Analysis III, SoSe 2011 – Lösung Blatt 10

10.1. Sei $\omega = x\, dy \wedge dz - y^2 dx \wedge dz + (y+z)\, dx \wedge dy$ eine 2-Form auf dem $\mathbb{R}^3$ und $X = \{(x,y,z) \in (0,1) \times \mathbb{R} \times (0,2) \mid y = x^2\} \subset \mathbb{R}^3$.

a) Zeige, dass ω weder geschlossen noch exakt ist.

b) Zeige, dass X eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.

c) Berechne $\int_X \omega$.

Beweis:

a) Es ist
$$\begin{aligned} d\omega &= dx \wedge dy \wedge dz - dy^2 \wedge dx \wedge dz + d(y+z) \wedge dx \wedge dy \\ &= dx \wedge dy \wedge dz + 2y\, dx \wedge dy \wedge dz + dx \wedge dy \wedge dz \\ &= (2+2y)\, dx \wedge dy \wedge dz \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ ω ist nicht geschlossen.

ω exakt. $\Rightarrow$ $\omega = d\eta$ (η eine 1-Form) $\Rightarrow$ $0 \neq d\omega = dd\eta = 0$ ↯

$\Rightarrow$ ω ist nicht exakt.

b) Setze $\varphi : (0,1) \times (0,2) \to \mathbb{R}^3$, $(x,z) \mapsto (x, x^2, z)$

$\Rightarrow$ φ ist stetig, injektiv und $\varphi((0,1)\times(0,2)) = X$. (Parametrisierung)

Berechne Jacobi-Matrix von φ:

$$D\varphi(x,z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow D\varphi(x,z) \text{ hat stets Rang } 2$$

$\overset{\text{Ana II}}{\Rightarrow}$ φ ist eine Immersion, d.h. X ist zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ und wir dürfen $\{(X, \varphi^{-1})\}$ als Atlas verwenden.

c) Es ist $d\varphi_1 = dx$, $d\varphi_2 = 2x\,dx$, $d\varphi_3 = dz$.

Damit:

$$\varphi^*\omega = \varphi^*(x)\, d\varphi_2 \wedge d\varphi_3 - \varphi^*(y^2)\, d\varphi_1 \wedge d\varphi_3 + \varphi^*(y+z)\, d\varphi_1 \wedge d\varphi_2$$

$$= x \cdot 2x\, dx \wedge dz - x^4\, dx \wedge dz + \underbrace{(x^2+z)\cdot 2x\, dx \wedge dx}_{=0}$$

$$= (2x^2 - x^4)\, dx \wedge dz$$

Da nach Teil b) $\{(X, \varphi^{-1})\}$ ein Atlas für X bestehend aus einer Karte ist, ergibt die Definition des Integrals:

$$\int_X \omega = \int_{(0,1)\times(0,2)} \varphi^*\omega = \int_{(0,1)\times(0,2)} (2x^2 - x^4)\, dx \wedge dz$$

$$= \int_{(0,1)\times(0,2)} (2x^2 - x^4)\, dx dz \overset{\text{Fubini}}{=} \int_0^1 \left(\int_0^2 (2x^2 - x^4)\, dz \right) dx$$

$$= \int_0^1 (4x^2 - 2x^4)\, dx = \left(\frac{4}{3}x^3 - \frac{2}{5}x^5 \right)\Big|_0^1 = \frac{4}{3} - \frac{2}{5}$$

$$= \frac{14}{15}.$$

$\blacksquare$

10.2. Sei $\omega = z\,dx + x\,dy + y\,dz$ eine Differentialform auf dem $\mathbb{R}^3$ und für $a > 0$ sei eine Untermannigfaltigkeit mit Rand durch

$$M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 - y^2,\ x^2 + y^2 \leq a\}$$

gegeben. Berechne $\int_M d\omega$ direkt und mit dem Satz von Stokes.

Dazu:

- Direkte Rechnung: Setze $\psi : \overline{B_a(0)} \to \mathbb{R}^3,\ (x,y) \mapsto (x,y,x^2-y^2)$.

$\Rightarrow$ ψ ist stetig, injektiv und $\psi(\overline{B_a(0)}) = M$.

