{C}} X$ verschwindet hier der dritte Summand. Im Fall $q = 0$ gilt hingegen:

$$\begin{aligned} R^{\rho}_{L_2\,\sigma k\bar{l}}(s_0) = &- \left\langle G\left(\sqrt{-1}\Lambda_g\left[\rho_{s_0}\left(\left.\frac{\partial}{\partial s^k}\right|_{s_0}\right), \rho_{s_0}\left(\left.\frac{\partial}{\partial s^l}\right|_{s_0}\right)^*\right]\right) \cap \Xi_\rho(s_0), \Xi_\sigma(s_0)\right\rangle \\ &- \left\langle G\left(\rho_{s_0}\left(\left.\frac{\partial}{\partial s^k}\right|_{s_0}\right) \cap \Xi_\rho(s_0)\right), \rho_{s_0}\left(\left.\frac{\partial}{\partial s^l}\right|_{s_0}\right) \cap \Xi_\sigma(s_0)\right\rangle \\ &+ \left\langle H\left(\left.\rho_{k\bar{l}}\right|_{s_0}\right) \cap \Xi_\rho(s_0), \Xi_\sigma(s_0)\right\rangle. \end{aligned}$$

Dabei haben wir die Faser $(R^q p_* \mathcal{O}(F))_{s_0}$ mit den harmonischen Formen $\mathcal{H}^{0,q}(X, F_{s_0}, h_{s_0})$ identifiziert, so dass $\Xi_\zeta(s_0)$ den entsprechenden harmonischen Repräsentanten bezeichnet, und ferner ist

$$\rho_{s_0} : T_{s_0} S \longrightarrow \mathcal{H}^{0,1}(X, \mathrm{End}(F_{s_0}), H_{s_0})$$

die Kodaira-Spencer-Abbildung im Punkt s_0.

Beweis. Da $s_0 \in S \setminus A_q(F)$ vorausgesetzt wurde, kann die Rechnung aus diesem Abschnitt durchgeführt werden und liefert mit (4.8), (4.18), (4.19), (4.24), (4.25) sowie (4.33) für $q > 0$:

$$\begin{aligned} R^{\rho}_{L_2\,\sigma k\bar{l}}(s_0) &= -\partial_{\bar{l}}\partial_k \langle \xi_\rho, \xi_\sigma \rangle (s_0) = -S_1 - S_2 = -S_1 - (S_{2_a} + S_{2_b}) \\ &= -\left\langle G\left(\rho_k|_{s_0} \cap \xi_\rho|_{s_0}\right), \rho_l|_{s_0} \cap \xi_\sigma|_{s_0}\right\rangle + \left\langle G\left(\rho_l|_{s_0} \cup \xi_\rho|_{s_0}\right), \rho_k|_{s_0} \cup \xi_\sigma|_{s_0}\right\rangle \\ &\quad + \left\langle H\left(\rho_{k\bar{l}}|_{s_0}\right) \cap \xi_\rho|_{s_0}, \xi_\sigma|_{s_0}\right\rangle + \left\langle G\left(\sqrt{-1}\Lambda_g\left[\rho_k|_{s_0}, \rho_{\bar{l}}|_{s_0}\right]\right) \cap \xi_\rho|_{s_0}, \xi_\sigma|_{s_0}\right\rangle. \end{aligned}$$

Berücksichtigen wir nun noch, dass stets $\xi_\zeta|_{s_0} = \Xi_\zeta(s_0)$ sowie

$$\rho_{s_0}\left(\left.\frac{\partial}{\partial s^k}\right|_{s_0}\right) = -\,\rho_k|_{s_0}$$

und nach Proposition 3.22 auch

$$\left(\rho_{\bar{l}}|_{s_0}\right)^* = -\,\rho_l|_{s_0}$$

gilt, dann folgt die erste Behauptung. Da ferner nach unseren Überlegungen der Unterschied im Fall $q = 0$ lediglich darin besteht, dass der Summand S_{2a} verschwindet, ist auch die zweite Formel gezeigt. □

Wie wir bereits während der Rechung in diesem Abschnitt erwähnt haben, stört in diesen Formeln noch der Summand

$$\left\langle H\left(\rho_{k\bar{l}}|_{s_0}\right) \cap \Xi_\rho(s_0), \Xi_\sigma(s_0)\right\rangle,$$

welcher nicht alleine auf lineare Weise mit der Kodaira-Spencer-Abbildung und einer Basis des Raums $\mathcal{H}^{0,q}(X, F_{s_0}, h_{s_0})$ der harmonischen Formen ausgedrückt werden kann. Da er im Allgemeinen nicht verschwindet, untersuchen wir in den folgenden beiden Abschnitten Bedingungen an eine allgemeine Familie sowie speziell Familien von Endomorphismenbündeln mit dem Ziel, zumindest in diesen Situationen $H\big(\rho_{k\bar{l}}|_{s_0}\big) = 0$ zu erhalten.

4.3. Familien mit fester Determinante

Sei (X, g) eine kompakte Kählermannigfaltigkeit und S eine komplexe Mannigfaltigkeit. Wir untersuchen in diesem Abschnitt Familien $(F, h) \to X \times S$ von Hermite-Einstein-Vektorbündeln, deren Fasern allesamt dieselbe Determinante besitzen, d.h. von denen wir für alle $t \in S$

$$\det(F_t) \simeq L$$

für ein festes Geradenbündel L auf X fordern. Da wir auch hierfür lokal arbeiten werden, halten wir zunächst einige vorbereitende Überlegungen zur lokalen Charakterisierung der Isomorphie von Vektorbündeln fest.

Sind $\pi : E \to M$ und $\pi' : E' \to M$ zwei holomorphe Vektorbündel über der komplexen Mannigfaltigkeit M, dann heißen E und E' bekanntlich isomorph, falls es eine biholomorphe Abbildung $\varphi : E \to E'$ gibt, so dass φ mit den Projektionen kommutiert, d.h. $\pi = \pi' \circ \varphi$ gilt, und für jeden Punkt $m \in M$ die induzierte Abbildung $\varphi_m : \pi^{-1}(m) \to (\pi')^{-1}(m)$ der Fasern $\mathbb{C}$-linear und damit sogar ein $\mathbb{C}$-Vektorraumisomorphismus ist. Seien nun $\{U_j\}$ eine offene Überdeckung von M, bezüglich der sowohl E als auch E' vermöge $f_j : \pi^{-1}(U_j) \to U_j \times \mathbb{C}^r$ beziehungsweise $f'_j : (\pi')^{-1}(U_j) \to U_j \times \mathbb{C}^r$ trivialisiert werden kann, und $f_{jk} : U_j \cap U_k \to \mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$ sowie $f'_{jk} : U_j \cap U_k \to \mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$ die zugehörigen Transitionsfunktionen. Wir wollen ein lokales Kriterium für die Isomorphie dieser Vektorbündel angeben. Sei dazu zunächst angenommen, dass ein Isomorphismus $\varphi : E \to E'$ existiert. Dann haben wir über U_j das kommutative Diagramm,

$$\begin{tikzcd}
U_j \times \mathbb{C}^r \arrow[drr, "\pi_1"'] & \pi^{-1}(U_j) \arrow[l, "f_j"'] \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"] & & (\pi')^{-1}(U_j) \arrow[r, "f'_j"] \arrow[dl, "\pi'"'] & U_j \times \mathbb{C}^r \arrow[dll, "\pi_1"] \\
& & U_j & &
\end{tikzcd}$$

so dass wir φ lokal durch holomorphe Abbildungen $\varphi_j : U_j \to \mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$ beschreiben können, welche durch $f'_j \circ \varphi \circ f_j^{-1}(x, v) = (x, \varphi_j(x)(v))$ definiert werden. Auf $U_j \cap U_k$ berechnen wir dann

$$(f'_j)^{-1} \circ ((x, v) \mapsto (x, \varphi_j(x)(v))) \circ f_j = \varphi|_{U_j \cap U_k} = (f'_k)^{-1} \circ ((x, v) \mapsto (x, \varphi_k(x)(v))) \circ f_k,$$

so dass folgt:

$$((x, v) \mapsto (x, \varphi_j(x)(v))) = (f'_j) \circ (f'_k)^{-1} \circ ((x, v) \mapsto (x, \varphi_k(x)(v))) \circ f_k \circ f_j^{-1}.$$

Die Bedingung dafür, dass solche lokal durch φ_j gegebenen Abbildungen Anlass zu einem Bündelisomorphismus geben, ist also $\varphi_j = f'_{jk} \cdot \varphi_k \cdot f_{kj}$ jeweils auf $U_j \cap U_k$.

Seien nun zusätzlich hermitesche Metriken h auf E sowie h' auf E' gegeben. Dann nennen wir den Isomorphismus $\varphi : E \to E'$ einen Isomorphismus hermitescher Vektorbündel, falls φ mit den Metriken verträglich ist, d.h. falls für alle Vektoren $v, w \in E$ mit $\pi(v) = \pi(w)$ stets $\langle \varphi(v), \varphi(w) \rangle_{h'} = \langle v, w \rangle_h$ gilt. Beschreiben wir die hermiteschen Metriken lokal durch die Funktionen $h_j : U_j \to \mathbb{C}^{r \times r}$ beziehungsweise $h'_j : U_j \to \mathbb{C}^{r \times r}$, dann ist die an die lokalen Abbildungen φ_j zu stellende Bedingung dafür, dass φ ein Isomorphismus hermitescher Vektorbündel ist, offenbar $\varphi_j^t \cdot h'_j \cdot \overline{\varphi_j} = h_j$.

Der Übersichtlichkeit wegen fassen wir diese Überlegungen noch einmal in der folgenden Proposition zusammen:

Proposition 4.41. *Es seien $E \to M$ und $E' \to M$ zwei holomorphe Vektorbündel auf einer komplexen Mannigfaltigkeit M, welche bezüglich einer offenen Überdeckung $\{U_j\}$ von M durch die Transitionsfunktionen*

$$f_{jk} : U_j \cap U_k \longrightarrow \mathrm{GL}(r, \mathbb{C}) \qquad \textit{sowie} \qquad f'_{jk} : U_j \cap U_k \longrightarrow \mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$$

beschrieben werden. Dann gilt: E und E' sind genau dann isomorph, wenn es holomorphe Abbildungen $\varphi_j : U_j \to \mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$ gibt, welche auf $U_j \cap U_k$ das Transitionsverhalten $\varphi_j = f'_{jk} \cdot \varphi_k \cdot f_{kj}$ besitzen.

Sind ferner h und h' hermitesche Metriken auf E beziehungsweise E', lokal beschrieben durch

$$h_j : U_j \longrightarrow \mathbb{C}^{r \times r} \qquad \textit{und} \qquad h'_j : U_j \longrightarrow \mathbb{C}^{r \times r},$$

dann gibt es genau dann einen Isomorphismus hermitescher Vektorbündel zwischen (E, h) und (E', h'), falls zusätzlich die Bedingung $\varphi_j^t \cdot h'_j \cdot \overline{\varphi_j} = h_j$ erfüllt ist.

Als nächstes interessieren wir uns für eine Möglichkeit, verschiedene hermitesche Metriken auf einem Vektorbündel miteinander zu vergleichen. Mit der folgenden allgemein bekannten Aussage klären wir die Situation erschöpfend auf. Wir werden davon später vor allem im Hinblick auf Metriken, welche auf Familien von Vektorbündeln gegeben sind, Gebrauch machen.

Proposition 4.42. *Sei $E \to M$ ein holomorphes Vektorbündel auf der komplexen Mannigfaltigkeit M, welches auf den Elementen U_j einer offenen Überdeckung $\{U_j\}$ von M trivialisiert werden kann. Sind ferner zwei hermitesche Metriken h und h' auf E gegeben, welche auf U_j durch $h_j : U_j \to \mathbb{C}^{r\times r}$ sowie $h'_j : U_j \to \mathbb{C}^{r\times r}$ beschrieben werden, dann existiert ein Endomorphismus*

$$B \in \Gamma\left(M, \mathcal{A}^{0,0}(\mathrm{End}(E))\right),$$

lokal beschrieben durch $B_j : U_j \to \mathbb{C}^{r\times r}$, welcher selbstadjungiert bezüglich h sowie h' ist und derart, dass stets gilt:

$$h'_j = B_j^t \cdot h_j.$$

In dieser Situation schreiben wir auch kurz $h' = B \cdot h$.

Beweis. Die Transitionsfunktionen von E seien mit $f_{jk} : U_j \cap U_k \to \mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$ bezeichnet. Wir definieren auf U_j die glatten Funktionen

$$B_j := \left(h'_j h_j^{-1}\right)^t : U_j \longrightarrow \mathbb{C}^{r\times r}.$$

Dann gilt offenbar lokal die behauptete Gleichung. Auf $U_j \cap U_k$ berechnen wir unter Ausnutzung des Transformationsverhaltens der lokalen Darstellung der hermiteschen Metriken aus (2.4):

$$\begin{aligned} B_k = \left(h'_k h_k^{-1}\right)^t &= \left(f_{jk}^t h'_j \overline{f_{jk}} \left(f_{jk}^t h_j \overline{f_{jk}}\right)^{-1}\right)^t = \left(f_{jk}^t h'_j \overline{f_{jk} f_{kj}} h_j^{-1} f_{kj}^t\right)^t \\ &= f_{kj}\left(h'_j h_j^{-1}\right)^t f_{jk} = f_{kj} B_j f_{jk}. \end{aligned}$$

Also liegt das erforderliche Transformationsverhalten eines Schnittes von $\mathrm{End}(E)$ vor, genauer finden wir

$$B^{\rho}_{k\,\sigma} = \sum_{\mu,\nu} f^{\rho}_{kj\,\mu} B^{\mu}_{j\,\nu} f^{\nu}_{jk\,\sigma} = \sum_{\mu,\nu} g^{\rho\sigma}_{kj\,\mu\nu} B^{\mu}_{j\,\nu}$$

mit den Transitionsfunktionen $g_{kj} : U_j \to \mathbb{C}^{r^2\times r^2}$ des Endomorphismenbündels. Wir berechnen nun B^* bezüglich der Metrik h mit der Definition aus Abschnitt 2.2:

$$\begin{aligned} B_j^* = \left(h_j \overline{B_j} h_j^{-1}\right)^t &= \left(h_j \overline{\left(h'_j h_j^{-1}\right)^t} h_j^{-1}\right)^t = \left(h_j \overline{h_j^{-1}}^t \overline{h'_j}^t h_j^{-1}\right)^t \\ &= \left(h_j h_j^{-1} h'_j h_j^{-1}\right)^t = \left(h'_j h_j^{-1}\right)^t = B_j. \end{aligned}$$

Außerdem berechnen wir $B^{*'}$ bezüglich h':

$$\begin{aligned} B_j^{*'} = \left(h'_j \overline{B_j} (h'_j)^{-1}\right)^t &= \left(h'_j \overline{\left(h'_j \cdot h_j^{-1}\right)^t} (h'_j)^{-1}\right)^t = \left(h'_j \overline{h_j^{-1}}^t \overline{h'_j}^t (h'_j)^{-1}\right)^t \\ &= \left(h'_j h_j^{-1} h'_j (h'_j)^{-1}\right)^t = \left(h'_j h_j^{-1}\right)^t = B_j. \end{aligned}$$

Also ist B wie behauptet selbstadjungiert sowohl bezüglich h als auch bezüglich h'. $\square$

Ist die Mannigfaltigkeit eine kompakte Kählermannigfaltigkeit und genügen die Metriken der Hermite-Einstein-Bedingung, dann zeigt die folgende Aussage, dass der Endomorphismus B eine besonders einfache Gestalt besitzt.

Satz 4.43. *Es sei $E \to X$ ein holomorphes Vektorbündel auf der kompakten Kählermannigfaltigkeit (X, g). Sind h und h' zwei Hermite-Einstein-Metriken in E, dann unterscheiden sich diese nur um eine positive Konstante, d.h. es gilt $h' = B \cdot h$ für einen Endomorphismus $B = \lambda \cdot \mathrm{id}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$.*

Der Beweis verwendet als wesentliches Hilfsmittel einen Verschwindungssatz für globale holomorphe Schnitte in holomorphen Vektorbündeln, welcher auf Kobayashi zurückgeht. Für Details verweisen wir auf [Kb87, LT95]. Auf die Bedingung, dass g eine Kählermetrik ist, kann dabei verzichtet werden.

Proposition 4.44. *Sei $(F, h) \to X \times S$ eine Familie von Hermite-Einstein-Vektorbündeln auf der kompakten Kählermannigfaltigkeit (X, g), parametrisiert durch die komplexe Mannigfaltigkeit S, und bezeichne $\kappa(t) \in \mathbb{R}$ die Hermite-Einstein-Konstante für $t \in S$. Dann ist auch die Determinante*

$$(\det(F), \det(h)) \longrightarrow X \times S$$

eine Familie von Hermite-Einstein-Vektorbündeln auf X mit der Hermite-Einstein-Konstante $\kappa(t) \cdot \mathrm{rk}(F)$ für $t \in S$.

Beweis. Wir arbeiten mit den Notationen aus 3.1. Für einen festen Punkt $t \in S$ haben wir auf $U_j \times V$ mit $t \in V$ die Hermite-Einstein-Bedingung:

$$\sum_{\alpha,\beta} g_j^{\overline{\beta}\alpha} R^{\rho}_{jF\,\sigma\alpha\overline{\beta}}(t) = \kappa(t)\delta^{\rho}_{\sigma}.$$

Nach Satz 2.11 ist $\Omega_{\det(F)} = \mathrm{tr}(\Omega_F)$, so dass wir lokal die Gleichung

$$R^{1}_{j\,\det(F)\,1\alpha\overline{\beta}} = \sum_{\rho} R^{\rho}_{jF\,\rho\alpha\overline{\beta}}$$

für alle $1 \leqslant \alpha, \beta \leqslant n + m$ haben. Damit berechnen wir

$$\sum_{\alpha,\beta} g_j^{\overline{\beta}\alpha} R^{1}_{j\,\det(F)\,1\alpha\overline{\beta}}(t) = \sum_{\rho} \left(\sum_{\alpha,\beta} g_j^{\overline{\beta}\alpha} R^{\rho}_{jF\,\rho\alpha\overline{\beta}}(t) \right) = \sum_{\rho} \kappa(t)\delta^{\rho}_{\rho} = \kappa(t) \cdot \mathrm{rk}(F)$$

und folglich ist $(\det(F)_t, \det(h)_t) \to X$ ein Hermite-Einstein-Vektorbündel. □

Wir wollen als nächstes eine lokale Beschreibung von Vektorbündeln der speziellen Gestalt $(p_X^*(L)) \otimes (p_S^*(M)) \to X \times S$ für Geradenbündel L auf X sowie M auf S herleiten. Derartige Bündel spielen als Hilfsmittel für den Beweis des Hauptresultats dieses Abschnittes eine herausragende Rolle. Dabei verwenden wir ausnahmsweise die Bezeichnung p_X für die Projektion auf X sowie p_S für die Projektion auf S. Zunächst benötigen wir folgendes Lemma zur lokalen Beschreibung des Pullbacks von Vektorbündeln auf Produkte von Mannigfaltigkeiten:

Lemma 4.45. *Seien M_1, M_2 komplexe Mannigfaltigkeiten und $(E,h) \to M_1$ ein hermitesches, holomorphes Vektorbündel. Ist $\{W_j\}$ eine offene Überdeckung von M_1, so dass (E,h) durch die Funktionen $f_{jk} : W_j \cap W_k \to \mathrm{GL}(r,\mathbb{C})$ sowie $h_j : W_j \to \mathbb{C}^{r\times r}$ beschrieben wird, dann kann das Bündel $(\pi_1^*(E), \pi_1^*(h)) \to M_1 \times M_2$ über der offenen Überdeckung $\{W_j \times M_2\}$ durch*

$$g_{jk} : (W_j \times M_2) \cap (W_k \times M_2) \longrightarrow \mathrm{GL}(r,\mathbb{C}), \qquad (x,y) \longmapsto f_{jk}(x)$$

sowie

$$(\pi_1^*(h))_j : W_j \times M_2 \longrightarrow \mathbb{C}^{r\times r}, \qquad (x,y) \longmapsto h_j(x)$$

beschrieben werden.

