Analysis III, SoSe 2011 – Lösung Blatt 1

1.1. $Q \subset \mathbb{R}^n$ Quader.

a) Ist $f \in \mathcal{R}(Q)$ mit $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in Q$ und $\varphi : [m, M] \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig, so ist auch $\varphi \circ f \in \mathcal{R}(Q)$.

b) Ist $\delta > 0$ und $f \in \mathcal{R}(Q)$ mit $f(x) \geq \delta \quad \forall x \in Q$, so ist $\frac{1}{f} \in \mathcal{R}(Q$

c) Ist $f \in \mathcal{R}(Q)$, so ist auch $f^2 \in \mathcal{R}(Q)$.

Beweis:

a) Wir verwenden das Riemannsche Integrabilitätskriterium.

- Da $[m, M]$ kompakt und φ stetig ist, ist $\varphi([m, M])$ kompakt, also beschränkt.
  $\Rightarrow \varphi \circ f(Q)$ ist beschränkt, d.h. $\varphi \circ f$ ist beschränkt.

- $L > 0$ bezeichne die Lipschitz Konstante von φ. Wir zeigen zunächst den Hinweis. Sei $S \subset Q$ ein Unterquader und $x, y \in S$. Dann:

$$\underbrace{f(x)}_{\leq \sup_S f} - \underbrace{f(y)}_{\geq \inf_S f} \leq \sup_S f - \inf_S f$$

Wegen

$$|f(x) - f(y)| \begin{cases} \text{entweder} = f(x) - f(y) \leq \sup_S f - \inf_S f \\ \text{oder} = f(y) - f(x) \leq \sup_S f - \inf_S f \end{cases}$$

ist stets $|f(x) - f(y)| \leq \sup_S f - \inf_S f$. $\quad (*)$

Nun existiert eine Folge $(\tilde{x}_k)$ in $\varphi \circ f(S)$ mit $\lim\limits_{k \to \infty} \tilde{x}_k = \sup_S \varphi \circ f$

$\Rightarrow \exists$ Folge (x_k) in S mit $\varphi \circ f(x_k) = \tilde{x}_k \quad \forall k$.

Wir betrachten die Folge $(f(x_k))$ in $[m, M]$. Da $[m, M]$ beschränkt ist folgt mit Bolzano-Weierstraß

$\exists$ konvergente Teilfolge $(f(x_{n(k)}))$, es sei $\lim\limits_{k \to \infty} f(x_{n(k)}) =: x$

Dann ist $x \in [m, M]$ und $(\varphi \circ f(x_{n(k)}))$ eine Teilfolge von $\left(\varphi\circ f(x_k)\right) = (\tilde{x}_k)$, d.h. $\lim_{k\to\infty} \varphi\circ f(x_{n(k)}) = \sup_S \varphi\circ f$.

Da φ stetig und die Folge $f(x_{n(k)})$ Konvergent ist, erhalten wir

$$\sup_S \varphi\circ f = \lim_{k\to\infty} \varphi\circ f(x_{n(k)}) = \varphi\left(\lim_{k\to\infty} f(x_{n(k)})\right) = \varphi(x) \qquad (**)$$

Analog können wir eine Folge $(y_{n(k)})$ konstruieren mit

$$\lim_{k\to\infty} f(y_{n(k)}) =: y \in [m, M] \quad \text{und} \quad \inf_S \varphi\circ f = \varphi\left(\lim_{k\to\infty} f(y_{n(k)})\right) \quad (***)$$

Damit berechnen wir nun:

$$\begin{aligned}
\sup_S \varphi\circ f - \inf_S \varphi\circ f &= \left|\sup_S \varphi\circ f - \inf_S \varphi\circ f\right| \\
&\overset{(**),(***)}{=} |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq L\,|x-y| \\
&= L\left|\lim_{k\to\infty} f(x_{n(k)}) - \lim_{k\to\infty} f(y_{n(k)})\right| \\
&\overset{|\cdot| \text{ stetig}}{=} L\cdot \lim_{k\to\infty}\left(\left|f(x_{n(k)}) - f(y_{n(k)})\right|\right) \\
&\overset{(*)}{\leq} L\cdot\left(\sup_S f - \inf_S f\right)
\end{aligned}$$

Damit ist der Hinweis gezeigt.
Sei nun $\varepsilon > 0$. Da $f \in \mathcal{R}(Q)$ $\exists$ Partition P von Q mit

$$S(f, P) - s(f, P) \leq \frac{\varepsilon}{L} \qquad \text{(Integrabilitätskriterium!)}$$

Damit:

$$\begin{aligned}
S(\varphi\circ f, P) - s(\varphi\circ f, P) &= \sum_{S\in P(Q)} M_S(\varphi\circ f)\cdot v(S) - \sum_{S\in P(Q)} m_S(\varphi\circ f)\cdot v(S) \\
&= \sum_{S\in P(Q)} \left(M_S(\varphi\circ f) - m_S(\varphi\circ f)\right) v(S) = \sum_{S\in P(Q)} \left(\sup_S \varphi\circ f - \inf_S \varphi\circ f\right) v(S) \\
&\overset{\text{Hinweis}}{\leq} L \sum_{S\in P(Q)} \left(\sup_S f - \inf_S f\right) v(S) = \ldots = L\left(S(f,P) - s(f,P)\right) \\
&\leq L\cdot\frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \varphi\circ f \in \mathcal{R}(Q)$.

b) $f \in \mathcal{R}(Q) \Rightarrow \exists\, M > 0$ mit $f(x) \leq M \quad \forall x \in Q$.