Definiere weiter $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y,z) \mapsto (x,y)$.

$\Rightarrow$ φ ist stetig, $\varphi(M) = \overline{B_a(0)}$ und $\varphi \circ \psi = id_{\overline{B_a(0)}}$, $\psi \circ \varphi|_M = id_M$.

Also ist ψ als Abbildung $\overline{B_a(0)} \to M$ ein Homöomorphismus.

Berechne Jacobi-Matrix:

$$D\psi(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2x & -2y \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{Rg} D\psi(x,y) = 2 \quad \forall\, (x,y) \in \overline{B_a(0)}.$$

$\overset{\text{Ana II}}{\Rightarrow}$ $\psi|_{B_a(0)} : B_a(0) \to M \setminus \partial M$ ist Immersion und (s.o.) Homöomorphismus.

(beachte: Offenbar ist $\partial M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 - y^2,\ x^2 + y^2 = a^2\}$)

$\Rightarrow$ $(M \setminus \partial M,\ \psi|_{B_a(0)}^{-1})$ ist eine Karte von M.

Der Rand von M ist in jeder Karte (um einen Randpunkt herum) nach Definition in einer Hyperebene enthalten und damit vom Maß 0. Da das Integral $\int_M d\omega$ über einen Atlas von M definiert ist, kann ∂M bei der Integration vernachlässigt werden, also folgt:

$$\int_M d\omega = \int_{B_a(0)} \psi^* d\omega \underset{\substack{\partial B_a(0) \text{ vom} \\ \text{Maß } 0}}{=} \int_{\overline{B_a(0)}} \psi^* d\omega .$$

Es ist $d\omega = dz \wedge dx + dx \wedge dy + dy \wedge dz$ und $d\Psi_1 = dx$, $d\Psi_2 = dy$, $d\Psi_3 = 2x\,dx - 2y\,dy$. Also folgt:

$$\int_M d\omega = \int_{\overline{B_a(0)}} \Psi^* d\omega = \int_{\overline{B_a(0)}} d\Psi_3 \wedge d\Psi_1 + d\Psi_1 \wedge d\Psi_2 + d\Psi_2 \wedge d\Psi_3$$

$$= \int_{\overline{B_a(0)}} 2x\,dx \wedge dx - 2y\,dy \wedge dx + dx \wedge dy + 2x\,dy \wedge dx - 2y\,dy \wedge dy$$

$$= \int_{\overline{B_a(0)}} (1 + 2y - 2x)\,dx \wedge dy = \int_{\overline{B_a(0)}} (1+2y-2x)\,dx\,dy$$

Polar Koordinaten

$$= \int_0^a \left(\int_0^{2\pi} (1 + 2s \sin\varphi - 2s\cos\varphi)\, s\, d\varphi \right) ds$$

$$= \int_0^a \left(\int_0^{2\pi} s\, d\varphi \right) ds + \int_0^a 2s^2 \left(\int_0^{2\pi} \sin\varphi - \cos\varphi\, d\varphi \right) ds$$

$$= 2\pi \cdot \frac{a^2}{2} + \int_0^a 2s^2 \underbrace{(-\cos\varphi - \sin\varphi)\Big|_0^{2\pi}}_{=0} ds$$

$$= \pi a^2 .$$

- Mit dem Satz von Stokes: $\Psi(\partial B_a(0))$ liefert wie oben Karte des Randes. In Polar Koordinaten erhalten wir die „Karte" (wieder unter Vernachlässigung von Nullmengen):

$$\tilde{\Psi} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \; \varphi \mapsto (a\cos\varphi,\, a\sin\varphi,\, a^2\cos^2\varphi - a^2\sin^2\varphi).$$

Es ist $d\tilde{\Psi}_1 = -a\sin\varphi\, d\varphi$, $d\tilde{\Psi}_2 = a\cos\varphi\, d\varphi$,

$$d\tilde{\Psi}_3 = -2a^2 \cos\varphi \sin\varphi\, d\varphi - 2a^2 \sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi$$

$$= -4a^2 \cos\varphi \sin\varphi\, d\varphi .$$

Damit:

$$\int_M d\omega \underset{\text{Stokes}}{\overset{\uparrow}{=}} \int_{\partial M} \omega = \int_{[0,2\pi]} \tilde{\Psi}^* \omega = \int_{[0,2\pi]} (a^2\cos^2\varphi - a^2\sin^2\varphi)\, d\psi_1 + a\cos\varphi\, d\psi_2 + a\sin\varphi\, d\psi_3$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-a^3\cos^2\varphi\sin\varphi + a^3\sin^3\varphi + a^2\cos^2\varphi - 4a^3\sin^2\varphi\cos\varphi\right) d\varphi$$