Beweis. Zunächst können wir das zurückgezogene Bündel $\pi_1^*(E)$ als Menge durch

$$\begin{aligned}\pi_1^*(E) &= \{((x,y),e) \in (M_1 \times M_2) \times E \mid \pi_1(x,y) = \pi(e)\}\\ &= \{((x,y),e) \in (M_1 \times M_2) \times E \mid \pi(e) = x\}\end{aligned}$$

realisieren (vergleiche Abschnitt 3.1). Dann ist die Bündelabbildung $\pi' : \pi_1^*(E) \to M_1 \times M_2$ die Projektion auf den ersten Faktor. Seien nun $f_j : \pi^{-1}(W_j) \to W_j \times \mathbb{C}^r$ die Trivialisierungen von E über den W_j, so dass die Transitionsfunktionen f_{jk} aus diesen Trivialisierungen entstehen, also $f_{jk}(x) = \pi_2 \circ f_j \circ f_k^{-1}(x,\cdot)$ gilt. Dann erhalten wir aus f_j eine Trivialisierung des Bündels $\pi_1^*(E)$ über der Menge $\pi_1^{-1}(W_j) = W_j \times M_2$ durch

$$g_j : (\pi')^{-1}(W_j \times M_2) \longrightarrow (W_j \times M_2) \times \mathbb{C}^r, \qquad ((x,y),e) \longmapsto ((x,y), \pi_2 \circ f_j(e))$$

und folglich sind die Transitionsfunktionen gerade

$$g_{jk} : (W_j \times M_2) \cap (W_k \times M_2) \longrightarrow \mathrm{GL}(r,\mathbb{C}) \qquad \text{mit} \qquad g_{jk}(x,y) = \pi_2 \circ g_j \circ g_k^{-1}((x,y),\cdot).$$

Sei nun $v \in \mathbb{C}^r$ ein Vektor. Wir wollen $g_{jk}(x,y)(v) = \pi_2 \circ g_j \circ g_k^{-1}((x,y),v)$ berechnen. Zunächst existiert genau ein $p \in (\pi')^{-1}(W_k \times M_2)$ mit $g_k(p) = ((x,y),v)$, d.h. mit $g_k^{-1}((x,y),v) = p$. Wir schreiben $p = ((w,z),e)$. Dann ist

$$((x,y),v) = g_k(p) = g_k((w,z),e) = ((w,z), \pi_2 \circ f_k(e)).$$

Folglich ist $x = w$, $y = z$ sowie $v = \pi_2 \circ f_k(e)$ und damit insbesondere $p = ((x,y),e)$. Ferner gilt nach Konstruktion $p \in \pi_1^*(E)$, d.h. es ist $\pi(e) = x$ und damit $f_k(e) = (x,v)$ also $e = f_k^{-1}(x,v)$. Mit dieser Gleichung folgt nun aber

$$g_j \circ g_k^{-1}((x,y),v) = g_j(p) = g_j((x,y),e) = ((x,y), \pi_2 \circ f_j(e)) = ((x,y), \pi_2 \circ f_j \circ f_k^{-1}(x,v))$$

und damit

$$g_{jk}(x,y)(v) = \pi_2 \circ g_j \circ g_k^{-1}((x,y),v) = \pi_2 \circ f_j \circ f_k^{-1}(x,v) = f_{jk}(x)(v),$$

wie behauptet. Die Gleichung zur hermiteschen Metrik $\pi_1^*(h)$ gilt direkt nach Definition der zurückgezogenen Metrik und da π_1 eine Projektion ist. □

Proposition 4.46. *Es sei $(L,h^L) \to X$ ein hermitesches, holomorphes Geradenbündel auf der komplexen Mannigfaltigkeit X und $(M,h^M) \to S$ ein hermitesches, holomorphes Geradenbündel auf der komplexen Mannigfaltigkeit S. Bezüglich einer offenen Überdeckung $\{U_j\}$ von X werde (L,h^L) durch*

$$f_{jk}^L : U_j \cap U_k \longrightarrow \mathrm{GL}(1,\mathbb{C}), \qquad h_j^L : U_j \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$$

und lokal bezüglich einer offenen Überdeckung $\{V_\alpha\}$ von S werde (M,h^M) durch

$$f_{\alpha\beta}^M : V_\alpha \cap V_\beta \longrightarrow \mathrm{GL}(1,\mathbb{C}), \qquad h_\alpha^M : V_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$$

beschrieben. Dann kann das Geradenbündel $(p_X^*(L)) \otimes (p_S^*(M)) \to X \times S$ mit der von h^L und h^M induzierten Metrik h lokal über $\{U_j \times V_\alpha\}$ durch

$$f_{(j\alpha)(k\beta)} : (U_j \times V_\alpha) \cap (U_k \times V_\beta) \longrightarrow \mathrm{GL}(1,\mathbb{C}), \qquad (x,t) \longmapsto f_{jk}^L(x) f_{\alpha\beta}^M(t)$$

sowie

$$h_{(j\alpha)} : U_j \times V_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}, \qquad (x,t) \longmapsto h_j^L(x) h_\alpha^M(t)$$

beschrieben werden.

Beweis. Indem wir Lemma 4.45 auf $p_X^*(L) \to X \times S$ anwenden, erhalten wir als lokale Beschreibung für dieses Geradenbündel über $\{U_j \times S\}$

$$g_{jk}^L : (U_j \times S) \cap (U_k \times S) \longrightarrow \mathrm{GL}(1,\mathbb{C}), \qquad g_{jk}^L(x,t) = f_{jk}^L(x)$$

sowie

$$(p_X^*(h^L))_j : U_j \times S \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}, \qquad (p_X^*(h^L))_j(x,t) = h_j^L(x).$$

Entsprechend erhalten wir durch Anwendung des Lemmas auf $p_S^*(M) \to X \times S$ als lokale Beschreibung dieses Geradenbündels über $\{X \times V_\alpha\}$

$$g_{\alpha\beta}^M : (X \times V_\alpha) \cap (X \times V_\beta) \longrightarrow \mathrm{GL}(1,\mathbb{C}), \qquad g_{\alpha\beta}^M(x,t) = f_{\alpha\beta}^M(t)$$

sowie

$$(p_S^*(h^M))_\alpha : X \times V_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}, \qquad (p_S^*(h^M))_\alpha(x,t) = h_\alpha^M(t).$$

Als gemeinsame Verfeinerung beider Überdeckungen ergibt sich unmittelbar $\{U_j \times V_\alpha\}$ und da es sich um Geradenbündel auf $X \times S$ handelt, reduziert sich die Formel für die Beschreibung des Tensorproduktes auf eine einfache Produktbildung der jeweiligen Größen der Faktoren, vergleiche Abschnitt 2.2. Wir erhalten also die behaupteten Formeln. □

Wir zitieren nun noch die folgende Aussage, welche wir in Kürze benötigen:

Satz 4.47 (Seesaw-Theorem)**.** *Sei X eine kompakte, komplexe Mannigfaltigkeit, S ein reduzierter analytischer Raum und $E \to X \times S$ ein holomorphes Geradenbündel. Dann gilt:*

(i) Die Menge $S_0 = \{t \in S \mid E_t \text{ ist trivial}\} \subset S$ ist Zariski-abgeschlossen in S.

(ii) Es gibt ein holomorphes Geradenbündel $M \to S_0$, so dass $F|_{X \times S_0} \simeq p_{S_0}^*(M)$ gilt.

Einen Beweis findet man beispielsweise in [BL04]. Mit dieser Vorarbeit können wir nun ein Resultat zeigen, welches den ersten Schritt hin zum Hauptresultat dieses Abschnittes darstellt.

Satz 4.48. *Sei $(F, h) \to X \times S$ eine Familie von Hermite-Einstein-Vektorbündeln auf der kompakten Kählermannigfaltigkeit (X, g), parametrisiert durch die komplexe Mannigfaltigkeit S, so dass für ein festes holomorphes Geradenbündel $L \to X$*

$$\det(F_t) \simeq L$$

für alle $t \in S$ gilt. Sei außerdem (V, s) eine Koordinatenumgebung auf S um einen Punkt $s_0 \in S$. Dann gibt es nach einer eventuellen Verkleinerung von V um s_0 herum eine differenzierbare Funktion $\varphi : V \to \mathbb{R}_{>0}$, so dass auch die umskalierte Familie $(F, \varphi \cdot h) \to X \times V$ eine Familie von Hermite-Einstein-Vektorbündeln ist und derart, dass für die umskalierte Metrik lokal stets

$$\operatorname{tr}\left(\rho_{k\bar{l}}\big|_t\right) = 0$$

für alle $t \in V$ gilt.

Beweis. Zunächst ist $p_X^*(L^*) \to X \times S$ ein holomorphes Geradenbündel und da für die Inklusion $\iota_t : X \to X \times S$ stets $p_X \circ \iota_t = \mathrm{id}$ gilt, erhalten wir für alle $t \in S$ die Gleichung

$$\left(p_X^*(L^*)\right)_t = \iota_t^*(p_X^*(L^*)) = L^*.$$

Also folgt unter Ausnutzung der Voraussetzung $\det(F_t) \simeq L$ für das holomorphe Geradenbündel $\det(F) \otimes p_X^*(L^*) \to X \times S$ in allen Punkten $t \in S$

$$\left(\det(F) \otimes p_X^*(L^*)\right)_t = \left(\det(F)\right)_t \otimes \left(p_X^*(L^*)\right)_t = \det(F_t) \otimes \left(p_X^*(L^*)\right)_t \simeq L \otimes L^* \simeq \mathbb{C},$$

wobei hier mit $\mathbb{C}$ das triviale Geradenbündel über X gemeint ist. Die Fasern des Geradenbündels $\det(F) \otimes p_X^*(L^*) \to X \times S$ sind also über allen Punkten von S trivial, so dass es gemäß Satz 4.47 ein holomorphes Geradenbündel $M \to S$ gibt, mit

$$\det(F) \otimes p_X^*(L^*) \simeq p_S^*(M).$$

Da das Bilden des dualen Vektorbündels mit dem Pullback unter der Projektion verträglich ist, was beispielsweise die lokale Darstellung aus Lemma 4.45 direkt zeigt, erhalten wir hieraus:

$$\det(F) \simeq \left(p_X^*(L^*)\right)^* \otimes p_S^*(M) = p_X^*(L) \otimes p_S^*(M).$$

Es gibt also einen holomorphen Vektorbündelisomorphismus $\phi : \det(F) \to p_X^*(L) \otimes p_S^*(M)$.

Als holomorphes Geradenbündel auf einer kompakten Kählermannigfaltigkeit ist $L \to X$ ein stabiles Bündel. Folglich existiert eine Hermite-Einstein-Metrik h_0 auf L. Ferner dürfen wir nach Verkleinerung von V um den Punkt s_0 herum davon ausgehen, dass das Geradenbündel M über V trivialisiert werden kann, d.h. es ist $M|_V \to V$ das triviale Geradenbündel und wir statten dieses mit der flachen Metrik $t \mapsto \mathrm{id}$ aus. Auf diese Weise erhalten wir mit dem Produkt auch eine hermitesche Metrik h_0' auf dem Bündel $(p_X^*(L) \otimes p_S^*(M)) \to X \times V$. Vermöge des Isomorphismus ϕ erhalten wir also durch $\langle v, w\rangle_{h'} := \langle \phi(v), \phi(w)\rangle_{h_0'}$ eine hermitesche Metrik h'

auf dem Determinantenbündel $\det(F) \to X \times V$. Wir fassen diese Konstruktion noch einmal übersichtlich in dem folgenden Diagramm zusammen:

$$\begin{tikzcd}
(\det(F), h') \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi"'] & ((p_X^*(L)) \otimes (p_S^*(M)), h_0') \arrow[d, "\pi"'] & (L, h_0) \arrow[d, "\pi"'] \\
X \times V \arrow[r, "\mathrm{id}"] & X \times V \arrow[r, "p_X"] & X.
\end{tikzcd}$$

Wir wählen nun eine offene Überdeckung von X durch Koordinatenumgebungen (U_j, z_j), so dass sowohl $L \to X$ über den U_j als auch $F \to X \times S$ nach einer weiteren Verkleinerung von V um s_0 herum über den $U_j \times V$ trivialisiert werden kann. Dann wird (F, h) durch Funktionen

$$f_{jk} : (U_j \times V) \cap (U_k \times V) \longrightarrow \mathrm{GL}(r, \mathbb{C}), \qquad h_j : U_j \longrightarrow \mathbb{C}^{r \times r}$$

beschrieben und folglich $(\det(F), \det(h))$ durch

$$\det(f_{jk}) : (U_j \times V) \cap (U_k \times V) \longrightarrow \mathrm{GL}(1, \mathbb{C}), \qquad \det(h_j) : U_j \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}.$$

Da ferner nach Voraussetzung $L \simeq \det(F_{s_0})$ gilt, kann (L, h_0) durch die Funktionen

$$\det(f_{jk}(s_0)) : U_j \cap U_k \longrightarrow \mathrm{GL}(1, \mathbb{C}), \qquad h_{0\,j} : U_j \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$$

beschrieben werden, wobei wir uns der Bezeichnungskonvention aus Proposition 3.2 anschließen und $\det(f_{jk}(s_0))(x) = \det(f_{jk}(x, s_0))$ schreiben. Gemäß Proposition 4.46 erhalten wir hieraus als lokale Beschreibung von $((p_X^*(L)) \otimes (p_S^*(M))) \to X \times V$ wegen der Trivialität von $M|_V \to V$

$$g_{jk} : (U_j \times V) \cap (U_k \times V) \longrightarrow \mathrm{GL}(1, \mathbb{C}), \qquad (x, t) \longmapsto g_{jk}(x, t) = \det(f_{jk}(s_0))(x)$$

sowie

$$\left(h_0'\right)_j : U_j \times V \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}, \qquad (x, t) \longmapsto h_{0\,j}(x).$$

Indem wir Proposition 4.41 auf den Isomorphismus ϕ hermitescher Vektorbündel anwenden, erhalten wir holomorphe Funktionen $\phi_j : U_j \times V \to \mathrm{GL}(1, \mathbb{C})$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) Es ist $\phi_j = g_{jk} \cdot \phi_k \cdot \det(f_{kj})$ auf $(U_j \times V) \cap (U_k \times V)$.

(2) Es ist $\phi_j^t \cdot h_{0\,j}' \cdot \overline{\phi_j} = h_j'$, d.h. für alle $(x, t) \in U_j \times V$ gilt $h_j'(x, t) = \phi_j(x, t) h_{0\,j}(x) \overline{\phi_j(x, t)}$.

Wir verwenden (2), um eine wichtige lokale Eigenschaft der von uns konstruierten Metrik h' auf $\det(F)$ herzuleiten. Für die lokalen Krümmungsgrößen berechnen wir für beliebige Koordinatenrichtungen $1 \leqslant \alpha, \beta \leqslant n + m$ unter Ausnutzung der Holomorphie von ϕ_j:

$$\begin{aligned}
R^1_{jh'\,1\alpha\overline{\beta}} &= -\partial_{\overline{\beta}} \left((h_j')^{-1} \partial_\alpha h_j'\right) = -\partial_{\overline{\beta}} \left(\left(\phi_j h_{0\,j}' \overline{\phi_j}\right)^{-1} \partial_\alpha \left(\phi_j h_{0\,j}' \overline{\phi_j}\right) \right) \\
&= -\partial_{\overline{\beta}} \left(\frac{\left(\partial_\alpha \phi_j\right) h_{0\,j}' \overline{\phi_j} + \phi_j \left(\partial_\alpha h_{0\,j}'\right) \overline{\phi_j}}{\phi_j h_{0\,j}' \overline{\phi_j}} \right) = -\partial_{\overline{\beta}} \left(\frac{\partial_\alpha h_{0\,j}'}{h_{0\,j}'} \right) = R^1_{jh_0'\,1\alpha\overline{\beta}}.
\end{aligned}$$

Wie erwartet stimmen also die lokalen Krümmungsgrößen von h' mit denen von h'_0 überein:

$$\Omega_{h'} = \Omega_{h'_0} \in \Gamma\left(X \times V, \mathcal{A}^{1,1}\left(X \times V\right)\right).$$

Die eben notierte lokale Beschreibung von h'_0 zeigt ferner, dass für jeden beliebigen Punkt $t \in V$ die Gleichung $h'_0|_t = h_0$ gilt, so dass wir insbesondere stets $\Omega_{h'}|_t = \Omega_{h'_0}|_t = \Omega_{h_0}$ erhalten. Da aber h_0 nach Konstruktion eine Hermite-Einstein-Metrik ist, finden wir, dass auch $h'|_t$ für alle $t \in V$ eine Hermite-Einstein-Metrik ist. Außerdem können wir, da die $(h'_0)_j$ nicht von der Variablen t auf V abhängen, für Koordinatenrichtungen k und l auf V festhalten:

$$R^1_{jh'\,1k\bar{l}} = -\partial_{\bar{l}}\left((h'_0)_j^{-1}\partial_k(h'_0)_j\right) = 0. \tag{4.34}$$

Mit h' und $\det(h)$ liegen nun zwei hermitesche Metriken auf dem holomorphen Geradenbündel $\det(F) \to X \times V$ vor. Nach Proposition 4.42 existiert daher ein Endomorphismus

$$B \in \Gamma\left(X \times V, \mathcal{A}^{0,0}\left(\mathrm{End}(\det(F))\right)\right),$$

so dass $h' = B \cdot \det(h)$ gilt. Da aber $\det(F)$ ein Geradenbündel ist, erkennen wir $\mathrm{End}(\det(F))$ als triviales Bündel, so dass B eine glatte Funktion und damit nach Konstruktion von der Gestalt $B : X \times V \to \mathbb{R}_{>0}$ ist. Wir haben eben gezeigt, dass für jeden Punkt $t \in V$ die Metrik $h'|_t$ eine Hermite-Einstein-Metrik auf $\det(F_t)$ ist und ferner ist nach Proposition 4.44 auch $\det(h)|_t$ stets eine Hermite-Einstein-Metrik. Wir schließen also mit Satz 4.43, dass die Funktion B konstant im Parameter auf X ist und fassen sie als Funktion $B : V \to \mathbb{R}_{>0}$ auf. Damit definieren wir nun:

$$\varphi : V \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}, \qquad t \longmapsto \exp\left(\frac{\log(B(t))}{\mathrm{rk}(F)}\right).$$

Die vermöge φ umskalierte Metrik $\varphi \cdot h$ auf $F \to X \times V$ ist nun offenbar ebenfalls auf allen Fasern eine Hermite-Einstein-Metrik, da φ nur von V abhängt und daher für jeden Punkt $t \in V$ lediglich einen positiven, skalaren Faktor zur Metrik h_t auf der Faser F_t beiträgt. Ferner erhalten wir für die auf der Determinante induzierte Metrik wegen

$$\det(\varphi \cdot h) = \varphi^{\mathrm{rk}(F)} \cdot \det(h) = B \cdot \det(h) = h'$$

gerade die von uns konstruierte Metrik h'. Indem wir die Gleichung $\Omega_{\det(\varphi \cdot h)} = \mathrm{tr}(\Omega_{\varphi \cdot h})$ aus Satz 2.11 sowie die Formel (4.34) verwenden, berechnen wir für die Größen $\rho_{k\bar{l}}$ der umskalierten Metrik:

$$\mathrm{tr}\left(\rho_{k\bar{l}}|_t\right) = \sum_\rho R^\rho_{j(\varphi\cdot h)\,\rho k\bar{l}}(t) = R^1_{j\,\det(\varphi\cdot h)\,1k\bar{l}}(t) = R^1_{jh'\,1k\bar{l}}(t) = 0.$$

Damit ist die behauptete lokale Identität nachgewiesen. □

Um aus dem Verschwinden der Spur auf das Verschwinden der harmonischen Projektion schließen zu können, legen wir uns zunächst einige allgemeine Resultate zurecht. Genauer wollen wir zeigen, dass der Laplace-Operator mit der Spurbildung kommutiert, was zu einer Verträglichkeit des Spuroperators mit der Hodge-Zerlegung führt.