Setze
$$\varphi : [\delta, M] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{1}{x}$$

Dann ist φ Lipschitz-stetig mit der Lipschitz-Konstanten $L := \frac{1}{\delta^2}$, denn seien $x, y \in [\delta, M]$ beliebig, so folgt:

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \left|\frac{y-x}{xy}\right| = \frac{1}{|xy|}|y-x|$$

Da $|xy| = |x||y| \geq \delta^2$ erhalten wir

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = \frac{1}{|xy|}|x-y| \leq L|x-y| .$$

$$\overset{\text{Teil a)}}{\Longrightarrow} \quad \frac{1}{f} = \varphi \circ f \in \mathcal{R}(Q).$$

c) $f \in \mathcal{R}(Q) \Rightarrow \exists\, m, M \in \mathbb{R}$ mit $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in Q$.

Setze
$$\varphi : [m, M] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x^2$$

Dann ist φ Lipschitz-stetig mit der Lipschitz-Konstanten

$$L := 2 \max\{|m|, |M|\}$$

denn seien $x, y \in [m, M]$ beliebig, so ist

$$|x| + |y| \leq \max\{|m|, |M|\} + \max\{|m|, |M|\} = L$$

und damit

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = |x^2 - y^2| = |(x+y)(x-y)| = |x+y|\,|x-y|$$
$$\leq (|x| + |y|) \cdot |x-y|$$
$$\leq L|x-y| .$$

$$\overset{\text{Teil a)}}{\Longrightarrow} \quad f^2 = \varphi \circ f \in \mathcal{R}(Q)$$

$\blacksquare$

1.2. Seien $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader und $f,g: Q \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbare Funktionen. Zeige:

a) Ist $f(x) = g(x)$ $\forall x \in D$ mit $D \subset Q$ dicht, so folgt

$$\int_Q f(x)dx = \int_Q g(x)dx.$$

b) Ist $B \subset Q$ vom Volumen 0 und gilt $f(x) = g(x)$ $\forall x \in Q \setminus B$ so ist

$$\int_Q f(x)dx = \int_Q g(x)dx.$$

Beweis:

a) Wir arbeiten mit der Riemannschen Summendarstellung des Integrals und wählen uns eine Folge von Partitionen (P^K) von Q mit $\lim_{K\to\infty} |P^K| = 0$ ($|P^K|$: Feinheit der Partition).

Da $f-g \in \mathcal{R}(Q)$ folgt, dass für jede Folge (η^K) von zu (P^K) passenden Zwischenpunkten

$$\lim_{K\to\infty} S(f-g, P^K, \eta^K) = \int_Q (f-g)(x)dx \quad \text{gilt.}$$

Idee: Wähle die Folge (η^K) geeignet. Ist $K \in \mathbb{N}$ und $S \in P^K(Q)$ ein Unterquader, so ist $\mathring{S} \neq \emptyset$. Da $D \subset Q$ dicht ist folgt $\mathring{S} \cap D \neq \emptyset$. Wähle η_S^K mit $\eta_S^K \in \mathring{S} \cap D$. Setze $\eta^K = \{\eta_S^K\}$.
Diese Konstruktion liefert eine Folge von passenden Zwischenpunkten und es gilt

$$S(f-g, P^K, \eta^K) = \sum_{S\in P^K(Q)} (f-g)(\eta_S^K)\cdot v(S)$$

$$= \sum_{S\in P^K(Q)} \underbrace{\left(f(\eta_S^K) - g(\eta_S^K)\right)}_{=0 \text{ da } \eta_S^K \in D}\cdot v(S) = 0$$

$$\Rightarrow 0 = \lim_{K\to\infty} S(f-g, P^K, \eta^K) = \int_Q (f-g)(x)dx \quad \Rightarrow \quad \int_Q f(x)dx = \int_Q g(x)dx.$$

b) $B \subset Q$ vom Volumen $0 \Rightarrow \int_Q \chi_B(x)\,dx = 0$.