Rechnen..

$$= \left(\frac{a^3}{3}\cos^3\varphi + a^3\left(-\frac{1}{3}\sin^2\varphi\cos\varphi - \frac{2}{3}\cos\varphi\right) + a^2\left(\frac{1}{2}\cos\varphi\sin\varphi + \frac{1}{2}\varphi\right) - \frac{4}{3}a^3\sin^3\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi}$$

$$= \left(\frac{a^3}{3} - \frac{2}{3}a^3 + \frac{2\pi}{2}a^2\right) - \left(\frac{a^3}{3} - \frac{2}{3}a^3\right)$$

$$= \pi a^2 .$$

(also dasselbe Ergebnis)

$\blacksquare$

10.3. $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ der Torus, $\pi: \mathbb{R}^2 \to T^2$ Quotientenabbildung. Seien c_1, c_2 die geschlossenen Kurven $c_1(t) = \pi(t,0)$, $c_2(t) = \pi(0,t)$, $t \in [0,1]$.

Zeige:

a) Ist $\tilde{\gamma}$ Liftung einer geschlossenen Kurve $\gamma: [a,b] \to T^2$, so ist $\tilde{\gamma}(b) - \tilde{\gamma}(a) \in \mathbb{Z}^2$ und dieses Tupel ist unabhängig von der Konkreten Liftung (Windungszahl).

b) Ist $\beta \in \Omega^1(T^2, \mathbb{R})$ geschlossen, γ geschlossene Kurve auf T^2 mit Windungszahl (k, ℓ), so ist

$$\int_\gamma \beta = k \cdot \int_{c_1} \beta + \ell \cdot \int_{c_2} \beta .$$

c) Sind $\eta_1, \eta_2 \in \Omega^1(T^2, \mathbb{R})$ geschlossen mit $\pi^* \eta_i = dx_i$, so ist

$$H^1_{dR}(T^2, \mathbb{R}) = \operatorname{span}(\{[\eta_1], [\eta_2]\}).$$

Beweis:

a) Es ist $\pi(\tilde{\gamma}(b)) = \gamma(b) \overset{\gamma \text{ geschl.}}{=} \gamma(a) = \pi(\tilde{\gamma}(a))$.

$\Rightarrow \tilde{\gamma}(b) = \tilde{\gamma}(a) + z$ für ein $z \in \mathbb{Z}^2$. Also: $\tilde{\gamma}(b) - \tilde{\gamma}(a) \in \mathbb{Z}^2$.

Seien $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2$ Liftungen von γ.

Für $t \in [a,b]$ fest ist $\pi(\tilde{\gamma}_2(t)) = \gamma(t) = \pi(\tilde{\gamma}_1(t))$.

$\overset{\text{wie eben}}{\Longrightarrow} \tilde{\gamma}_2(t) - \tilde{\gamma}_1(t) \in \mathbb{Z}^2$.

Also: $\tilde{\gamma}_2 - \tilde{\gamma}_1 : [a,b] \to \mathbb{Z}^2$ stetig $\Rightarrow$ Konstant ($\mathbb{Z}^2$ diskret).