Lemma 4.49. *Sei $E \to M$ ein holomorphes Vektorbündel auf der komplexen Mannigfaltigkeit M. Dann kommutiert das folgende Diagramm für alle Indizes:*

$$\begin{tikzcd}
\Gamma\left(M, \mathcal{A}^{p,q}\left(\mathrm{End}(E)\right)\right) \arrow[r, "\bar\partial"] \arrow[d, "\mathrm{tr}"'] & \Gamma\left(M, \mathcal{A}^{p,q+1}\left(\mathrm{End}(E)\right)\right) \arrow[d, "\mathrm{tr}"'] \\
\Gamma\left(M, \mathcal{A}^{p,q}(M)\right) \arrow[r, "\bar\partial"] & \Gamma\left(M, \mathcal{A}^{p,q+1}(M)\right).
\end{tikzcd}$$

Beweis. Wir arbeiten mit einer Überdeckung von M durch Koordinatenumgebungen (U_j, z_j), über denen E trivialisiert werden kann. Sei $\eta \in \Gamma\left(M, \mathcal{A}^{p,q}\left(\mathrm{End}(E)\right)\right)$ lokal durch $\eta_j = (\eta^{\rho}_{j\,\sigma})_{\rho,\sigma}$ mit

$$\eta^{\rho}_{j\,\sigma} = \frac{1}{p!q!}\sum_{\alpha,\beta} \eta^{\rho}_{j\,\sigma\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}} dz_j^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\alpha_p} \wedge dz_j^{\overline{\beta_1}} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\beta_q}}$$

gegeben. Dann berechnen wir $\bar\partial\eta$ lokal zu $(\bar\partial\eta)_j = (\bar\partial\eta^{\rho}_{j\,\sigma})_{\rho,\sigma}$ mit:

$$\bar\partial\eta^{\rho}_{j\,\sigma} = \frac{1}{p!(q+1)!}\sum_{\alpha,\beta}\left(\sum_{\nu}(-1)^{\nu+p+1}\partial_{\overline{\beta_\nu}}\eta^{\rho}_{j\,\sigma\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\beta_1}\ldots\widehat{\overline{\beta_\nu}}\ldots\overline{\beta_{q+1}}}\right) dz_j^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\beta_{q+1}}}.$$

Also erhalten wir lokal auf U_j für die Form $\mathrm{tr}(\bar\partial\eta)$ die Darstellung:

$$\frac{1}{p!(q+1)!}\sum_{\alpha,\beta}\left(\sum_{\rho}\sum_{\nu}(-1)^{\nu+p+1}\partial_{\overline{\beta_\nu}}\eta^{\rho}_{j\,\rho\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\beta_1}\ldots\widehat{\overline{\beta_\nu}}\ldots\overline{\beta_{q+1}}}\right) dz_j^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\alpha_p} \wedge dz_j^{\overline{\beta_1}} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\beta_{q+1}}}.$$

Andererseits ist

$$\mathrm{tr}(\eta)_j = \frac{1}{p!q!}\sum_{\alpha,\beta}\left(\sum_{\rho}\eta^{\rho}_{j\,\rho\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}}\right) dz_j^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\alpha_p} \wedge dz_j^{\overline{\beta_1}} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\beta_q}}$$

und folglich berechnen wir:

$$\left(\bar\partial\left(\mathrm{tr}(\eta)\right)\right)_j = \frac{1}{p!(q+1)!}\sum_{\alpha,\beta}\left(\sum_{\rho}\sum_{\nu}(-1)^{\nu+p+1}\partial_{\overline{\beta_\nu}}\eta^{\rho}_{j\,\rho\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\beta_1}\ldots\widehat{\overline{\beta_\nu}}\ldots\overline{\beta_{q+1}}}\right) dz_j^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\beta_{q+1}}}.$$

□

Lemma 4.50. *Sei $(E, h) \to M$ ein hermitesches, holomorphes Vektorbündel auf der kompakten Kählermannigfaltigkeit (M, g). Dann kommutiert das folgende Diagramm für alle Indizes:*

$$\begin{tikzcd}
\Gamma\left(M, \mathcal{A}^{p,q}\left(\mathrm{End}(E)\right)\right) \arrow[r, "\bar\partial^*"] \arrow[d, "\mathrm{tr}"'] & \Gamma\left(M, \mathcal{A}^{p,q-1}\left(\mathrm{End}(E)\right)\right) \arrow[d, "\mathrm{tr}"'] \\
\Gamma\left(M, \mathcal{A}^{p,q}(M)\right) \arrow[r, "\bar\partial^*"] & \Gamma\left(M, \mathcal{A}^{p,q-1}(M)\right).
\end{tikzcd}$$

Beweis. Wir arbeiten mit einer Überdeckung von M durch Koordinatenumgebungen (U_j, z_j), über denen E trivialisiert werden kann. Sei $\eta \in \Gamma\left(M, \mathcal{A}^{p,q}\left(\mathrm{End}(E)\right)\right)$ lokal durch $\eta_j = (\eta^{\rho}_{j\,\sigma})_{\rho,\sigma}$ mit

$$\eta^{\rho}_{j\,\sigma} = \frac{1}{p!q!}\sum_{\alpha,\beta} \eta^{\rho}_{j\,\sigma\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}} dz_j^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\alpha_p} \wedge dz_j^{\overline{\beta_1}} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\beta_q}}$$

gegeben. Dann ist

$$\mathrm{tr}(\eta)_j = \frac{1}{p!q!}\sum_{\alpha,\beta}\left(\sum_{\rho} \eta^{\rho}_{j\,\rho\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_q}}\right) dz_j^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\alpha_p} \wedge dz_j^{\overline{\beta_1}} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\beta_q}},$$

so dass wir mit Satz 2.13 berechnen:

$$\left(\bar\partial^*\left(\mathrm{tr}(\eta)\right)\right)_j = \frac{-(-1)^p}{p!(q-1)!}\sum_{\alpha,\beta}\sum_{\rho}\sum_{\beta,\gamma} g_j^{\overline{\beta}\gamma}\nabla_\gamma \eta^{\rho}_{j\,\rho\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\beta}\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}} dz_j^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\beta_{q-1}}}.$$

Andererseits wollen wir $\mathrm{tr}(\bar\partial^*\eta)$ berechnen und definieren hierzu $\psi := \bar\partial^*\eta$. Dann ist lokal $\psi_j = (\psi^{\rho}_{j\,\sigma})_{\rho,\sigma}$ und gemäß Satz 2.15 erhalten wir für $\psi^{\rho}_{j\,\sigma}$ den Ausdruck

$$\frac{-(-1)^p}{p!(q-1)!}\sum_{\alpha,\beta}\sum_{\beta,\gamma} g_j^{\overline{\beta}\gamma}\left(\nabla_\gamma \eta^{\rho}_{j\,\sigma\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\beta}\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}} + \sum_{\nu,\tau}\Gamma^{(\rho\sigma)}_{j\,\gamma(\nu\tau)}\eta^{\nu}_{j\,\tau\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\beta}\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}}\right) dz_j^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\beta_{q-1}}},$$

so dass für die Spur folgt:

$$\begin{aligned}\left(\mathrm{tr}(\bar\partial^*\eta)\right)_j &= \frac{-(-1)^p}{p!(q-1)!}\sum_{\alpha,\beta}\sum_{\rho}\sum_{\beta,\gamma} g_j^{\overline{\beta}\gamma}\nabla_\gamma \eta^{\rho}_{j\,\rho\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\beta}\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}} dz_j^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\beta_{q-1}}}\\ &\quad+ \frac{-(-1)^p}{p!(q-1)!}\sum_{\alpha,\beta}\sum_{\rho}\sum_{\beta,\gamma} g_j^{\overline{\beta}\gamma}\sum_{\nu,\tau}\Gamma^{(\rho\rho)}_{j\,\gamma(\nu\tau)}\eta^{\nu}_{j\,\tau\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\beta}\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}} dz_j^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\beta_{q-1}}}\\ &= \left(\bar\partial^*\left(\mathrm{tr}(\eta)\right)\right)_j + R.\end{aligned}$$

Es genügt also, $R = 0$ zu zeigen. Dazu berechnen wir unter Ausnutzung von Proposition 2.4:

$$\begin{aligned}R &= \frac{-(-1)^p}{p!(q-1)!}\sum_{\alpha,\beta}\sum_{\beta,\gamma} g_j^{\overline{\beta}\gamma}\sum_{\rho}\sum_{\nu,\tau}\Gamma^{(\rho\rho)}_{j\,\gamma(\nu\tau)}\eta^{\nu}_{j\,\tau\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\beta}\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}} dz_j^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\beta_{q-1}}}\\ &= \frac{-(-1)^p}{p!(q-1)!}\sum_{\alpha,\beta}\sum_{\beta,\gamma} g_j^{\overline{\beta}\gamma}\sum_{\nu,\tau}\left(\sum_{\rho}\delta^{\tau}_{\rho}\Gamma^{\rho}_{j\,\gamma\nu} - \sum_{\rho}\delta^{\rho}_{\nu}\Gamma^{\tau}_{j\,\gamma\rho}\right)\eta^{\nu}_{j\,\tau\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\beta}\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}} dz_j^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\beta_{q-1}}}\\ &= \frac{-(-1)^p}{p!(q-1)!}\sum_{\alpha,\beta}\sum_{\beta,\gamma} g_j^{\overline{\beta}\gamma}\sum_{\nu,\tau}\left(\Gamma^{\tau}_{j\,\gamma\nu} - \Gamma^{\tau}_{j\,\gamma\nu}\right)\eta^{\nu}_{j\,\tau\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\beta}\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{q-1}}} dz_j^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dz_j^{\overline{\beta_{q-1}}}\\ &= 0.\end{aligned}$$

Also ist gezeigt, dass wie behauptet $\mathrm{tr}(\bar\partial^*\eta) = \bar\partial^*\left(\mathrm{tr}(\eta)\right)$ gilt. □

Korollar 4.51. *Sei $(E,h) \to M$ ein hermitesches, holomorphes Vektorbündel auf der kompakten Kählermannigfaltigkeit (M,g). Dann kommutiert das folgende Diagramm für alle Indizes:*

$$\begin{tikzcd}
\Gamma\left(M, \mathcal{A}^{p,q}\left(\mathrm{End}(E)\right)\right) \arrow[r, "\Box_{\bar\partial}"] \arrow[d, "\mathrm{tr}"'] & \Gamma\left(M, \mathcal{A}^{p,q}\left(\mathrm{End}(E)\right)\right) \arrow[d, "\mathrm{tr}"'] \\
\Gamma\left(M, \mathcal{A}^{p,q}\left(M\right)\right) \arrow[r, "\Box_{\bar\partial}"] & \Gamma\left(M, \mathcal{A}^{p,q}\left(M\right)\right).
\end{tikzcd}$$

Beweis. Für $\eta \in \Gamma\left(M, \mathcal{A}^{p,q}\left(\mathrm{End}(E)\right)\right)$ berechnen wir unter Verwendung von Lemma 4.49 sowie Lemma 4.50 und unter Ausnutzung der Linearität der Spurbildung:

$$\mathrm{tr}\left(\Box_{\bar\partial}\eta\right) = \mathrm{tr}\left(\left(\bar\partial\bar\partial^* + \bar\partial^*\bar\partial\right)\eta\right) = \mathrm{tr}\left(\bar\partial\bar\partial^*\eta\right) + \mathrm{tr}\left(\bar\partial^*\bar\partial\eta\right) = \bar\partial\bar\partial^*\mathrm{tr}\left(\eta\right) + \bar\partial^*\bar\partial\mathrm{tr}\left(\eta\right) = \Box_{\bar\partial}\mathrm{tr}\left(\eta\right).$$

Damit ist bereits alles gezeigt. □

Indem wir wesentlich Gebrauch von diesem Korollar machen, können wir nun folgendes Hilfsmittel beweisen, welches es uns ermöglich vom Verschwinden der Spur eines Endomorphismus auf das Verschwinden seiner harmonischen Projektion zu schließen.

Satz 4.52. *Es sei $(E,h) \to M$ ein hermitesches, holomorphes Vektorbündel auf der kompakten Kählermannigfaltigkeit (M,g). Ist $E \to M$ einfach, dann gilt für alle $\eta \in \Gamma\left(M, \mathcal{A}^{0,0}\left(\mathrm{End}(E)\right)\right)$ mit $\mathrm{tr}\left(\eta\right) = 0$:*

$$H(\eta) = 0.$$

Beweis. Zunächst zeigen wir, dass die Spurbildung die Hodge-Zerlegung respektiert. Sei dazu $\psi \in \mathcal{H}^{0,0}(M, \mathrm{End}(E), H)$ eine harmonische Form. Mit Korollar 4.51 berechnen wir unter Ausnutzung von $\Box_{\bar\partial}\psi = 0$

$$\Box_{\bar\partial}\left(\mathrm{tr}\left(\psi\right)\right) = \mathrm{tr}\left(\Box_{\bar\partial}\psi\right) = \mathrm{tr}\left(0\right) = 0,$$

so dass auch die Spur $\mathrm{tr}\left(\psi\right) \in \mathcal{H}^{0,0}(M,g)$ der Form ψ harmonisch ist. Dies zeigt die Implikation

$$\mathrm{tr}\left(\mathcal{H}^{0,0}(M, \mathrm{End}(E), H)\right) \subset \mathcal{H}^{0,0}(M,g). \tag{4.35}$$

Ist nun $\psi \in \Box_{\bar\partial}\left(\Gamma\left(M, \mathcal{A}^{0,0}\left(\mathrm{End}(E)\right)\right)\right)$, also eine Form $\psi \in \Gamma\left(M, \mathcal{A}^{0,0}\left(\mathrm{End}(E)\right)\right)$ mit $\psi = \Box_{\bar\partial}\tau$ für ein $\tau \in \Gamma\left(M, \mathcal{A}^{0,0}\left(\mathrm{End}(E)\right)\right)$ gegeben, dann berechnen wir erneut mit Korollar 4.51

$$\mathrm{tr}\left(\psi\right) = \mathrm{tr}\left(\Box_{\bar\partial}\tau\right) = \Box_{\bar\partial}\left(\mathrm{tr}\left(\tau\right)\right)$$

und damit ist auch $\mathrm{tr}\left(\psi\right) \in \Box_{\bar\partial}\left(\Gamma\left(M, \mathcal{A}^{0,0}\left(M\right)\right)\right)$. Wir finden also andererseits die Implikation

$$\mathrm{tr}\left(\Box_{\bar\partial}\left(\Gamma\left(M, \mathcal{A}^{0,0}\left(\mathrm{End}(E)\right)\right)\right)\right) \subset \Box_{\bar\partial}\left(\Gamma\left(M, \mathcal{A}^{0,0}\left(M\right)\right)\right). \tag{4.36}$$

In unserer Situation hat die Hodge-Zerlegung von $\mathrm{End}(E)$ folgende vereinfachte Form

$$\Gamma\left(M, \mathcal{A}^{0,0}\left(\mathrm{End(E)}\right)\right) = \mathcal{H}^{0,0}(M, \mathrm{End}(E), H) \oplus \underbrace{\bar\partial^*\left(\Gamma\left(M, \mathcal{A}^{0,1}\left(\mathrm{End}(E)\right)\right)\right)}_{=\Box_{\bar\partial}\left(\Gamma\left(M, \mathcal{A}^{0,0}\left(\mathrm{End}(E)\right)\right)\right)}$$

und völlig analog haben wir auf der Kählermannigfaltigkeit (M, g):

$$\Gamma\left(M, \mathcal{A}^{0,0}(M)\right) = \mathcal{H}^{0,0}(M, g) \oplus \underbrace{\bar{\partial}^* \left(\Gamma\left(M, \mathcal{A}^{0,1}(M)\right)\right)}_{=\Box_{\bar{\partial}}(\Gamma(M, \mathcal{A}^{0,0}(M)))}.$$

Wir schreiben nun η unter Ausnutzung der direkten Summenzerlegung in der Gestalt

$$\eta = H(\eta) + \tau \in \mathcal{H}^{0,0}(M, \mathrm{End}(E), H) \oplus \Box_{\bar{\partial}} \left(\Gamma\left(M, \mathcal{A}^{0,0}(\mathrm{End}(E))\right)\right)$$

und erhalten mit (4.35) sowie (4.36):

$$\mathrm{tr}\,(\eta) = \mathrm{tr}\,(H(\eta) + \tau) = \mathrm{tr}\,(H(\eta)) + \mathrm{tr}\,(\tau) \in \mathcal{H}^{0,0}(M, g) \oplus \Box_{\bar{\partial}} \left(\Gamma\left(M, \mathcal{A}^{0,0}(M)\right)\right).$$

Da nach Voraussetzung $\mathrm{tr}\,(\eta) = 0$ gilt, schließen wir aus der Eindeutigkeit der Hodge-Zerlegung darauf, dass in dieser Gleichung beide Summanden verschwinden. Insbesondere folgt also:

$$\mathrm{tr}\,(H(\eta)) = 0. \tag{4.37}$$

Da eine Form ψ genau dann harmonisch ist, wenn sowohl $\bar{\partial}\psi = 0$ als auch $\bar{\partial}^*\psi = 0$ gilt, ist

$$\mathcal{H}^{0,0}(M, \mathrm{End}(E), H) = \Gamma\,(M, \mathcal{O}\,(\mathrm{End}(E))) = \mathbb{C} \cdot \mathrm{id},$$

wobei wir in der letzten Gleichung die vorausgesetzte Einfachheit von $E \to M$ verwendet haben. Folglich ist $H(\eta) \in \mathbb{C} \cdot \mathrm{id}$ und es gibt ein $\varphi \in \mathbb{C}$ mit $H(\eta) = \varphi \cdot \mathrm{id}$. Indem wir (4.37) einsetzen, ergibt sich hieraus:

$$0 = \mathrm{tr}\,(H(\eta)) = \mathrm{tr}\,(\varphi \cdot \mathrm{id}) = \varphi \cdot \underbrace{\mathrm{rk}(E)}_{>0}.$$

Also erhalten wir $\varphi = 0$ und damit $H(\eta) = 0$, wie gewünscht. □

Damit zeigen wir nun in der allgemeinen Situation einer beliebigen Familie folgendes Resultat über das Verschwinden der harmonischen Projektion $H(\rho_{k\bar{l}}|_t)$:

Theorem 4.53. *Sei $(F, h) \to X \times S$ eine Familie von Hermite-Einstein-Vektorbündeln auf der kompakten Kählermannigfaltigkeit (X, g), parametrisiert durch die komplexe Mannigfaltigkeit S, so dass für ein festes holomorphes Geradenbündel $L \to X$*

$$\det(F_t) \simeq L$$

für alle $t \in S$ gilt. Sei außerdem (V, s) eine Koordinatenumgebung auf S um einen Punkt $s_0 \in S$. Dann gibt es nach einer eventuellen Verkleinerung von V um s_0 herum eine differenzierbare Funktion $\varphi : V \to \mathbb{R}_{>0}$, so dass auch die umskalierte Familie $(F, \varphi \cdot h) \to X \times V$ eine Familie von Hermite-Einstein-Vektorbündeln ist und derart, dass für die umskalierte Metrik lokal stets

$$H\left(\rho_{k\bar{l}}\big|_t\right) = 0$$

für alle $t \in V$, für die $F_t \to X$ einfach ist, gilt.