$f, g \in \mathcal{R}(Q) \Rightarrow f-g \in \mathcal{R}(Q) \Rightarrow \exists\, m, M \in \mathbb{R}$ mit

$$m \leq (f-g)(x) \leq M \qquad \forall x \in Q$$

Da nach Voraussetzung $f(x) - g(x) = 0 \quad \forall x \in Q \setminus B$ gilt, folgt:

$$m\, \chi_B(x) \leq (f-g)(x) \leq M\, \chi_B(x)$$

Wegen der Monotonie und Linearität des Integrals folgt

$$m \cdot \underbrace{\int_Q \chi_B(x)\,dx}_{=0} \leq \int_Q (f-g)(x)\,dx \leq M \underbrace{\int_Q \chi_B(x)\,dx}_{=0}$$

$$\Rightarrow \int_Q (f-g)(x)\,dx = 0$$

$$\Rightarrow \int_Q f(x)\,dx = \int_Q g(x)\,dx .$$

$\blacksquare$

1.3. Sei $Q = [-1,1]^3$ und $f: Q \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \sin(x_1^2 x_2)\cos(x_2 x_3^2)\, e^{x_1 x_3},$$

Berechne $\int_Q f(x)\,dx$.

Dazu: Zunächst ist f als stetige Funktion Riemann-integrierbar. Wir wollen möglichst wenig rechnen und betrachten daher zunächst

$$g: Q \to \mathbb{R}, \qquad g(x) = \sin(x_1^2 x_2)\cos(x_2 x_3^2)$$

Es ist

$$\begin{aligned} g(x_1, -x_2, x_3) &= \sin(x_1^2(-x_2))\cos(-x_2 x_3^2) \\ &= -\sin(x_1^2 x_2)\cos(x_2 x_3^2) \\ &= -g(x_1, x_2, x_3). \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Für $x_1, x_3 \in [-1,1]$ ist $\int_{-1}^{1} g(x_1,x_2,x_3)\,dx_2 = 0$.

Damit:

$$\begin{aligned} \int_Q f(x)\,dx &\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{[-1,1]^2} \left(\int_{-1}^{1} g(x_1,x_2,x_3)\, e^{x_1 x_3}\, dx_2 \right) d(x_1,x_3) \\ &= \int_{[-1,1]^2} e^{x_1 x_3} \underbrace{\left(\int_{-1}^{1} g(x_1,x_2,x_3)\,dx_2 \right)}_{=0} d(x_1,x_3) \\ &= \int_{[-1,1]^2} 0 \, d(x_1,x_3) = 0. \end{aligned}$$

∎

1.4. Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader und $f: Q \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar mit $f(x) \geq 0 \ \forall x \in Q$ und $\int_Q f(x)dx = 0$. Zeige:

$$\mathcal{P} := \{x \in Q \mid f(x) > 0\} \text{ hat Maß } 0$$

Beweis:

Sei $\alpha > 0$ beliebig und $\mathcal{P}_\alpha := \{x \in Q \mid f(x) \geq \alpha\}$.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Es ist

$$0 = \int_Q f(x)dx = \inf\{S(f,P) \mid P \text{ Partition von } Q\}$$

$\Rightarrow \exists$ Partition P von Q mit $S(f,P) < \alpha \cdot \varepsilon$

Es seien $S_1, \dots, S_K \in P(Q)$ genau die Unterquader der Partition P mit $M_{S_i}(f) \geq \alpha$. und $C_\alpha := \bigcup_{i=1}^K S_i$.

Ist $x \in \mathcal{P}_\alpha$, d.h. $f(x) \geq \alpha$ so gibt es ein $S \in P(Q)$ mit $x \in S$.
Dann: $M_S(f) = \sup_S f \geq \alpha$ d.h. $S = S_j$ für ein $j \in \{1, \dots, K\}$, also insbesondere $x \in C_\alpha$.

$\Rightarrow \mathcal{P}_\alpha \subset C_\alpha$

Nun ist
$$\alpha \cdot \sum_{i=1}^K v(S_i) = \sum_{i=1}^K \underbrace{\alpha}_{\leq M_{S_i}(f)} v(S_i) \leq \sum_{i=1}^K M_{S_i}(f) v(S_i)$$

$$\overset{f \geq 0}{\leq} \sum_{S \in P(Q)} M_S(f) \cdot v(S) = S(f,P) < \alpha \cdot \varepsilon$$

Wegen $\alpha > 0$ ist also $\sum_{i=1}^K v(S_i) < \varepsilon$.

Insgesamt: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists$ Quader $Q_1, \dots, Q_K \subset \mathbb{R}^n$ mit $\mathcal{P}_\alpha \subset \bigcup_{i=1}^K Q_i$ und $\sum_{i=1}^K v(Q_i) < \varepsilon$

$\Rightarrow \mathcal{P}_\alpha$ hat Volumen $0 \Rightarrow \mathcal{P}_\alpha$ hat Maß 0.

Offenbar ist

$$\mathcal{P} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{P}_{\frac{1}{n}} \text{ also abzählbare Vereinigung von Mengen vom Maß } 0.$$

$\Rightarrow \mathcal{P}$ hat Maß 0. $\blacksquare$