$\Rightarrow \tilde{\gamma}_2 - \tilde{\gamma}_1 = z$ für ein $z \in \mathbb{Z}^2$. Damit:

$$0 = z - z = \tilde{\gamma}_2(b) - \tilde{\gamma}_1(b) - (\tilde{\gamma}_2(a) - \tilde{\gamma}_1(a)) = \tilde{\gamma}_2(b) - \tilde{\gamma}_2(a) - \tilde{\gamma}_1(b) + \tilde{\gamma}_1(a).$$

$\Rightarrow \tilde{\gamma}_2(b) - \tilde{\gamma}_2(a) = \tilde{\gamma}_1(b) - \tilde{\gamma}_1(a)$ d.h. die Windungszahl ist unabhängig von der Liftung von γ.

b) • Sei $(k,\ell) \in \mathbb{Z}^2$ die Windungszahl von γ und $\tilde{\gamma}: [a,b] \to \mathbb{R}^2$ eine Liftung von γ, d.h. das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R}^2 \arrow[d, "\pi"] \\ {[a,b]} \arrow[ur, "\tilde{\gamma}"] \arrow[r, "\gamma"'] & T^2 \end{tikzcd}$$

Kommutiert. Es ist:

$$\int_\gamma \beta = \int_{[a,b]} \gamma^* \beta \underset{\gamma = \pi \circ \tilde{\gamma}}{=} \int_{[a,b]} (\pi \circ \tilde{\gamma})^* \beta = \int_{[a,b]} \tilde{\gamma}^* (\pi^* \beta) = \int_{\tilde{\gamma}} \pi^* \beta \qquad (*)$$

• β geschlossen $\Rightarrow d\beta = 0 \Rightarrow d\pi^*\beta = \pi^* d\beta = \pi^* 0 = 0$

$\Rightarrow \pi^*\beta$ ist geschlossen.

Da $\mathbb{R}^2$ sternförmig und $\pi^*\beta$ geschlossene Form auf $\mathbb{R}^2$ ist, ist $\pi^*\beta$ exakt.

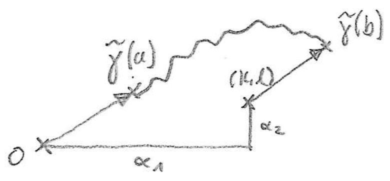
• Sei nun τ irgendein Weg in $\mathbb{R}^2$ von 0 nach $\tilde{\gamma}(a)$.

Wegen $\tilde{\gamma}(b) - \tilde{\gamma}(a) = (k,\ell)$ ist dann $\tau + (k,\ell)$ ein Weg von (k,ℓ) nach $\tilde{\gamma}(a) + (k,\ell) = \tilde{\gamma}(b)$.

Wir definieren die Wege

$\alpha_1: [0,1] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto t \cdot (k,0)$ von 0 nach $(k,0)$

$\alpha_2: [0,1] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (k,0) + t \cdot (0,\ell)$ von $(k,0)$ nach (k,ℓ).



$\Rightarrow \tau \cdot \tilde{\gamma} \cdot (\tau + (k,\ell))^{-1} \cdot \alpha_2^{-1} \cdot \alpha_1^{-1}$ ist geschlossener Weg in $\mathbb{R}^2$

$$\overset{\pi^*\beta}{\underset{\text{exakt}}{\Rightarrow}} \int_\tau \pi^*\beta + \int_{\tilde{\gamma}} \pi^*\beta - \int_{\tau+(k,\ell)} \pi^*\beta - \int_{\alpha_2} \pi^*\beta - \int_{\alpha_1} \pi^*\beta = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\tilde{\gamma}} \pi^* \beta = \left(\int_{\alpha_1} \pi^* \beta + \int_{\alpha_2} \pi^* \beta \right) + \left(\int_{\tau + (k,l)} \pi^* \beta - \int_{\tau} \pi^* \beta \right)$$

Nach Konstruktion von π ist $\pi(\tau(t)) = \pi\big((\tau + (k,l))(t)\big)$ $\forall t$, d.h. τ und $\tau + (k,l)$ sind zwei Liftungen eines Weges $\tilde{\tau} := \pi \circ \tau$ in T^2.