Beweis. Wir verwenden die Umskalierung $\varphi : V \to \mathbb{R}_{>0}$ aus Satz 4.48. Dann verschwindet lokal für alle $t \in V$ die Spur $\operatorname{tr}\left(\rho_{k\bar{l}}\big|_t\right) = 0$. Indem wir Satz 4.52 auf die $t \in V$ anwenden, für die $F_t \to X$ einfach ist, erhalten wir unmittelbar die Behauptung. □

Wenn wir die Determinante der Ausgangsfamilie festhalten, dann erreichen wir also durch Konstruktion einer geeigneten Umskalierung der Metrik nach einer eventuellen Verkleinerung des Parameterbereichs S, dass der störende Summand in der Krümmungsformel aus Theorem 4.40 verschwindet. In einer solchen allgemeinen Situation kann kaum mehr erwartet werden. Ist nämlich $(F, h) \to X \times S$ eine Familie von Hermite-Einstein-Vektorbündeln derart, dass stets $H\left(\rho_{k\bar{l}}\big|_t\right) = 0$ für alle $t \in S$ gilt, dann können wir die Metrik h mit einer beliebigen nichtkonstanten, differenzierbaren Funktion $\varphi : S \to \mathbb{R}_{>0}$ multiplizieren und erhalten eine neue Familie $(F, \varphi \cdot h) \to X \times S$ von Hermite-Einstein-Bündeln. Eine einfache Rechnung zeigt dann, dass die harmonische Projektion der lokalen Größen für diese neu konstruierte Familie nicht mehr verschwindet. Die Umskalierung der Ausgangsmetrik durch obiges Theorem ist also zwingend. Die erforderliche Verkleinerung des Parameterbereichs rührt hingegen daher, dass das faserweise Festhalten der Determinante im Allgemeinen keine echte Trivialität des Determinantenbündels ergibt. Aus diesem Grund existiert die Umskalierung nicht auf dem ganzen Parameterbereich.

4.4. Familien von Endomorphismenbündeln

Wir untersuchen in diesem Abschnitt speziell Familien von Endomorphismenbündeln. Diese Familien besitzen die Eigenschaft, dass der störende Summand aus der Krümmungsformel von Theorem 4.40 stets verschwindet. Außerdem sind genau solche Familien für die in Kapitel 5 betrachteten verallgemeinerten Kodaira-Spencer-Abbildungen relevant. Sei also $(F, h) \to X \times S$ eine Familie von Hermite-Einstein-Vektorbündeln auf der kompakten Kählermannigfaltigkeit (X, g) und bezeichne $\Omega \in \Gamma\left(X \times S, \mathcal{A}^{1,1}(\operatorname{End}(F))\right)$ die Krümmung von h. Auf einer Koordinatenumgebung (V, s) von S haben wir in Abschnitt 3.5 die Schnitte $\rho_{k\bar{l}} \in \Gamma\left(X \times V, \mathcal{A}^{0,0}(\operatorname{End}(F))\right)$ definiert. Wir betrachten die von (F, h) induzierte Familie $(\operatorname{End}(F), H) \to X \times S$ der Endomorphismenbündel von F. Die Krümmung von H bezeichnen wir wie üblich mit

$$\Omega_{\operatorname{End}(F)} \in \Gamma\left(X \times S, \mathcal{A}^{1,1}(\operatorname{End}(\operatorname{End}(F)))\right).$$

Für die Anwendung der Krümmungsformel auf die Familie der Endomorphismenbündel spielen ganz analog die Schnitte $\rho_{\operatorname{End}(F)\, k\bar{l}} \in \Gamma\left(X \times V, \mathcal{A}^{0,0}(\operatorname{End}(\operatorname{End}(F)))\right)$ eine große Rolle. Zunächst zeigen wir:

Proposition 4.54. *Ist $(E, h) \to M$ ein Hermite-Einstein-Vektorbündel auf der kompakten Kählermannigfaltigkeit (M, g), dann ist auch das Endomorphismenbündel $(\operatorname{End}(E), H) \to M$ ein Hermite-Einstein-Vektorbündel mit Hermite-Einstein-Konstante 0.*

Beweis. Wir rechnen auf einer Überdeckung U_j, über der E trivialisiert werden kann. Da $E \to M$ als Hermite-Einstein-Vektorbündel vorausgesetzt wurde, gilt lokal die Gleichung

$$\sum_{\alpha,\beta} g_j^{\overline{\beta}\alpha} R^{\rho}_{j\,\sigma\alpha\overline{\beta}} = \kappa \delta^{\rho}_{\sigma},$$

wobei κ die Hermite-Einstein-Konstante von $E \to M$ ist. Mit Proposition 2.6 finden wir

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha,\beta} g_j^{\overline{\beta}\alpha} R^{(\rho_1\rho_2)}_{j\,(\sigma_1\sigma_2)\alpha\overline{\beta}} &= \sum_{\alpha,\beta} g_j^{\overline{\beta}\alpha} \left(\delta^{\sigma_2}_{\rho_2} R^{\rho_1}_{j\,\sigma_1\alpha\overline{\beta}} - \delta^{\rho_1}_{\sigma_1} R^{\sigma_2}_{j\,\rho_2\alpha\overline{\beta}} \right) \\ &= \delta^{\sigma_2}_{\rho_2} \sum_{\alpha,\beta} g_j^{\overline{\beta}\alpha} R^{\rho_1}_{j\,\sigma_1\alpha\overline{\beta}} - \delta^{\rho_1}_{\sigma_1} \sum_{\alpha,\beta} g_j^{\overline{\beta}\alpha} R^{\sigma_2}_{j\,\rho_2\alpha\overline{\beta}} = \delta^{\sigma_2}_{\rho_2} \kappa \delta^{\rho_1}_{\sigma_1} - \delta^{\rho_1}_{\sigma_1} \kappa \delta^{\sigma_2}_{\rho_2} = 0,\end{aligned}$$

womit die Behauptung bereits nachgewiesen ist. □

Diese Proposition zeigt, dass die Familie der Endomorphismenbündel zu einer Familie von Hermite-Einstein-Vektorbündeln selbst eine Familie von Hermite-Einstein-Vektorbündeln ist. Ferner sieht man mittels einer lokalen Rechnung schnell, dass

$$(\mathrm{End}(F), H) \longrightarrow X \times S$$

stets eine triviale Determinante $\det(\mathrm{End}(F)) = \mathbb{C}$ besitzt und die Determinante daher insbesondere fest ist im Sinne des vorherigen Abschnittes. Dennoch kann die Familie der Endomorphismenbündel nicht mit der Methode des vorherigen Abschnittes behandelt werden, da für diese Methode die Einfachheit der Fasern der Familie eine Schlüsselrolle spielt. Für Endomorphismenbündel haben wir aber mit Ausnahme des trivialen Falles $\mathrm{rk}(F) = 1$ stets die Zerlegung in die Unterbündel

$$\mathrm{End}(F_t) = \mathrm{End}^0(F_t) \oplus \mathbb{C} \cdot \mathrm{id},$$

wobei $\mathrm{End}^0(F_t) \subset \mathrm{End}(F_t)$ das Unterbündel der spurfreien Endomorphismen bezeichne. Folglich kann hier keine Einfachheit vorliegen und wir müssen eine andere Methode entwickeln. In der folgenden Proposition formulieren wir die hierfür wesentliche Beobachtung.

Proposition 4.55. *Sei $(F, h) \to X \times S$ eine Familie von Hermite-Einstein-Vektorbündeln auf der kompakten Kählermannigfaltigkeit (X, g), parametrisiert durch die komplexe Mannigfaltigkeit S. Ist (V, s) eine Koordinatenumgebung auf S, dann gilt für die lokalen Größen in einem beliebigen Punkt $t \in V$ jeweils die Beziehung*

$$\left(H \left(\rho_{\mathrm{End}(F)\,k\bar{l}}\Big|_t \right) \right)^{(\rho_1\rho_2)}_{j\,(\sigma_1\sigma_2)} = \delta^{\sigma_2}_{\rho_2} \left(H \left(\rho_{k\bar{l}}\big|_t \right) \right)^{\rho_1}_{j\,\sigma_1} - \delta^{\rho_1}_{\sigma_1} \left(H \left(\rho_{k\bar{l}}\big|_t \right) \right)^{\sigma_2}_{j\,\rho_2}.$$

Beweis. Wir arbeiten mit den Notationen aus 3.1 für einen festen Punkt $t \in V$. Indem wir Proposition 2.6 sowie die Definition der lokalen Größen verwenden, erhalten wir folgende für den Beweis wichtige Gleichung:

$$\begin{aligned}\left(\rho_{\mathrm{End}(F)\,k\bar{l}}\Big|_t \right)^{(\rho_1\rho_2)}_{j\,(\sigma_1\sigma_2)} &= R^{(\rho_1\rho_2)}_{j\,(\sigma_1\sigma_2)k\bar{l}}(t) = \delta^{\sigma_2}_{\rho_2} R^{\rho_1}_{j\,\sigma_1 k\bar{l}}(t) - \delta^{\rho_1}_{\sigma_1} R^{\sigma_2}_{j\,\rho_2 k\bar{l}}(t) \\ &= \delta^{\sigma_2}_{\rho_2} \left(\rho_{k\bar{l}}\big|_t \right)^{\rho_1}_{j\,\sigma_1} - \delta^{\rho_1}_{\sigma_1} \left(\rho_{k\bar{l}}\big|_t \right)^{\sigma_2}_{j\,\rho_2}.\end{aligned} \tag{4.38}$$

Wir verwenden nun die Hodge-Zerlegung für das Vektorbündel $(\mathrm{End}(F_t), H_t) \to X$ im $(0,0)$-Fall:

$$\Gamma\left(X, \mathcal{A}^{0,0}\left(\mathrm{End}(F_t)\right)\right) = \mathcal{H}^{0,0}(X, \mathrm{End}(F_t), H_t) \oplus \bar{\partial}^* \Gamma\left(X, \mathcal{A}^{0,1}\left(\mathrm{End}(F_t)\right)\right).$$

Wegen $\rho_{k\bar{l}}\big|_t \in \Gamma\left(X, \mathcal{A}^{0,0}\left(\operatorname{End}(F_t)\right)\right)$ existiert also genau ein $\mu \in \Gamma\left(X, \mathcal{A}^{0,1}\left(\operatorname{End}(F_t)\right)\right)$, so dass $\rho_{k\bar{l}}\big|_t = H\left(\rho_{k\bar{l}}\big|_t\right) + \bar{\partial}^*\mu$ gilt. Wir notieren aus dieser Überlegung folgende Gleichung:

$$H\left(\rho_{k\bar{l}}\big|_t\right) = \rho_{k\bar{l}}\big|_t - \bar{\partial}^*\mu. \tag{4.39}$$

Lokal auf U_j schreiben wir die auf diese Weise gewonnene Differentialform μ in der Gestalt

$$\mu_j = \left(\mu^{\rho}_{j\,\sigma}\right)_{\rho,\sigma} \qquad \text{mit} \qquad \mu^{\rho}_{j\,\sigma} = \sum_{\beta} \mu^{\rho}_{j\,\sigma\overline{\beta}} dz^{\overline{\beta}}_j$$

und definieren hiervon ausgehend einen Schnitt $\psi_j \in \Gamma\left(U_j, \mathcal{A}^{0,1}\left(\operatorname{End}(\operatorname{End}(F_t))\right)\right)$ durch

$$\psi^{(\rho_1\rho_2)}_{j\,(\sigma_1\sigma_2)} := \delta^{\sigma_2}_{\rho_2}\mu^{\rho_1}_{j\,\sigma_1} - \delta^{\rho_1}_{\sigma_1}\mu^{\sigma_2}_{j\,\rho_2}. \tag{4.40}$$

Wir behaupten, dass sich die ψ_j geeignet transformieren und zu einem globalen Schnitt

$$\psi \in \Gamma\left(X, \mathcal{A}^{0,1}\left(\operatorname{End}(\operatorname{End}(F_t))\right)\right)$$

Anlass geben. Da dies nicht ganz offensichtlich ist, überprüfen wir es. Zunächst ist μ ein globaler Schnitt, so dass nach (2.8) folgendes Transformationsverhalten der lokalen Darstellungen vorliegt:

$$\mu^{\rho}_{j\,\sigma\overline{\beta}} = \sum_{\gamma} \overline{\frac{\partial z^{\gamma}_k}{\partial z^{\beta}_j}} \sum_{\nu,\tau} f^{(\rho\sigma)}_{jk\,(\nu\tau)}\mu^{\nu}_{k\tau\overline{\gamma}} = \sum_{\gamma} \overline{\frac{\partial z^{\gamma}_k}{\partial z^{\beta}_j}} \sum_{\nu,\tau} f^{\rho}_{jk\,\nu} f^{\tau}_{kj\,\sigma}\mu^{\nu}_{k\tau\overline{\gamma}}.$$

Indem wir diese Identität verwenden, können wir berechnen:

$$\begin{aligned}
&\sum_{\gamma} \overline{\frac{\partial z^{\gamma}_k}{\partial z^{\beta}_j}} \sum_{\nu,\tau} f^{((\rho_1\rho_2)(\sigma_1\sigma_2))}_{jk\,((\nu_1\nu_2)(\tau_1\tau_2))}\psi^{(\nu_1\nu_2)}_{k\,(\tau_1\tau_2)\overline{\gamma}} = \sum_{\gamma} \overline{\frac{\partial z^{\gamma}_k}{\partial z^{\beta}_j}} \sum_{\nu,\tau} f^{(\rho_1\rho_2)}_{jk\,(\nu_1\nu_2)} f^{(\tau_1\tau_2)}_{kj\,(\sigma_1\sigma_2)}\psi^{(\nu_1\nu_2)}_{k\,(\tau_1\tau_2)\overline{\gamma}} \\
&= \sum_{\gamma} \overline{\frac{\partial z^{\gamma}_k}{\partial z^{\beta}_j}} \sum_{\nu,\tau} f^{\rho_1}_{jk\,\nu_1} f^{\nu_2}_{kj\,\rho_2} f^{\tau_1}_{kj\,\sigma_1} f^{\sigma_2}_{jk\,\tau_2}\psi^{(\nu_1\nu_2)}_{k\,(\tau_1\tau_2)\overline{\gamma}} \\
&= \sum_{\gamma} \overline{\frac{\partial z^{\gamma}_k}{\partial z^{\beta}_j}} \sum_{\nu,\tau} f^{\rho_1}_{jk\,\nu_1} f^{\nu_2}_{kj\,\rho_2} f^{\tau_1}_{kj\,\sigma_1} f^{\sigma_2}_{jk\,\tau_2}\left(\delta^{\tau_2}_{\nu_2}\mu^{\nu_1}_{k\,\tau_1\overline{\gamma}} - \delta^{\nu_1}_{\tau_1}\mu^{\tau_2}_{k\,\nu_2\overline{\gamma}}\right) \\
&= \sum_{\gamma} \overline{\frac{\partial z^{\gamma}_k}{\partial z^{\beta}_j}} \left(\sum_{\nu_1,\tau_1,\tau_2} f^{\rho_1}_{jk\,\nu_1} f^{\tau_2}_{kj\,\rho_2} f^{\tau_1}_{kj\,\sigma_1} f^{\sigma_2}_{jk\,\tau_2}\mu^{\nu_1}_{k\,\tau_1\overline{\gamma}} - \sum_{\nu_1,\nu_2,\tau_2} f^{\rho_1}_{jk\,\nu_1} f^{\nu_2}_{kj\,\rho_2} f^{\nu_1}_{kj\,\sigma_1} f^{\sigma_2}_{jk\,\tau_2}\mu^{\tau_2}_{k\,\nu_2\overline{\gamma}}\right) \\
&= \sum_{\gamma} \overline{\frac{\partial z^{\gamma}_k}{\partial z^{\beta}_j}} \left(\sum_{\nu_1,\tau_1} \delta^{\sigma_2}_{\rho_2} f^{\rho_1}_{jk\,\nu_1} f^{\tau_1}_{kj\,\sigma_1}\mu^{\nu_1}_{k\,\tau_1\overline{\gamma}} - \sum_{\nu_2,\tau_2} \delta^{\rho_1}_{\sigma_1} f^{\nu_2}_{kj\,\rho_2} f^{\sigma_2}_{jk\,\tau_2}\mu^{\tau_2}_{k\,\nu_2\overline{\gamma}}\right) \\
&= \delta^{\sigma_2}_{\rho_2}\left(\sum_{\gamma} \overline{\frac{\partial z^{\gamma}_k}{\partial z^{\beta}_j}} \sum_{\nu_1,\tau_1} f^{\rho_1}_{jk\,\nu_1} f^{\tau_1}_{kj\,\sigma_1}\mu^{\nu_1}_{k\,\tau_1\overline{\gamma}}\right) - \delta^{\rho_1}_{\sigma_1}\left(\sum_{\gamma} \overline{\frac{\partial z^{\gamma}_k}{\partial z^{\beta}_j}} \sum_{\nu_2,\tau_2} f^{\sigma_2}_{jk\,\tau_2} f^{\nu_2}_{kj\,\rho_2}\mu^{\tau_2}_{k\,\nu_2\overline{\gamma}}\right) \\
&= \delta^{\sigma_2}_{\rho_2}\mu^{\rho_1}_{j\,\sigma_1\overline{\beta}} - \delta^{\rho_1}_{\sigma_1}\mu^{\sigma_2}_{j\,\rho_2\overline{\beta}} = \psi^{(\rho_1\rho_2)}_{j\,(\sigma_1\sigma_2)\overline{\beta}}.
\end{aligned}$$

Dies ist aber gerade das erforderliche Transformationsverhalten, so dass ψ tatsächlich ein wohldefiniertes globales Objekt ist. Wir berechnen nun mit dieser Konstruktion

$$\bar{\partial}^*\psi \in \Gamma\left(X, \mathcal{A}^{0,0}\left(\mathrm{End}(\mathrm{End}(F_t))\right)\right).$$

Indem wir Satz 2.15 und Proposition 2.4 angewandt auf die Christoffelsymbole von $\mathrm{End}(\mathrm{End}(F_t))$ verwenden, folgt:

$$\begin{aligned}
\left(\bar{\partial}^*\psi\right)^{(\rho_1\rho_2)}_{j\,(\sigma_1\sigma_2)} &= -\sum_{\beta,\gamma} g_j^{\overline{\beta}\gamma}\left(\nabla_\gamma \psi^{(\rho_1\rho_2)}_{j\,(\sigma_1\sigma_2)\overline{\beta}} + \sum_{\nu,\tau}\Gamma^{((\rho_1\rho_2)(\sigma_1\sigma_2))}_{j\,\gamma((\nu_1\nu_2)(\tau_1\tau_2))}\psi^{(\nu_1\nu_2)}_{j\,(\tau_1\tau_2)\overline{\beta}}\right)\\
&= -\sum_{\beta,\gamma} g_j^{\overline{\beta}\gamma}\left(\partial_\gamma \psi^{(\rho_1\rho_2)}_{j\,(\sigma_1\sigma_2)\overline{\beta}} + \sum_{\nu,\tau}\left(\delta^{(\tau_1\tau_2)}_{(\sigma_1\sigma_2)}\Gamma^{(\rho_1\rho_2)}_{j\,\gamma(\nu_1\nu_2)} - \delta^{(\rho_1\rho_2)}_{(\nu_1\nu_2)}\Gamma^{(\tau_1\tau_2)}_{j\,\gamma(\sigma_1\sigma_2)}\right)\psi^{(\nu_1\nu_2)}_{j\,(\tau_1\tau_2)\overline{\beta}}\right)\\
&= -\sum_{\beta,\gamma} g_j^{\overline{\beta}\gamma}\Bigg(\partial_\gamma\left(\delta^{\sigma_2}_{\rho_2}\mu^{\rho_1}_{j\,\sigma_1\overline{\beta}} - \delta^{\rho_1}_{\sigma_1}\mu^{\sigma_2}_{j\,\rho_2\overline{\beta}}\right) + \sum_{\nu,\tau}\delta^{(\tau_1\tau_2)}_{(\sigma_1\sigma_2)}\Gamma^{(\rho_1\rho_2)}_{j\,\gamma(\nu_1\nu_2)}\left(\delta^{\tau_2}_{\nu_2}\mu^{\nu_1}_{j\,\tau_1\overline{\beta}} - \delta^{\nu_1}_{\tau_1}\mu^{\tau_2}_{j\,\nu_2\overline{\beta}}\right)\\
&\qquad - \sum_{\nu,\tau}\delta^{(\rho_1\rho_2)}_{(\nu_1\nu_2)}\Gamma^{(\tau_1\tau_2)}_{j\,\gamma(\sigma_1\sigma_2)}\left(\delta^{\tau_2}_{\nu_2}\mu^{\nu_1}_{j\,\tau_1\overline{\beta}} - \delta^{\nu_1}_{\tau_1}\mu^{\tau_2}_{j\,\nu_2\overline{\beta}}\right)\Bigg)\\
&= -\sum_{\beta,\gamma} g_j^{\overline{\beta}\gamma}\Bigg(\delta^{\sigma_2}_{\rho_2}\partial_\gamma\mu^{\rho_1}_{j\,\sigma_1\overline{\beta}} - \delta^{\rho_1}_{\sigma_1}\partial_\gamma\mu^{\sigma_2}_{j\,\rho_2\overline{\beta}} + \sum_{\nu,\tau}\delta^{\tau_1}_{\sigma_1}\delta^{\tau_2}_{\sigma_2}\delta^{\tau_2}_{\nu_2}\Gamma^{(\rho_1\rho_2)}_{j\,\gamma(\nu_1\nu_2)}\mu^{\nu_1}_{j\,\tau_1\overline{\beta}}\\
&\qquad - \sum_{\nu,\tau}\delta^{\tau_1}_{\sigma_1}\delta^{\tau_2}_{\sigma_2}\delta^{\nu_1}_{\tau_1}\Gamma^{(\rho_1\rho_2)}_{j\,\gamma(\nu_1\nu_2)}\mu^{\tau_2}_{j\,\nu_2\overline{\beta}} - \sum_{\nu,\tau}\delta^{\rho_1}_{\nu_1}\delta^{\rho_2}_{\nu_2}\delta^{\tau_2}_{\nu_2}\Gamma^{(\tau_1\tau_2)}_{j\,\gamma(\sigma_1\sigma_2)}\mu^{\nu_1}_{j\,\tau_1\overline{\beta}}\\
&\qquad + \sum_{\nu,\tau}\delta^{\rho_1}_{\nu_1}\delta^{\rho_2}_{\nu_2}\delta^{\nu_1}_{\tau_1}\Gamma^{(\tau_1\tau_2)}_{j\,\gamma(\sigma_1\sigma_2)}\mu^{\tau_2}_{j\,\nu_2\overline{\beta}}\Bigg)\\
&= -\sum_{\beta,\gamma} g_j^{\overline{\beta}\gamma}\Bigg(\delta^{\sigma_2}_{\rho_2}\partial_\gamma\mu^{\rho_1}_{j\,\sigma_1\overline{\beta}} - \delta^{\rho_1}_{\sigma_1}\partial_\gamma\mu^{\sigma_2}_{j\,\rho_2\overline{\beta}} + \sum_{\nu}\Gamma^{(\rho_1\rho_2)}_{j\,\gamma(\nu\sigma_2)}\mu^{\nu}_{j\,\sigma_1\overline{\beta}} - \sum_{\nu}\Gamma^{(\rho_1\rho_2)}_{j\,\gamma(\sigma_1\nu)}\mu^{\sigma_2}_{j\,\nu\overline{\beta}}\\
&\qquad - \sum_{\tau}\Gamma^{(\tau\rho_2)}_{j\,\gamma(\sigma_1\sigma_2)}\mu^{\rho_1}_{j\,\tau\overline{\beta}} + \sum_{\tau}\Gamma^{(\rho_1\tau)}_{j\,\gamma(\sigma_1\sigma_2)}\mu^{\tau}_{j\,\rho_2\overline{\beta}}\Bigg)\\
&= -\sum_{\beta,\gamma} g_j^{\overline{\beta}\gamma}\Bigg(\delta^{\sigma_2}_{\rho_2}\partial_\gamma\mu^{\rho_1}_{j\,\sigma_1\overline{\beta}} - \delta^{\rho_1}_{\sigma_1}\partial_\gamma\mu^{\sigma_2}_{j\,\rho_2\overline{\beta}} + \sum_{\nu}\left(\delta^{\sigma_2}_{\rho_2}\Gamma^{\rho_1}_{j\,\gamma\nu} - \delta^{\rho_1}_{\nu}\Gamma^{\sigma_2}_{j\,\gamma\rho_2}\right)\mu^{\nu}_{j\,\sigma_1\overline{\beta}}\\
&\qquad - \sum_{\nu}\left(\delta^{\nu}_{\rho_2}\Gamma^{\rho_1}_{j\,\gamma\sigma_1} - \delta^{\rho_1}_{\sigma_1}\Gamma^{\nu}_{j\,\gamma\rho_2}\right)\mu^{\sigma_2}_{j\,\nu\overline{\beta}} - \sum_{\tau}\left(\delta^{\sigma_2}_{\rho_2}\Gamma^{\tau}_{j\,\gamma\sigma_1} - \delta^{\tau}_{\sigma_1}\Gamma^{\sigma_2}_{j\,\gamma\rho_2}\right)\mu^{\rho_1}_{j\,\tau\overline{\beta}}\\
&\qquad + \sum_{\tau}\left(\delta^{\sigma_2}_{\tau}\Gamma^{\rho_1}_{j\,\gamma\sigma_1} - \delta^{\rho_1}_{\sigma_1}\Gamma^{\sigma_2}_{j\,\gamma\tau}\right)\mu^{\tau}_{j\,\rho_2\overline{\beta}}\Bigg)\\
&= -\sum_{\beta,\gamma} g_j^{\overline{\beta}\gamma}\Bigg(\delta^{\sigma_2}_{\rho_2}\partial_\gamma\mu^{\rho_1}_{j\,\sigma_1\overline{\beta}} - \delta^{\rho_1}_{\sigma_1}\partial_\gamma\mu^{\sigma_2}_{j\,\rho_2\overline{\beta}} + \sum_{\nu}\delta^{\sigma_2}_{\rho_2}\Gamma^{\rho_1}_{j\,\gamma\nu}\mu^{\nu}_{j\,\sigma_1\overline{\beta}} - \Gamma^{\sigma_2}_{j\,\gamma\rho_2}\mu^{\rho_1}_{j\,\sigma_1\overline{\beta}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\quad - \Gamma^{\rho_1}_{j\,\gamma\sigma_1}\mu^{\sigma_2}_{j\,\rho_2\overline{\beta}} + \sum_\nu \delta^{\rho_1}_{\sigma_1}\Gamma^{\nu}_{j\,\gamma\rho_2}\mu^{\sigma_2}_{j\,\nu\overline{\beta}} - \sum_\tau \delta^{\sigma_2}_{\rho_2}\Gamma^{\tau}_{j\,\gamma\sigma_1}\mu^{\rho_1}_{j\,\tau\overline{\beta}} + \Gamma^{\sigma_2}_{j\,\gamma\rho_2}\mu^{\rho_1}_{j\,\sigma_1\overline{\beta}} \\
&\quad + \Gamma^{\rho_1}_{j\,\gamma\sigma_1}\mu^{\sigma_2}_{j\,\rho_2\overline{\beta}} - \sum_\tau \delta^{\rho_1}_{\sigma_1}\Gamma^{\sigma_2}_{j\,\gamma\tau}\mu^{\tau}_{j\,\rho_2\overline{\beta}} \Bigg) \\
&= -\sum_{\beta,\gamma} g_j^{\overline{\beta}\gamma}\Bigg(\delta^{\sigma_2}_{\rho_2}\Bigg(\partial_\gamma\mu^{\rho_1}_{j\,\sigma_1\overline{\beta}} + \sum_\nu \Gamma^{\rho_1}_{j\,\gamma\nu}\mu^{\nu}_{j\,\sigma_1\overline{\beta}} - \sum_\tau \Gamma^{\tau}_{j\,\gamma\sigma_1}\mu^{\rho_1}_{j\,\tau\overline{\beta}}\Bigg) \\
&\quad - \delta^{\rho_1}_{\sigma_1}\Bigg(\partial_\gamma\mu^{\sigma_2}_{j\,\rho_2\overline{\beta}} + \sum_\tau \Gamma^{\sigma_2}_{j\,\gamma\tau}\mu^{\tau}_{j\,\rho_2\overline{\beta}} - \sum_\nu \Gamma^{\nu}_{j\,\gamma\rho_2}\mu^{\sigma_2}_{j\,\nu\overline{\beta}}\Bigg)\Bigg) \\
&= \delta^{\sigma_2}_{\rho_2}\Bigg(-\sum_{\beta,\gamma} g_j^{\overline{\beta}\gamma}\Bigg(\partial_\gamma\mu^{\rho_1}_{j\,\sigma_1\overline{\beta}} + \sum_\nu \Gamma^{\rho_1}_{j\,\gamma\nu}\mu^{\nu}_{j\,\sigma_1\overline{\beta}} - \sum_\tau \Gamma^{\tau}_{j\,\gamma\sigma_1}\mu^{\rho_1}_{j\,\tau\overline{\beta}}\Bigg)\Bigg) \\
&\quad - \delta^{\rho_1}_{\sigma_1}\Bigg(-\sum_{\beta,\gamma} g_j^{\overline{\beta}\gamma}\Bigg(\partial_\gamma\mu^{\sigma_2}_{j\,\rho_2\overline{\beta}} + \sum_\tau \Gamma^{\sigma_2}_{j\,\gamma\tau}\mu^{\tau}_{j\,\rho_2\overline{\beta}} - \sum_\nu \Gamma^{\nu}_{j\,\gamma\rho_2}\mu^{\sigma_2}_{j\,\nu\overline{\beta}}\Bigg)\Bigg).
\end{aligned}
$$

Andererseits ist:

$$
\begin{aligned}
\left(\bar\partial^*\mu\right)^{\rho}_{j\,\sigma} &= -\sum_{\beta,\gamma} g_j^{\overline{\beta}\gamma}\Bigg(\nabla_\gamma\mu^{\rho}_{j\,\sigma\overline{\beta}} + \sum_{\nu,\tau}\Gamma^{(\rho\sigma)}_{j\,\gamma(\nu\tau)}\mu^{\nu}_{j\,\tau\overline{\beta}}\Bigg) \\
&= -\sum_{\beta,\gamma} g_j^{\overline{\beta}\gamma}\Bigg(\partial_\gamma\mu^{\rho}_{j\,\sigma\overline{\beta}} + \sum_{\nu,\tau}\left(\delta^{\tau}_{\sigma}\Gamma^{\rho}_{j\,\gamma\nu} - \delta^{\rho}_{\nu}\Gamma^{\tau}_{j\,\gamma\sigma}\right)\mu^{\nu}_{j\,\tau\overline{\beta}}\Bigg) \\
&= -\sum_{\beta,\gamma} g_j^{\overline{\beta}\gamma}\Bigg(\partial_\gamma\mu^{\rho}_{j\,\sigma\overline{\beta}} + \sum_{\nu}\Gamma^{\rho}_{j\,\gamma\nu}\mu^{\nu}_{j\,\sigma\overline{\beta}} - \sum_\tau \Gamma^{\tau}_{j\,\gamma\sigma}\mu^{\rho}_{j\,\tau\overline{\beta}}\Bigg).
\end{aligned}
$$

Durch Vergleichen beider Resultate erhalten wir die folgende Gleichung, welche den wesentlichen technischen Teil des Beweises darstellt:

$$
\left(\bar\partial^*\psi\right)^{(\rho_1\rho_2)}_{j\,(\sigma_1\sigma_2)} = \delta^{\sigma_2}_{\rho_2}\left(\bar\partial^*\mu\right)^{\rho_1}_{j\,\sigma_1} - \delta^{\rho_1}_{\sigma_1}\left(\bar\partial^*\mu\right)^{\sigma_2}_{j\,\rho_2}. \tag{4.41}
$$

Mit dieser Vorbereitung finden wir für

$$
\rho_{\mathrm{End}(F)\,k\bar l}\Big|_t - \bar\partial^*\psi \in \Gamma\left(X, \mathcal{A}^{0,0}\left(\mathrm{End}(\mathrm{End}(F_t))\right)\right)
$$

unter Anwendung der Formeln (4.38), (4.39) und (4.41) die lokale Beschreibung:

$$
\begin{aligned}
\left(\rho_{\mathrm{End}(F)\,k\bar l}\Big|_t - \bar\partial^*\psi\right)^{(\rho_1\rho_2)}_{j\,(\sigma_1\sigma_2)} &= \delta^{\sigma_2}_{\rho_2}\left(\left(\rho_{k\bar l}\big|_t\right)^{\rho_1}_{j\,\sigma_1} - \left(\bar\partial^*\mu\right)^{\rho_1}_{j\,\sigma_1}\right) - \delta^{\rho_1}_{\sigma_1}\left(\left(\rho_{k\bar l}\big|_t\right)^{\sigma_2}_{j\,\rho_2} - \left(\bar\partial^*\mu\right)^{\sigma_2}_{j\,\rho_2}\right) \\
&= \delta^{\sigma_2}_{\rho_2}\left(\rho_{k\bar l}\big|_t - \bar\partial^*\mu\right)^{\rho_1}_{j\,\sigma_1} - \delta^{\rho_1}_{\sigma_1}\left(\rho_{k\bar l}\big|_t - \bar\partial^*\mu\right)^{\sigma_2}_{j\,\rho_2} \\
&= \delta^{\sigma_2}_{\rho_2}\left(H\left(\rho_{k\bar l}\big|_t\right)\right)^{\rho_1}_{j\,\sigma_1} - \delta^{\rho_1}_{\sigma_1}\left(H\left(\rho_{k\bar l}\big|_t\right)\right)^{\sigma_2}_{j\,\rho_2}.
\end{aligned} \tag{4.42}
$$

Definitionsgemäß ist eine Form $\eta \in \Gamma\left(X, \mathcal{A}^{0,0}\left(\mathrm{End}(\mathrm{End}(F_t))\right)\right)$ harmonisch, falls $\Box_{\bar\partial}\eta = 0$ gilt und dies ist wiederum genau dann der Fall, wenn $\bar\partial\eta = 0$ und $\bar\partial^*\eta = 0$ gelten. Da es sich aber um eine $(0,0)$-Form handelt, ist $\bar\partial^*\eta = 0$ stets erfüllt, so dass eine solche Form η genau dann harmonisch ist, wenn $\bar\partial\eta = 0$ gilt. Mit der eben hergeleiteten Formel (4.42) berechnen wir nun:

$$\begin{aligned}\left(\bar\partial\left(\rho_{\mathrm{End}(F)\,k\bar l}\Big|_t - \bar\partial^*\psi\right)\right)^{(\rho_1\rho_2)}_{j\,(\sigma_1\sigma_2)} &= \bar\partial\left(\rho_{\mathrm{End}(F)\,k\bar l}\Big|_t - \bar\partial^*\psi\right)^{(\rho_1\rho_2)}_{j\,(\sigma_1\sigma_2)} \\ &= \delta^{\sigma_2}_{\rho_2}\bar\partial\left(H\left(\rho_{k\bar l}\big|_t\right)\right)^{\rho_1}_{j\,\sigma_1} - \delta^{\rho_1}_{\sigma_1}\bar\partial\left(H\left(\rho_{k\bar l}\big|_t\right)\right)^{\sigma_2}_{j\,\rho_2} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Wir haben also bewiesen, dass $\rho_{\mathrm{End}(F)\,k\bar l}\big|_t - \bar\partial^*\psi$ harmonisch ist und indem wir

$$\rho_{\mathrm{End}(F)\,k\bar l}\Big|_t = \left(\rho_{\mathrm{End}(F)\,k\bar l}\Big|_t - \bar\partial^*\psi\right) + \ \bar\partial^*\psi$$

schreiben, folgt aus der Eindeutigkeit der Hodge-Zerlegung:

$$H\left(\rho_{\mathrm{End}(F)\,k\bar l}\Big|_t\right) = \rho_{\mathrm{End}(F)\,k\bar l}\Big|_t - \bar\partial^*\psi.$$

Damit gilt aber lokal erneut aufgrund von (4.42)

$$\left(H\left(\rho_{\mathrm{End}(F)\,k\bar l}\Big|_t\right)\right)^{(\rho_1\rho_2)}_{j\,(\sigma_1\sigma_2)} = \delta^{\sigma_2}_{\rho_2}\left(H\left(\rho_{k\bar l}\big|_t\right)\right)^{\rho_1}_{j\,\sigma_1} - \delta^{\rho_1}_{\sigma_1}\left(H\left(\rho_{k\bar l}\big|_t\right)\right)^{\sigma_2}_{j\,\rho_2}$$

also die behauptete Gleichung. □

Wir gewinnen aus dieser Proposition nun leicht den folgenden optimalen Ersatz für Theorem 4.53 in der Situation einer Familie von Endomorphismenbündeln:

Theorem 4.56. *Es sei $(F,h) \to X \times S$ eine Familie von Hermite-Einstein-Vektorbündeln auf der kompakten Kählermannigfaltigkeit (X,g), parametrisiert durch die komplexe Mannigfaltigkeit S. Ferner sei (V,s) eine Koordinatenumgebung auf S. Dann gilt für die induzierte Familie $(\mathrm{End}(F),H) \to X \times S$ der Endomorphismenbündel in jedem Punkt $t \in V$, für den $F_t \to X$ einfach ist:*

$$H\left(\rho_{\mathrm{End}(F)\,k\bar l}\Big|_t\right) = 0.$$

Beweis. Da eine $(0,0)$-Form, wie im Beweis der vorangegangenen Proposition festgehalten wurde, genau dann harmonisch ist, wenn sie $\bar\partial$-geschlossen und damit holomorph ist, folgt zunächst aus der vorausgesetzten Einfachheit von $F_t \to X$:

$$\mathcal{H}^{0,0}(X, \mathrm{End}(F_t), H_t) = \Gamma\left(X, \mathcal{O}\left(\mathrm{End}(\mathrm{F_t})\right)\right) = \mathbb{C}\cdot\mathrm{id}\,.$$

Auf der Koordinatenumgebung (V,s) ist $\rho_{k\bar l}\big|_t \in \Gamma\left(X, \mathcal{A}^{0,0}\left(\mathrm{End}(F_t)\right)\right)$ und damit:

$$H\left(\rho_{k\bar l}\big|_t\right) \in \mathcal{H}^{0,0}(X, \mathrm{End}(F_t), H_t) = \mathbb{C}\cdot\mathrm{id}\,.$$

Also existiert ein $\varphi \in \mathbb{C}$ mit $H\left(\rho_{k\bar{l}}\big|_t\right) = \varphi \cdot \mathrm{id}$ oder lokal auf U_j geschrieben:

$$\left(H\left(\rho_{k\bar{l}}\big|_t\right)\right)^{\rho}_{j\,\sigma} = \varphi \delta^{\rho}_{\sigma}.$$

Indem wir Proposition 4.55 anwenden, erhalten wir:

$$\begin{aligned}\left(H\left(\rho_{\mathrm{End}(F)\,k\bar{l}}\Big|_t\right)\right)^{(\rho_1\rho_2)}_{j\,(\sigma_1\sigma_2)} &= \delta^{\sigma_2}_{\rho_2}\left(H\left(\rho_{k\bar{l}}\big|_t\right)\right)^{\rho_1}_{j\,\sigma_1} - \delta^{\rho_1}_{\sigma_1}\left(H\left(\rho_{k\bar{l}}\big|_t\right)\right)^{\sigma_2}_{j\,\rho_2} \\ &= \varphi\left(\delta^{\sigma_2}_{\rho_2}\delta^{\rho_1}_{\sigma_1} - \delta^{\rho_1}_{\sigma_1}\delta^{\sigma_2}_{\rho_2}\right) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Damit folgt aber $H\left(\rho_{\mathrm{End}(F)\,k\bar{l}}\Big|_t\right) = 0$, wie behauptet. $\square$

5. Ausblick

In diesem Kapitel skizzieren wir einige bislang nicht vollständig ausgearbeitete Ideen bezüglich einer Anwendung der in Kapitel 4 bereitgestellten Resultate auf die Modulräume stabiler Vektorbündel über kompakten Kählermannigfaltigkeiten. Der Vollständigkeit halber erinnern wir vorab kurz an verschiedene bekannte differentialgeometrische sowie algebraische Positivitätsbegriffe für holomorphe Vektorbündel und ihre Bezüge zueinander.

Sei also $(E, h) \to M$ ein hermitesches, holomorphes Vektorbündel vom Rang r auf der komplexen Mannigfaltigkeit M der Dimension m und bezeichne $\Omega \in \Gamma\left(M, \mathcal{A}^{1,1}(\mathrm{End}(E))\right)$ die Krümmung von h. Wir wählen eine Überdeckung von M durch holomorphe Koordinatenumgebungen (U_j, z_j), über denen E jeweils trivialisiert werden kann, und bezeichnen die zugehörigen Transitionsfunktionen mit $f_{jk} : U_j \cap U_k \to \mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$. Nach Konstruktion kann ferner das holomorphe Tangentialbündel $TM \to M$ über den U_j trivialisiert werden, so dass auch das holomorphe Vektorbündel

$$E \otimes TM \longrightarrow M$$

über den U_j trivialisiert werden kann. Für die zugehörigen Transitionsfunktionen folgt direkt:

$$g_{jk} : U_j \cap U_k \longrightarrow \mathrm{GL}(rm, \mathbb{C}), \qquad g^{\rho\alpha}_{jk\,\sigma\beta} = f^{\rho}_{jk\,\sigma} \frac{\partial z^{\alpha}_{j}}{\partial z^{\beta}_{k}}.$$

Die Krümmung Ω von h auf E gibt bekanntlich auf kanonische Weise Anlass zu einer hermiteschen Form L_h auf dem Bündel $E \otimes TM \to M$. Schreiben wir die Krümmung Ω lokal auf U_j in der Form

$$\Theta^{\rho}_{j\,\sigma} = \sum_{\alpha,\beta} R^{\rho}_{j\,\sigma\alpha\overline{\beta}} dz^{\alpha}_{j} \wedge dz^{\overline{\beta}}_{j},$$

dann können wir definieren:

$$L_j : U_j \longrightarrow \mathbb{C}^{rm \times rm}, \qquad L_{j\,(\rho\alpha)(\overline{\sigma}\overline{\beta})} = \sum_{\nu} R^{\nu}_{j\,\rho\alpha\overline{\beta}} h_{j\,\nu\overline{\sigma}}.$$

Mittels einer kurzen Rechnung mit den Transitionsfunktionen g_{jk} überzeugt man sich davon, dass die L_j das Transformationsverhalten einer hermiteschen Form auf $E \otimes TM \to M$ besitzen und dass $L_j(p)$ in jedem Punkt $p \in U_j$ eine hermitesche Matrix ist, so dass wir insgesamt tatsächlich eine hermitesche Form L_h konstruiert haben, deren Definitheit ein wohldefinierter Begriff ist. Das Bündel (E, h) heißt Nakano-positiv ([Na55]), falls die hermitesche Form L_h auf ganz M positiv definit ist, und ganz analog werden Begriffe wie etwa die Nakano-Semipositivität erklärt. Einen anderen Positivitätsbegriff erhalten wir, wenn wir für alle Punkte $p \in M$ lediglich fordern, dass für Tensoren $v \otimes \zeta \in (E \otimes TM)|_p$ vom Rang 1 stets $\langle v \otimes \zeta, v \otimes \zeta \rangle_{L_h} > 0$ gilt. In diesem Fall heißt das Bündel Griffiths-positiv ([Gr69]) und erneut können wir auf die gleiche

Weise Begriffe wie die Griffiths-Semipositivität erklären. Wir sehen unmittelbar, dass beide Positivitätsbegriffe für Geradenbündel identisch sind, so dass wir in diesem Fall einfach von Positivität (im ursprünglichen Sinn gemäß Kodaira, vergleiche [Ko53]) sprechen, und in den übrigen Fällen Nakano-Positivität stets Griffiths-Positivität impliziert.

Bezüglich der algebraischen Positivitätsbegriffe beschränken wir uns auf den Fall eines holomorphen Vektorbündels $E \to M$ über einer Kählermannigfaltigkeit (M, g). Ist zunächst E als Geradenbündel vorausgesetzt, dann heißt E sehr ample, falls es eine abgeschlossene Einbettung $M \subset \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ von M in einen projektiven Raum gibt, so dass $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N(\mathbb{C})}(1)|_M = E$ gilt, oder anders formuliert, wenn E genügend viele globale Schnitte besitzt, so dass diese zu einer Einbettung von M in einen projektiven Raum Anlass geben. Dagegen heißt ein Geradenbündel E ample, falls es eine natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$ gibt, so dass die k-te symmetrische Potenz

$$S^k E \longrightarrow M$$

sehr ample ist. Dabei bemerken wir, dass wegen $\mathrm{rk}(E) = 1$ natürlich $S^k E = E^{\otimes k}$ gilt. Ist nun E nicht mehr unbedingt als Geradenbündel vorausgesetzt, dann erklären wir den Begriff der Ampleness gemäß Hartshorne ([Ha66]) durch Reduktion auf den Geradenbündelfall: Wir nennen E in diesem Fall ample, falls das Serre-Geradenbündel $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$ auf dem projektivierten Faserbündel $\mathbb{P}(E)$ von E ein amples Geradenbündel ist.

Die Herleitung von Bezügen zwischen den differentialgeometrischen und den algebraischen Begriffen ist motiviert durch den berühmten Einbettungssatz von Kodaira:

Theorem 5.1 ([Ko54])**.** *Ein Geradenbündel E auf einer kompakten Kählermannigfaltigkeit (M, g) ist genau dann ample, wenn es positiv ist. Insbesondere ist (M, g) genau dann eine projektiv algebraische Mannigfaltigkeit, wenn es ein positives Geradenbündel auf M gibt, und dies ist genau dann der Fall, wenn es eine Hodge-Metrik auf M gibt.*

Wir zitieren in der allgemeinen Situation beliebigen Ranges zunächst folgende Charakterisierung ampler Vektorbündel durch ihre symmetrischen Potenzen:

Satz 5.2 ([Ha66])**.** *Sei $E \to M$ ein holomorphes Vektorbündel auf einer kompakten, komplexen Mannigfaltigkeit M. Ist E ample, dann sind die symmetrischen Potenzen $S^k E \to M$ für große $k \in \mathbb{N}$ ample. Ist umgekehrt für ein $k \in \mathbb{N}$ die symmetrische Potenz $S^k E \to M$ ample, dann ist auch E ample.*

Außerdem haben wir stets folgende Beziehung zwischen den differentialgeometrischen und den algebraischen Positivitätsbegriffen:

Theorem 5.3 ([SS85])**.** *Sei $E \to M$ ein holomorphes Vektorbündel auf einer kompakten, komplexen Mannigfaltigkeit M. Dann gilt: Gibt es eine Griffiths-positive hermitesche Metrik auf E, so ist E ample.*

Ob auch eine Umkehrung dieser Aussage gilt, ist nach wie vor ein offenes Problem. Schließlich zitieren wir noch folgende Vermutung von Hartshorne, welche von Mori bewiesen wurde:

Theorem 5.4 ([Ha70, Mo79])**.** *Sei M eine projektive, komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension m mit amplem holomorphem Tangentialbündel $TM \to M$. Dann ist $M = \mathbb{P}^m(\mathbb{C})$.*

Wir sind an Krümmungseigenschaften der Modulräume stabiler Vektorbündel interessiert. Erhält man im Fall von Modulräumen komplexer Mannigfaltigkeiten häufig Hyperbolizitätsresultate, wie etwa im klassischen Fall der Teichmüllertheorie zur Klassifikation kompakter Riemannscher Flächen, so legt bereits das Beispiel der Modulräume von Geradenbündeln auf einer kompakten Riemannschen Fläche X vom Geschlecht g die Vermutung nahe, dass die Situation hier anders ist. Da der Modulraum in diesem Fall als Jacobische Varietät $J(X)$ von X stets ein komplexer Torus $\mathbb{C}^g/\Lambda$ ist, sind diese Räume nicht hyperbolisch. Wir hoffen also, dass zumindest unter günstigen Bedingungen Positivitätseigenschaften gezeigt werden können. Ein naheliegender Ansatz hierfür besteht darin, die Weil-Petersson-Metrik zu untersuchen. Für deren Krümmung haben Schumacher und Toma gezeigt:

Theorem 5.5 ([ST92]). *Sei $(F,h) \to X \times S$ eine lokal universelle Familie einfacher Hermite-Einstein-Vektorbündel über einem glatten Parameterraum S. Dann folgt für den Krümmungstensor der Weil-Petersson-Metrik:*

$$\begin{aligned} R^{WP}_{i\bar{j}k\bar{l}} = &- \int_X \operatorname{tr} \Box_0^{-1}([R_{i\overline{\beta}}, R_{\alpha\bar{j}}]g^{\overline{\beta}\alpha})([R_{k\overline{\delta}}, R_{\gamma\bar{l}}]g^{\overline{\delta}\gamma})g\, dv \\ &- \int_X \operatorname{tr} \Box_0^{-1}([R_{i\overline{\beta}}, R_{\alpha\bar{l}}]g^{\overline{\beta}\alpha})([R_{k\overline{\delta}}, R_{\gamma\bar{j}}]g^{\overline{\delta}\gamma})g\, dv \\ &- \int_X \operatorname{tr} [R_{i\overline{\beta}}, R_{k\overline{\delta}}]G([R_{\alpha\bar{j}}, R_{\gamma\bar{l}}])(1/2)(g^{\overline{\beta}\alpha}g^{\overline{\delta}\gamma} - g^{\overline{\beta}\gamma}g^{\overline{\delta}\alpha})g\, dv. \end{aligned}$$

Ferner wird in [ST92] bemerkt, dass bezüglich der holomorphen Schnittkrümmung sowie der Ricci-Krümmung die ersten beiden Summanden in dieser Formel einen nichtnegativen Beitrag liefern, wohingegen der dritte Summand, der im Fall einer Riemannschen Fläche X verschwindet, nichtpositiv eingeht. Aus diesem Grund erhalten wir aus der Weil-Petersson-Metrik zunächst keine guten Krümmungsaussagen.

Wir schlagen daher einen anderen Ansatz vor, welcher auf der Vermutung beruht, dass zumindest unter günstigen Bedingungen an X, an den Parameterraum S sowie an Rang und Grad der betrachteten Vektorbündel auf einer der symmetrischen Potenzen $S^kTS \to S$ eine Griffiths-positive, hermitesche Metrik existiert. Beispielsweise liegt die Vermutung nahe, dass zumindest für eine Kurve S unter geeigneten Bedingungen auf einer symmetrischen Potenz eine solche Metrik konstruiert werden kann. In diesem Fall wäre dann nach den eben zitierten Aussagen $S^kTS \to S$ und damit auch das holomorphe Tangentialbündel $TS \to S$ ample, so dass $S = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ folgen würde. Auf diese Weise könnten also gegebenenfalls Aussagen über Kurven im Modulraum gewonnen werden. Existieren sogar für höherdimensionale S solche positiven Metriken auf einer symmetrischen Potenz des holomorphen Tangentialbündels, dann könnten völlig analog mit den eben eingesetzten Resultaten Aussagen über projektive Untervarietäten des Modulraums hergeleitet werden.

Da die Hauptschwierigkeit dieser Argumentationsweise offenbar in der Existenz positiver Metriken auf einer symmetrischen Potenz des holomorphen Tangentialbündels an den Parameterraum liegt, zeigen wir kurz eine Möglichkeit, wie solche Metriken eventuell konstruiert werden können. Ausgangspunkt ist die Konstruktion verallgemeinerter Kodaira-Spencer-Abbildungen aus der vorhandenen Abbildung $\rho_{s_0} : T_{s_0}S \to H^1(X, \mathcal{O}(\mathrm{End}(F_{s_0})))$. Da das Wedge-Produkt für endomorphismenbündelwertige (p,q)-Formen offenbar ein wohldefiniertes Produkt in der

Dolbeault-Kohomologie induziert, welches wir ebenfalls mit $\wedge$ bezeichnen, können wir für $k \geqslant 1$ die verallgemeinerte Kodaira-Spencer-Abbildung der Ordnung k durch

$$\rho_{s_0}^k : S^k T_{s_0} S \longrightarrow H^k(X, \mathcal{O}\,(\mathrm{End}(F_{s_0}))), \quad w_1 \vee \ldots \vee w_k \longmapsto \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \rho_{s_0}(w_{\sigma(1)}) \wedge \ldots \wedge \rho_{s_0}(w_{\sigma(k)})$$

sowie lineare Ausdehnung auf den ganzen Raum erklären. Die Kodaira-Spencer-Abbildung im Punkt s_0 entsteht bekanntlich als Einschränkung eines Verbindungshomomorphismus

$$\rho : \mathcal{O}\,(TS) \longrightarrow R^1 p_* \mathcal{O}\,(\mathrm{End}(F))$$

auf die Faser über s_0 der zugehörigen Vektorbündel. Auch die Abbildungen höherer Ordnung können aus Morphismen

$$\rho^k : \mathcal{O}(S^k TS) \longrightarrow R^k p_* \mathcal{O}\,(\mathrm{End}(F))$$

von $\mathcal{O}_S$-Moduln gewonnen werden, wenn eine Familie $(F, h) \to X \times S$ hermitescher, holomorpher Vektorbündel vorliegt. Bezeichnen wir die Krümmung mit $\Omega \in \Gamma\left(X \times S, \mathcal{A}^{1,1}\,(\mathrm{End}(F))\right)$, dann erhalten wir über jeder offenen Menge $V \subset S$ eine Abbildung

$$\Gamma(V, \mathcal{O}(S^k TS)) \longrightarrow \Gamma(X \times V, \mathcal{A}^{0,k}\,(\mathrm{End}(F)))$$

vermöge

$$w_1 \vee \ldots \vee w_k \longmapsto \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \left(-w_{\sigma(1)} \lrcorner\, \Omega\right) \wedge \ldots \wedge \left(-w_{\sigma(k)} \lrcorner\, \Omega\right)$$

sowie $\Gamma\,(V, \mathcal{O}_S)$-linearer Ausdehnung, wobei wir in dieser Definition das horizontale Liften der Vektorfelder w_j nicht explizit notieren. Diese Abbildungen sind offenbar mit den Restriktionen verträglich und bilden damit einen Prägarbenmorphismus der Garbe $\mathcal{O}\left(S^k TS\right)$ in die Prägarbe der Kohomologie, welcher schließlich zu einem Garbenmorphismus $\mathcal{O}(S^k TS) \to R^k p_* \mathcal{O}\,(\mathrm{End}(F))$ von $\mathcal{O}_S$-Moduln Anlass gibt. Außerhalb der Ausnahmemenge $A_k(\mathrm{End}(F))$ induziert dieser Morphismus ρ^k einen Morphismus holomorpher Vektorbündel und vermöge Theorem 3.17 sieht man leicht, dass die entsprechenden Abbildungen auf den Fasern mit den $\rho_{s_0}^k$ übereinstimmen.

Wir fassen kurz einige einfache Eigenschaften dieser Abbildungen zusammen. Zunächst ist $\rho_{s_0}^1 = \rho_{s_0}$ die übliche Kodaira-Spencer-Abbildung und ferner erhalten wir aus Dimensionsgründen $\rho_{s_0}^k = 0$ für alle $k > \dim_{\mathbb{C}} X$. Nach Konstruktion gilt stets die Rekursionsformel

$$\rho_{s_0}^k(w_1 \vee \ldots \vee w_k) = \sum_{j=1}^{k} \rho_{s_0}^{k-1}(w_1 \vee \ldots \vee \widehat{w_j} \vee \ldots \vee w_k) \wedge \rho_{s_0}(w_j),$$

aus der sofort folgt, dass mit $\rho_{s_0}^l = 0$ für ein $l > 0$ auch $\rho_{s_0}^k = 0$ für alle $k \geqslant l$ gilt. Speziell für $k = 2$ ist die verallgemeinerte Kodaira-Spencer-Abbildung im Wesentlichen die Lie-Klammer

$$\rho_{s_0}^2(w_1 \vee w_2) = [\rho_{s_0}(w_1), \rho_{s_0}(w_2)],$$

woran wir auch ablesen können, dass für Familien von Geradenbündeln zunächst $\rho_{s_0}^2 = 0$ und damit dann $\rho_{s_0}^k = 0$ für alle $k \geqslant 2$ gilt. Für Moduräume von Geradenbündeln versagt unser

Ansatz also. Schließlich halten wir noch die für Abschätzungen gegebenenfalls nützliche und nicht ganz offensichtliche Eigenschaft fest, dass zumindest für alle geraden Zahlen $2k \geqslant 2$ sogar

$$\rho_{s_0}^{2k} \in H^{2k}\left(X, \mathcal{O}\left(\mathrm{End}^0(F_{s_0})\right)\right)$$

gilt, wobei $\mathrm{End}^0(F_{s_0})$ das Bündel der spurfreien Endomorphismen bezeichnet, auf welchem der Green-Operator G besser zu handhaben ist. Für gerade Zahlen $2k$ haben wir also tatsächlich einen Garbenmorphismus der Gestalt

$$\rho^{2k} : S^{2k}TS \longrightarrow R^{2k}p_*\mathcal{O}\left(\mathrm{End}^0(F)\right)$$

konstruiert.

In Kapitel 4 haben wir gezeigt, dass zumindest außerhalb der Ausnahmemenge $A_k(\mathrm{End}(F))$, welche unter günstigen Bedingungen verschwindet, eine natürliche Metrik auf den höheren direkten Bildgarben $R^kp_*\mathcal{O}\left(\mathrm{End}(F)\right)$ existiert, welche eine Verallgemeinerung der Weil-Petersson-Metrik auf $R^1p_*\mathcal{O}\left(\mathrm{End}(F)\right)$ darstellt. Für deren Krümmung haben wir auf einer geeigneten Koordinatenumgebung um einen festen Punkt $s_0 \in S$ die folgende Formel hergeleitet, sofern eine Familie von einfachen Hermite-Einstein-Vektorbündeln vorliegt (vergleiche Theorem 4.40 sowie Theorem 4.56):

$$\begin{aligned} R^{\rho}_{L_2\,\sigma k\bar{l}}(s_0) = &\left\langle G\left(\rho_{\mathrm{End}(F)\,s_0}\left(\left.\frac{\partial}{\partial s^l}\right|_{s_0}\right) \cup \Xi_\rho(s_0)\right), \rho_{\mathrm{End}(F)\,s_0}\left(\left.\frac{\partial}{\partial s^k}\right|_{s_0}\right) \cup \Xi_\sigma(s_0)\right\rangle \\ &- \left\langle G\left(\sqrt{-1}\Lambda_g\left[\rho_{\mathrm{End}(F)\,s_0}\left(\left.\frac{\partial}{\partial s^k}\right|_{s_0}\right), \rho_{\mathrm{End}(F)\,s_0}\left(\left.\frac{\partial}{\partial s^l}\right|_{s_0}\right)^*\right]\right) \cap \Xi_\rho(s_0), \Xi_\sigma(s_0)\right\rangle \\ &- \left\langle G\left(\rho_{\mathrm{End}(F)\,s_0}\left(\left.\frac{\partial}{\partial s^k}\right|_{s_0}\right) \cap \Xi_\rho(s_0)\right), \rho_{\mathrm{End}(F)\,s_0}\left(\left.\frac{\partial}{\partial s^l}\right|_{s_0}\right) \cap \Xi_\sigma(s_0)\right\rangle. \end{aligned}$$

Dabei haben wir außerdem festgehalten, dass im Spezialfall $k = \dim_{\mathbb{C}} X$ der dritte Summand dieser Formel verschwindet. Wir können nun vermöge der verallgemeinerten Kodaira-Spencer-Abbildung $\rho^k_{s_0}$ diese hermitesche Metrik als Pseudometrik auf die symmetrischen Potenzen $S^kTS \to S$ übertragen. Unter geeigneten Bedingungen sollten gewisse $\rho^k_{s_0}$ injektiv sein, so dass die entsprechende Pseudometrik sogar eine Metrik ist, deren Krümmung mit dieser Formel abgeschätzt werden kann. Es ist jedoch nach wie vor ein offenes Problem, ob sich die technischen Schwierigkeiten in diesem Ansatz überwinden lassen, so dass damit tatsächlich die gewünschte positive Metrik auf einer symmetrischen Potenz konstruiert werden kann.

Literaturverzeichnis

[Ba10] T. E. V. Balaji: *An Introduction to Families, Deformations and Moduli*, Universitätsdrucke Göttingen (2010).

[Be09a] B. Berndtsson: *Curvature of vector bundles associated to holomorphic fibrations*, Ann. of Math., Vol. 169, 531–560 (2009).

[Be09b] B. Berndtsson: *Positivity of direct image bundles and convexity on the space of Kähler metrics*, J. Differ. Geom., Vol. 81, 457–482 (2009).

[Be11] B. Berndtsson: *Strict and nonstrict positivity of direct image bundles*, Math. Z., Vol. 269, 1201–1218 (2011).

[BL04] C. Birkenhake, H. Lange: *Complex Abelian Varieties*, Springer (2004).

[BP08a] B. Berndtsson, M. Păun: *Bergman kernels and the pseudoeffectivity of relative canonical bundles*, Duke Math. J., Vol. 145, No. 2, 341–378 (2008).

[BP08b] B. Berndtsson, M. Păun: *A Bergman kernel proof of the Kawamata subadjunction theorem*, preprint, arXiv:0804.3884 [math.AG] (2008).

[BP10] B. Berndtsson, M. Păun: *Bergman kernels and subadjunction*, preprint, arXiv:1002.4145 [math.AG] (2010).

[BS76] C. Bănică, O. Stănăşilă: *Algebraic Methods in the Global Theory of Complex Spaces*, John Wiley & Sons (1976).

[Bu93] N. P. Buchdahl: *Instantons on* $n\mathbb{CP}_2$, J. Differ. Geom., Vol. 37, 669–687 (1993).

[Do83] S. K. Donaldson: *A new proof of a theorem of Narasimhan and Seshadri*, J. Differ. Geom., Vol. 18, 269–277 (1983).

[Do84] S. K. Donaldson: *Instantons and Geometric Invariant Theory*, Commun. Math. Phys., Vol. 93, 453–460 (1984).

[Do85] S. K. Donaldson: *Anti self-dual Yang Mills connections over complex algebraic surfaces and stable vector bundles*, Proc. Lond. Math. Soc., III. Ser. 50, 1–26 (1985).

[Do87] S. K. Donaldson: *Infinite determinants, stable bundles and curvature*, Duke Math. J., Vol. 54, 231–247 (1987).

[DOT03] G. Dloussky, K. Oeljeklaus, M. Toma: *Class* VII_0 *surfaces with* b_2 *curves*, Tohoku Math. J., Vol. 55, 283–309 (2003).

[DS78] J.-P. Demailly, H. Skoda: *Relations entre les notions de positivités de P. A. Griffiths et de S. Nakano pour les fibrés vectoriels*, Séminaire P. Lelong et H. Skoda (Analyse), 304–309 (1978/79).

[Ei95] D. Eisenbud: *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*, Springer (1995).

[EL92] L. Ein, R. K. Lazarsfeld: *Stability and restrictions of Picard bundles with an application to the normal bundles of elliptic curves*, Lond. Math. Soc., Lecture Note, Ser. 179, 149–156 (1992).

[FK74] O. Forster, K. Knorr: *Über die Deformationen von Vektorraumbündeln auf kompakten komplexen Räumen*, Math. Ann., Vol. 209, 291–346 (1974).

[FS87] A. Fujiki, G. Schumacher: *The moduli space of Hermite-Einstein bundles on a compact Kähler manifold*, Proc. Japan Acad., Vol. 63, Ser. A, 69–72 (1987).

[Gr60] H. Grauert: *Ein Theorem der analytischen Garbentheorie und die Modulräume komplexer Strukturen*, I.H.E.S., Vol. 5, 233–292 (1960). Berichtigung, I.H.E.S., Vol. 16, 131–132 (1963).

[Gr69] P. A. Griffiths: *Hermitian differential geometry, Chern classes and positive vector bundles*, Global Analysis, Princeton University Press, 185–251 (1969).

[GHV72] W. Greub, S. Halperin, R. Vanstone: *Connections, Curvature, and Cohomology*, Academic Press (1972).

[GR65] R. C. Gunning, H. Rossi: *Analytic functions of several complex variables*, Prentice-Hall (1965).

[GR77] H. Grauert, R. Remmert: *Theorie der Steinschen Räume*, Springer (1977).

[GR84] H. Grauert, R. Remmert: *Coherent Analytic Sheaves*, Springer (1984).

[Ha66] R. Hartshorne: *Ample vector bundles*, I.H.E.S., Vol. 29, 63–94 (1966).

[Ha70] R. Hartshorne: *Ample subvarieties of algebraic varieties*, Lecture Notes in Math., Vol. 156, Springer (1970).

[Hu04] D. Huybrechts: *Complex Geometry, An Introduction*, Springer (2004).

[It85] M. Itoh: *The moduli space of Yang-Mills connections over a Kähler surface is a complex manifold*, Osaka J. Math., Vol. 22, 845–862 (1985).

[Ke92] G. R. Kempf: *A problem of Narasimhan*, Contemp. Math., Vol. 136, 283–286 (1992).

[Ki87] H.-J. Kim: *Moduli of Hermite-Einstein vector bundles*, Math. Z., Vol. 195, 143–150 (1987).

[Kb80] S. Kobayashi: *First Chern class and holomorphic tensor fields*, Nagoya Math. J., Vol. 77, 5–11 (1980).

[Kb82] S. Kobayashi: *Curvature and stability of vector bundles*, Proc. Japan Acad., Vol. 58, Ser. A, 158–162 (1982).

[Kb87] S. Kobayashi: *Differential geometry of complex vector bundles*, Publications of the Mathematical Society of Japan, 15; Kanô Memorial Lectures, 5. Princeton, NJ: Princeton University Press; Tokyo: Iwanami Shoten Publishers (1987).

[Ko53] K. Kodaira: *On a differential-geometric method in the theory of analytic stacks*, Proc. Nat. Acad. Sci., Vol. 39, 1268–1273 (1953).

[Ko54] K. Kodaira: *On Kähler varieties of restricted type (An intrinsic characterization of algebraic varieties)*, Ann. of Math., Vol. 60, No. 1, 28–48 (1954).

[KS58a] K. Kodaira, D. C. Spencer: *On deformations of complex analytic structures, I.*, Ann. of Math., Vol. 67, No. 2, 328–401 (1958).

[KS58b] K. Kodaira, D. C. Spencer: *On deformations of complex analytic structures, II.*, Ann. of Math., Vol. 67, No. 3, 403–466 (1958).

[KS60] K. Kodaira, D. C. Spencer: *On deformations of complex analytic structures, III. Stability theorems for complex structures*, Ann. of Math., Vol. 71, No. 1, 43–76 (1960).

[LO87] M. Lübke, C. Okonek: *Moduli spaces of simple bundles and Hermitian-Einstein connections*, Math. Ann., Vol. 276, 663–674 (1987).

[LOS93] M. Lübke, C. Okonek, G. Schumacher: *On a relative Kobayashi-Hitchin correspondence*, Int. J. Math., Vol. 4, No. 2, 253–288 (1993).

[Lue83] M. Lübke: *Stability of Einstein-Hermitian vector bundles*, Manuscr. Math., Vol. 42, 245–257 (1983).

[Lue93] M. Lübke: *The analytic moduli space of framed vector bundles*, J. reine angew. Math., Vol. 441, 45–59 (1993).

[LT95] M. Lübke, A. Teleman: *The Kobayashi-Hitchin correspondence*, Singapore: World Scientific (1995).

[LY87] J. Li, S.-T. Yau: *Hermitian Yang-Mills connections on non-Kähler manifolds*, Math. aspects of string theory, Adv. Ser. Math. Phys., Vol. 1, 560–573 (1987).

[MFK94] D. Mumford, J. Fogarty, F. Kirwan: *Geometric Invariant theory*, Springer (1994).

[Mi89] K. Miyajima: *Kuranishi family of vector bundles and algebraic description of the moduli space of Einstein-Hermitian connections*, Publ. R.I.M.S., Vol. 25, 301–320 (1989).

[MK71] J. Morrow, K. Kodaira: *Complex Manifolds*, Holt, Rinehart and Winston (1971).

[Mo79] S. Mori: *Projective manifolds with ample tangent bundles*, Ann. of Math., Vol. 110, No. 3, 593–606 (1979).

[MT07] C. Mourougane, S. Takayama: *Hodge metrics and positivity of direct images*, J. reine angew. Math., Vol. 606, 167–178 (2007).

[MT08] C. Mourougane, S. Takayama: *Hodge metrics and the curvature of higher direct images*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér., Vol. 41, 905–924 (2008).

[MT09] C. Mourougane, S. Takayama: *Extension of twisted Hodge metrics for Kähler morphisms*, J. Differ. Geom., Vol. 83, No. 1, 131–161 (2009).

[Mu63] D. Mumford: *Projective invariants of projective structures and applications*, Proc. Int. Congr. Math., 526–530 (1963).

[Na55] S. Nakano: *On complex analytic vector bundles*, J. Math. Soc. Japan, Vol. 7, 1–12 (1955).

[Ne78] P. E. Newstead: *Introduction to moduli problems and orbit spaces*, Tata Institute of Fundamental Research, Springer (1978).

[Ov92] M. Overhaus: *Die Petersson-Weil-Metrik auf dem Modulraum der Hermite-Einstein-Bündel*, Dissertation, Bochum (1992).

[Sc64] G. Scheja: *Fortsetzungssätze der komplex-analytischen Cohomologie und ihre algebraische Charakterisierung*, Math. Ann., Vol. 157, 75–94 (1964).

[Sch12] G. Schumacher: *Positivity of relative canonical bundles and applications*, Invent. Math., Vol. 190, 1–56 (2012).

[Sch13] G. Schumacher: *Erratum to: Positivity of relative canonical bundles and applications*, Invent. Math., Vol. 192, 253–255 (2013).

[SS85] B. Shiffman, A. J. Sommese: *Vanishing Theorems on Complex Manifolds*, Prog. in Math., Vol. 56, Birkhäuser (1985).

[ST92] G. Schumacher, M. Toma: *On the Petersson-Weil metric for the moduli space of Hermite-Einstein bundles and its curvature*, Math. Ann., Vol. 293, 101–107 (1992).

[Ta72] F. Takemoto: *Stable vector bundles on algebraic surfaces*, Nagoya Math. J., Vol. 47, 29–48 (1972).

[Te75] B. R. Tennison: *Sheaf Theory*, Lond. Math. Soc., Lecture Note, Ser. 20 (1975).

[Ts05] H. Tsuji: *Variation of Bergman kernels of adjoint line bundles*, preprint, arXiv:math/0511342 [math.CV] (2005).

[Te05] A. Teleman: *Donaldson theory on non-Kählerian surfaces and class VII surfaces with $b_2 = 1$*, Invent. Math., Vol. 162, 493–521 (2005).

[Te08] A. Teleman: *Families of holomorphic bundles*, Commun. Contemp. Math., Vol. 10, No. 4, 523–551 (2008).

[Te10] A. Teleman: *Instantons and curves on class VII surfaces*, Ann. of Math., Vol. 172, No. 3, 1749–1804 (2010).

[TW98] W.-K. To, L. Weng: *Curvature of the L2-metric on the direct image of a family of Hermitian-Einstein vector bundles*, Am. J. Math., Vol. 120, No. 3, 649–661 (1998).

[Um73] H. Umemura: *Some results in the theory of vector bundles*, Nagoya Math. J., Vol. 52, 97–128 (1973).

[UY86] K. Uhlenbeck, S.-T. Yau: *On the existence of Hermitian-Yang-Mills connections in stable vector bundles*, Commun. Pure Appl. Math., Vol. 39, 257–293 (1986).

[UY89] K. Uhlenbeck, S.-T. Yau: *A note on our previous paper: On the existence of Hermitian-Yang-Mills connections in stable vector bundles*, Commun. Pure Appl. Math., Vol. 42, 703–707 (1989).

[We94] C. A. Weibel: *An introduction to homological algebra*, Cambridge University Press (1994).

[We07] R. O. Wells, Jr.: *Differential Analysis on Complex Manifolds*, Springer (2007).

A. Englische Zusammenfassung

This thesis is a contribution to the moduli theory of stable vector bundles, in particular to the investigation of the geometry of the corresponding moduli spaces using transcendental methods.

The concept of stability for vector bundles was introduced by Mumford on curves in 1962 ([Mu63]). Later, in 1972, Takemoto adapted it to the general case ([Ta72]). It facilitates the construction of moduli spaces of vector bundles by means of geometric invariant theory ([MFK94]) and makes it possible to study such spaces using the methods of algebraic geometry. An analytic approach to the moduli problem of vector bundles was introduced by S. Kobayashi in 1980: In [Kb80] he generalized the concept of a Kähler-Einstein metric in the tangent bundle of a complex manifold to arbitrary holomorphic vector bundles. The corresponding metrics are known as Hermite-Einstein metrics and they also facilitate the construction of moduli spaces in the analytic category of complex spaces by means of analytic methods. Kim, for example, succeeded in constructing the corresponding moduli space in the case without obstructions in 1987, see [Ki87]. Further contributions to this topic were made, amongst others, by Fujiki, Itoh, Kobayashi, Lübke, Okonek and Schumacher ([FS87, It85, Kb87, LO87]). As early as 1982 S. Kobayashi gave a proof of the stability of irreducible Hermite-Einstein bundles over compact Kähler manifolds ([Kb82]) and at the same time as Hitchin, he conjectured that both concepts should always be equivalent. This conjecture was proved from 1982 until 1986 through several works of Donaldson, Uhlenbeck and Yau ([Do83, Do85, Do87, UY86, UY89]). Moreover, it was shown that there even exists an isomorphism between the moduli spaces of stable bundles respectively irreducible Hermite-Einstein bundles (see [LO87, Mi89, LT95]). Therefore, subsequently the algebraic and analytic approaches to the moduli problem of vector bundles turned out to be equivalent, a fact which is known today as the Kobayashi-Hitchin correspondence. Later, connections between different moduli spaces were also found in similar situations. Hence, they can be seen as generalizations of the Kobayashi-Hitchin correspondence. One of the early examples, which is still under investigation, is the situation of framed vector bundles. Here a framed bundle essentially means a holomorphic bundle $E \to X$ whose holomorphic structure along a given submanifold $Y \subset X$ is isomorphic to some fixed structure. In [Do84] Donaldson proved a Kobayashi-Hitchin correspondence in a very special case of this situation and, later, Buchdahl generalized it in [Bu93]. Moreover, Lübke, Okonek and Schumacher, amongst others, also worked on this question, see [LOS93, Lue93].

Moduli spaces of stable bundles are still subject to intensive research and have applications in various fields. To give just one example, we mention the work of Teleman on the Enriques-Kodaira classification of compact, complex surfaces. In particular the classification of class VII surfaces with positive second Betti number b_2 is still incomplete. Teleman tries to give a proof of the so called global spherical shell conjecture by means of properties of moduli spaces of stable bundles, especially with knowledge about all possible positive dimensional algebraic subvarieties and the families parametrized by them. His starting point is the work [DOT03] of Dloussky, Oeljeklaus and Toma from 2003 which essentially reduces the problem to the construction of sufficiently many rational curves on the surface under consideration. In the case $b_2 = 1$ this strategy was successful, and in the case $b_2 = 2$ it led to partial results. The validity of the global spherical shell conjecture immediately implies that all surfaces of class VII with positive second Betti number are Kato surfaces and it therefore completes the classification of all compact, complex surfaces, which is the main motivation. We refer to [Te05, Te08, Te10] for details.

A promising branch of research is the geometry of higher direct image sheaves, which is currently subject to comprehensive studies. Of particular interest are algebraic as well as differential geometric positivity results of the associated vector bundles in situations in which these sheaves are locally free. In order to demonstrate how versatile the possible applications are, we briefly discuss some ongoing developments.

Berndtsson, Păun, Mourougane and Takayama are working on the study of image sheaves of the type $R^q f_*(E \otimes K_{X/Y})$, where $f : X \to Y$ is a holomorphic map between complex manifolds and $E \to X$ is a holomorphic vector bundle. Here we use $K_{X/Y} = K_X \otimes f^*(K_Y)^{-1}$ as a notation for the relative canonical bundle. In their article [MT07] Mourougane and Takayama show, among other things, that the direct image sheaf $f_*(E \otimes K_{X/Y}) = R^0 f_*(E \otimes K_{X/Y})$ carries a Griffiths positive metric if f is a submersion, X as well as Y are projective manifolds and E is an ample line bundle. At the same time Berndtsson shows in [Be09a] the even stronger result that there exists a Nakano positive (respectively semi-positive) metric on these image sheaves if certain weaker conditions are satisfied. More precisely, it is sufficient that f is a submersion with compact fibres, X a Kähler manifold and E a positive (respectively semi-positive) line bundle. Despite the similar results their methods of proof as well as the constructed metrics are distinct. Mourougane and Takayama use the variation of Hodge structures and a method of Griffiths' for computing the curvature of the Hodge metric on appropriate cyclic covers of Y, which they obtain from Bertini's theorem by using the ampleness of the vector bundle. Afterwards they use Fujita's method in order to control the emerging singularities of the Hodge metrics. On the other hand, Berndtsson obtains the local freeness from an extension theorem of the Ohsawa-Takegoshi type and uses his precise knowledge of the holomorphic structure of the bundle in order to calculate the Chern connection of a constructed L_2 metric on the bundle and to estimate its curvature. In both articles one motivation for the investigation is its connection to the Griffiths conjecture: Let M be a complex manifold and $F \to M$ a holomorphic vector bundle carrying a Griffiths positive metric. Then F is ample (see for example [SS85]). In 1969 Griffiths conjectured in [Gr69] that also the converse is true, which would imply that Griffiths positivity and ampleness are equivalent on compact, complex manifolds. For line bundles this is known as a part of Kodaira's embedding theorem and over curves M it was shown by Umemura in 1973 ([Um73]). However, apart from these results the problem is still open. Following Berndtsson, Mourougane and Takayama we consider for a given holomorphic vector bundle $F \to M$ the associated fibre bundle $\pi : \mathbb{P}(F) \to M$ of the projective spaces of the dual bundle F^*. Then according to the definition F is ample if and only if the Serre line bundle $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(F)}(1) \to \mathbb{P}(F)$ is ample in the usual sense. In this case also the bundle $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(F)}(r+1)$, where $r = \mathrm{rk}(F)$, is ample and therefore positive, so that the results mentioned above imply the Nakano positivity and particularly the Griffiths positivity of the bundle

$$\pi_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(F)}(r+1) \otimes K_{\mathbb{P}(F)/M}).$$

Furthermore, this bundle is isomorphic to $F \otimes \det(F)$, as is shown in [Be09a]. Correspondingly we obtain the Nakano positivity of $S^k F \otimes \det(F)$ for all $k \in \mathbb{N}$ if we use $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(F)}(r+k)$. Altogether this shows that for every ample vector bundle F all associated bundles of the type $S^k F \otimes \det(F)$ are Nakano positive. Conversely, a result of Demailly and Skoda from [DS78] shows that the Griffiths positivity of F also implies the Nakano positivity of $F \otimes \det(F)$. Therefore, we can consider the above argument at least as a hint for the validity of the Griffiths conjecture. Another reason for the study of these image sheaves in [Be09a] is that their Nakano positivity also implies the analytic statement that certain Bergman kernels, depending on some parameter, possess subharmonicity properties, which leads to numerous applications in algebraic geometry. For details and improvements of the results from [Be09a] we refer to the continuation of this work, due to Berndtsson and Păun in [BP08a, BP08b, Be09b, BP10, Be11]. On the other hand, there is a generalization of the positivity results from [Be09a, MT07] to higher direct image sheaves and vector bundles of arbitrary rank, provided by Mourougane and Takayama in [MT08]. Essentially they combine Berndtsson's method for calculating the curvature with Takegoshi's harmonic theory. They also still work on enhancements of these results, see for example [MT09]. Finally, we remark that Tsuji is also working on similar results, see [Ts05].

In [Sch12] (see also [Sch13]) Schumacher shows several properties of moduli spaces of canonically polarized varieties. For this purpose he applies for a Kähler-Einstein manifold (X, g) with constant Ricci curvature -1 a lower bound for the heat kernel due to Cheeger and Yau to the resolvent kernel of the operator $(1 + \Box)$ and obtains the existence of a strictly positive function $P_n(d(X))$, which depends only on the dimension n of X and the diameter $d(X)$, such that for every non-negative, continous function χ, every solution ϕ of the equation $(1 + \Box)\phi = \chi$ can be estimated by

$$\phi(z) \geqslant P_n(d(X)) \cdot \int_X \chi g \, dV$$

for every $z \in X$. From this estimate he gains as his main theorem that the curvature of the hermitian metric induced on the relative canonical bundle $K_{\mathcal{X}/S}$ of a family $f : \mathcal{X} \to S$ of canonically polarized, complex manifolds by the Kähler-Einstein metrics on the fibres is strictly positive, at least if the family is nowhere infinitesimally trivial. As a conclusion, Schumacher succeeds in constructing a positive line bundle on the moduli space of canonically polarized manifolds, thereby showing its quasi-projectivity. Another application of the estimate and the main theorem mentioned above is related to higher direct images. More precisely, Schumacher considers image sheaves of the type $R^{n-p} f_* \Omega^p_{\mathcal{X}/S}(K^{\otimes m}_{\mathcal{X}/S})$, on which there exists a natural hermitian metric induced by the L_2 scalar product of harmonic tensors on the fibres of f. For these metrics he calculates an explicit formula for the curvature tensor and achieves an estimate for it, using the one of the resolvent kernel. In particular, he obtains the result that the locally free sheaves

$$f_* K^{\otimes(m+1)}_{\mathcal{X}/S} \longrightarrow S$$

are Nakano positive by means of an explicit lower bound. In the special case of one dimensional fibres, $f_* K^{\otimes(2)}_{\mathcal{X}/S}$ is just the sheaf of holomorphic quadratic differential forms on the Teichmüller space of Riemann surfaces of genus $g \geqslant 2$, fibrewise equipped with the L_2 scalar product. This situation is dual to the one of the Weil-Petersson metric on this space and therefore he gets another proof for the strong result about the curvature of the Weil-Petersson metric due to Liu, Sun and Yau: On the Teichmüller space of Riemann surfaces of genus $g \geqslant 2$ the Weil-Petersson metric is dually Nakano negative. However, the curvature formula of the higher direct image sheaves possesses further applications. By using Serre duality, it also yields a curvature formula for higher direct image sheaves of the type $R^p f_* \wedge^p T_{\mathcal{X}/S}$. By means of the natural morphism

$$S^p(R^1 f_* T_{\mathcal{X}/S}) \longrightarrow R^p f_* \wedge^p T_{\mathcal{X}/S}$$

as well as the Kodaira-Spencer morphism, which for families of canonically polarized manifolds takes the form

$$\rho_S : T_S \longrightarrow R^1 f_* T_{\mathcal{X}/S},$$

Schumacher obtains the generalized Kodaira-Spencer morphisms

$$\rho_S^p : S^p T_S \longrightarrow R^p f_* \wedge^p T_{\mathcal{X}/S}$$

of order p, which in turn induce generalized Weil-Petersson functions of the corresponding order p on the tangent spaces $T_{S,s}$. In particular, if S is a curve, the function of any order defines in each case a hermitian pseudo-metric on the curve, whose curvature can essentially be estimated. By using a version of the Ahlfors lemma due to Demailly, Schumacher, on the one hand, obtains a special case of Shafarevich's hyperbolicity conjecture: If a non-isotrivial family of canonically polarized manifolds is parametrized by a curve C, then its genus must be greater than 1. In other words: In families of canonically polarized manifolds parametrized by the projective space $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ or an elliptic curve, every two fibres are isomorphic. On the other hand, one gets hyperbolicity properties of the moduli space of canonically polarized manifolds. To be more precise, Schumacher shows that every relatively compact, open subspace of this moduli space is already Kobayashi hyperbolic in the sense of orbifolds. Finally, he indicates how generalized Weil-Petersson functions can be used to construct a Finsler metric on every relatively compact subspace of the moduli stack of canonically polarized varieties, whose holomorphic curvature can be estimated from above by some negative constant.

In our last example we subsume some investigations in the context of moduli spaces of stable bundles. This example is therefore closer to the subject of the present work. At first Schumacher and Toma calculated in [ST92] a formula for the curvature tensor of the Weil-Petersson metric on the base of a family of Hermite-Einstein vector bundles. This can be understood as the calculation of the curvature of the L_2 metric on the direct image sheaf $R^1 p_* \mathcal{O}(\mathrm{End}(F))$, where $F \to X \times S$ denotes the family of Hermite-Einstein bundles and $p : X \times S \to S$ is the projection to the second factor. In the same situation, To and Weng calculated the curvature of the L_2 metric on image sheaves of the type $p_* \mathcal{O}(F) = R^0 p_* \mathcal{O}(F)$ using the approach of Schumacher and Toma (see [TW98]). In particular, they show that for families of ample, hermitian line bundles $(L, h) \to X \times S$ with fixed first Chern form $c_1(L_s, h_s) = k/2\pi\omega$ for some $k \in \mathbb{R}_{>0}$, where ω denotes the Kähler form of the Kähler manifold (X, g), their formula takes a very simple form, at least if the Ricci curvature of (X, g) is semi-positive. As an application, they obtain a result about Picard bundles on general spaces. For this, let X be a compact, complex manifold and $\mathcal{P} \to X \times \mathrm{Pic}^0(X)$ some Poincaré bundle, where $\mathrm{Pic}^0(X)$ denotes the Picard variety of X. More precisely, one has the normalization property $\mathcal{P}|_{X \times \{0\}} = \mathcal{O}_X$ and for every point $s \in \mathrm{Pic}^0(X)$ of the parameter space of this family, $\mathcal{P}|_{X \times \{s\}}$ is a line bundle from the isomorphism class of s.

If $L \to X$ is some arbitrary ample line bundle, we can construct the associated Picard bundle $\mathcal{W}(L) \to \mathrm{Pic}^0(X)$ by means of $\mathcal{W}(L) = p_*(\mathcal{P} \otimes \pi^* L)$, where $\pi : X \times \mathrm{Pic}^0(X) \to X$ is the projection to the first factor. In this situation, To and Weng conclude from their simple curvature formula in the case $c_1(X) \geqslant 0$ that these Picard bundles are always polystable with respect to any Kähler form on $\mathrm{Pic}^0(X)$. One of the very first stability results about Picard bundles was proved by Ein and Lazarsfeld in 1992 and can be found in [EL92]: Let X be any complete, smooth, algebraic curve of genus g, then the Picard bundle $\mathcal{W}(L)$ for an arbitrary line bundle L of degree $d > 2g-2$ is stable with respect to the theta divisor θ on the Jacobian variety $\mathrm{Pic}^0(X)$. While the result of To and Weng gives only polystability, it holds true for a wide class of manifolds, including, for example, all abelian varieties. In [Ke92] Kempf describes a question which was proposed by Narasimhan: Because of their stability, by means of the Kobayashi-Hitchin correspondence there exist Hermite-Einstein metrics on the Picard bundles, which are unique up to a positive scalar factor. In this situation, Narasimhan asks if those metrics, which are generally given as solutions to some global differential equations, can be described in another, more explicit way. Kempf shows that in the case where X is an abelian variety, the Hermite-Einstein metric with respect to any translation invariant Kähler metric on $\hat{X}$, which as the dual abelian variety is just given by the Picard variety of X, essentially is given as an L_2 metric. To and Weng succeed to give another differential geometric proof of this result by using their methods described above.

The present thesis is a generalization of the work on the moduli space of stable bundles, as described in the last example. For this purpose, let $(F, h) \to X \times S$ be a family of Hermite-Einstein vector bundles on a compact Kähler manifold (X, g), parametrized by a complex manifold S. We consider the higher direct image sheaves $R^q p_* \mathcal{O}(F)$, where as before $p : X \times S \to S$ denotes the projection to the basis. These sheaves are not generally locally free on the whole parameter space any more, but only outside some exceptional set $A_q(F) \subset S$, which is always a proper analytic subset of S. We give a characterization of these exceptional sets which enables us to describe the vector bundles associated to the higher direct image sheaves over $S \setminus A_q(F)$ in a very explicit way, in particular their fibres as well as their sections over Stein open subsets. Moreover, we investigate some situations in which the exceptional sets vanish or at least only represent the singularities of the moduli space under consideration. This precise description of the associated vector bundles enables us to prove that the higher direct image sheaves carry a natural metric. This metric is fibrewise induced by the L_2 scalar product of harmonic representatives, and for this reason we call it the natural L_2 metric. Next we calculate a formula for the curvature tensor of this metric, which includes both the result of Schumacher and Toma as well as the result of To and Weng as special cases. Here one wants a formula which expresses this curvature only through representatives of Kodaira-Spencer classes as well as a basis of the corresponding space of harmonic forms. Just like the formula of To and Weng, our formula contains at first an additional summand, which cannot be written in this way. Therefore, we study situations where we can control this summand, such as families with isotrivial determinant or families of endomorphism bundles. If, however, one can estimate the curvature like in [Sch12], is still an open problem, mainly because the Green operator appearing in the summands of the curvature formula causes problems which do not appear in the case of manifolds.

Finally we sketch an application of our curvature formula to the geometry of moduli spaces of stable bundles under the assumption that an appropriate estimate exists. We are interested in curvature properties of the moduli space of stable bundles. In the case of complex manifolds, one often gets hyperbolicity results, as in the classical Teichmüller theory for the classification of compact Riemann surfaces. Already the example of moduli spaces of line bundles on compact Riemann surfaces of genus g suggests that the situation for vector bundles is completely different: Since the moduli space in this case is given as the Jacobian variety $J(X)$ of X, it is always a complex torus $\mathbb{C}^g/\Lambda$ and, as a consequence, these spaces are not hyperbolic. We therefore hope that at least under suitable conditions, positivity results can be shown. An obvious approach is to study the Weil-Petersson metric. For its curvature the result of Schumacher and Toma reads:

Theorem A.1 ([ST92]). *Let $(F,h) \to X \times S$ be a locally universal family of simple Hermite-Einstein bundles over some smooth parameter space S. Then the curvature tensor of the Weil-Petersson metric is given by*

$$\begin{aligned} R^{WP}_{i\bar{j}k\bar{l}} = &- \int_X \operatorname{tr} \Box_0^{-1}([R_{i\bar{\beta}}, R_{\alpha\bar{j}}]g^{\overline{\beta}\alpha})([R_{k\bar{\delta}}, R_{\gamma\bar{l}}]g^{\overline{\delta}\gamma}) g\, dv \\ &- \int_X \operatorname{tr} \Box_0^{-1}([R_{i\bar{\beta}}, R_{\alpha\bar{l}}]g^{\overline{\beta}\alpha})([R_{k\bar{\delta}}, R_{\gamma\bar{j}}]g^{\overline{\delta}\gamma}) g\, dv \\ &- \int_X \operatorname{tr}\, [R_{i\bar{\beta}}, R_{k\bar{\delta}}] G([R_{\alpha\bar{j}}, R_{\gamma\bar{l}}])(1/2)(g^{\overline{\beta}\alpha} g^{\overline{\delta}\gamma} - g^{\overline{\beta}\gamma} g^{\overline{\delta}\alpha}) g\, dv. \end{aligned}$$

Furthermore, Schumacher and Toma observe in [ST92] that with respect to the holomorphic sectional curvature as well as the Ricci curvature the first two summands in this formula contribute non-negatively, whereas the third one, which vanishes in the case of a Riemann surface X, contributes non-positively. Therefore the Weil-Petersson metric yields no appropriate curvature result.

For this reason, we suggest a different approach, which rests on the conjecture that at least under suitable requirements on X, the parameter space S as well as on rank and degree of the bundles under consideration, there exists a Griffiths positive metric on some symmetric power $S^kTS \to S$. We suspect this to be true at least for curves S. In this case we could conclude that $S^kTS \to S$ and therefore also the tangent bundle $TS \to S$ is ample, which would imply $S = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. We therefore see that the existence of such metrics implies results about curves in the moduli spaces of stable bundles. If there even exist such metrics for higher dimensional parameter spaces S, then the argument still holds true because of the Hartshorne conjecture ([Ha70]), which was proved by Mori ([Mo79]).

Obviously the main difficulty in this argument is the construction of a positive metric in some symmetric power of the tangent bundle. We therefore sketch a construction, which maybe leads to such a metric using generalized Kodaira-Spencer morphisms in the situation of families of Hermite-Einstein bundles as well as our curvature formula for the higher direct image sheaves mentioned above. Again it is still open if this approach can be elaborated, mainly because of the lack of an appropriate estimate for the curvature formula.

B. Danksagung

An erster Stelle möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. Georg Schumacher für seine Betreuung während der letzten Jahre sowie für die vielen interessanten und nicht immer ausschließlich fachbezogenen Diskussionen bedanken.

Herrn Prof. Dr. Thomas Bauer danke ich für das Anfertigen des Zweitgutachtens über diese Arbeit.

Schließlich gilt mein Dank allen Teilnehmern des Seminars *Komplexe Geometrie* im Sommersemester 2013 für die Gelegenheit, meine Ergebnisse ausführlich vortragen und kritisch diskutieren zu können.

C. Erklärung

Ich versichere, dass ich die vorliegende Dissertation

> *Krümmung von höheren direkten Bildgarben auf dem Modulraum der stabilen Vektorbündel*

selbständig und ohne fremde Hilfe verfasst habe. Alle verwendeten Quellen und Hilfsmittel habe ich explizit angegeben und wörtliche oder sinngemäße Zitate als solche gekennzeichnet.

Diese Dissertation wurde bislang weder in der vorliegenden noch in einer ähnlichen Form bei einer in- oder ausländischen Hochschule anlässlich eines Promotionsgesuchs oder zu anderen Prüfungszwecken eingereicht.

Ich erkläre, dass dies mein erster Versuch einer Promotion ist.

Thomas Wolfgang Geiger

D. Lebenslauf

Persönliche Daten

Name:	Thomas Wolfgang Geiger
Geburtsdatum:	21. Dezember 1984
Geburtsort:	Aschaffenburg

Ausbildung

08/1995 – 06/2005	Karl-Theodor-v.-Dalberg-Gymnasium, Aschaffenburg
09/2005 – 05/2006	Zivildienst am Universitätsklinikum Gießen und Marburg
10/2006 – 09/2007	Studium der Informatik an der Philipps-Universität Marburg
10/2007 – 01/2011	Studium der Mathematik an der Philipps-Universität Marburg
01/2011	Diplom in Mathematik
seit 02/2011	Promotionsstudium im Bereich *Komplexe Geometrie* an der Philipps-Universität Marburg

Berufliche Tätigkeit

seit 03/2011	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachbereich Mathematik und Informatik der Philipps-Universität Marburg