Damit:

$$\int_{\tau} \pi^* \beta = \int_{[0,1]} \tau^* \pi^* \beta = \int_{[0,1]} (\pi \circ \tau)^* \beta = \int_{[0,1]} (\pi \circ (\tau + (k,l)))^* \beta = \int_{\tau + (k,l)} \pi^* \beta .$$

Also erhalten wir:

$$\int_{\tilde{\gamma}} \pi^* \beta = \left(\int_{\alpha_1} \pi^* \beta + \int_{\alpha_2} \pi^* \beta \right) = \left(\int_{[0,1]} \alpha_1^* (\pi^* \beta) + \int_{[0,1]} \alpha_2^* (\pi^* \beta) \right)$$

$$= \left(\int_{[0,1]} (\pi \circ \alpha_1)^* \beta + \int_{[0,1]} (\pi \circ \alpha_2)^* \beta \right)$$

$$= \int_{\pi \circ \alpha_1} \beta + \int_{\pi \circ \alpha_2} \beta = \int_{c_1^k} \beta + \int_{c_2^l} \beta$$

$$= k \cdot \int_{c_1} \beta + l \cdot \int_{c_2} \beta$$

Mit (*) folgt also:

$$\int_{\gamma} \beta = k \cdot \int_{c_1} \beta + l \cdot \int_{c_2} \beta$$

c) • Vorüberlegung: $\beta \in \Omega^1(T^2, \mathbb{R})$ exakt

$$\overset{\text{Hinweis}}{\Longleftrightarrow} \int_{\gamma} \beta = 0 \quad \forall \text{ geschlossenen Wege } \gamma \text{ in } T^2$$

$$\overset{\text{Teil b)}}{\Longleftrightarrow} k \cdot \int_{c_1} \beta + l \cdot \int_{c_2} \beta = 0 \quad \forall (k,l) \in \mathbb{Z}^2$$

$$\Longleftrightarrow \int_{c_1} \beta = 0 \text{ und } \int_{c_2} \beta = 0$$

- Genügt zu zeigen: $\beta \in \Omega^1(T^2,\mathbb{R})$ geschlossen $\Rightarrow \beta = a_1\eta_1 + a_2\eta_2 + df$
für gewisse $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $f \in \Omega^0(T^2,\mathbb{R})$

(Klar, dann gilt stets $[\beta] = a_1[\eta_1] + a_2[\eta_2] \in \operatorname{span}(\{[\eta_1],[\eta_2]\})$)

- Es ist

$$\int_{c_1} \eta_1 = \int_{t\mapsto(t,0)} \pi^*\eta_1 = \int_{t\mapsto(t,0)} dx_1 = \int_0^1 1\,dt = 1$$

$$\int_{c_2} \eta_1 = \int_{t\mapsto(0,t)} \pi^*\eta_1 = \int_{t\mapsto(0,t)} dx_1 = \int_0^1 0\,dt = 0$$

Analog: $\int_{c_1} \eta_2 = 0$ und $\int_{c_2} \eta_2 = 1$.

- Definiere nun für $\beta \in \Omega^1(T^2,\mathbb{R})$ geschlossen:

$$a_1 := \int_{c_1} \beta \quad , \quad a_2 := \int_{c_2} \beta .$$

$$\Rightarrow \int_{c_1} (\beta - a_1\eta_1 - a_2\eta_2) = \int_{c_1} \beta - a_1 \int_{c_1} \eta_1 - a_2 \int_{c_1} \eta_2 = a_1 - a_1 \cdot 1 - 0 = 0$$

und $\int_{c_2} (\beta - a_1\eta_1 - a_2\eta_2) = \int_{c_2} \beta - a_1 \int_{c_2} \eta_1 - a_2 \int_{c_2} \eta_2 = a_2 - 0 - a_2 \cdot 1 = 0$

Nach der Vorüberlegung ist daher $\beta - a_1\eta_1 - a_2\eta_2$ exakt, d.h.

$$\beta - a_1\eta_1 - a_2\eta_2 = df \quad \text{für ein } f \in \Omega^0(T^2,\mathbb{R})$$

also gilt $\beta = a_1\eta_1 + a_2\eta_2 + df$.

$\blacksquare$

10.4. Sei $a \in]0,1[$ und $f: \mathbb{R} \times [-a,a] \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$f(\varphi,t) = \big((1+t\cos(\varphi))\cos(2\varphi),\ (1+t\cos(\varphi))\sin(2\varphi),\ t\sin(\varphi)\big).$$

Das Möbiusband ist definiert durch $\mathcal{M} := f(\mathbb{R}\times[-a,a])$. Zeige:

a) $\mathcal{M}$ ist eine kompakte, differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Rand.

b) $\mathcal{M}$ ist nicht orientierbar.

Beweis:

a) • Zunächst ist f stetig und offenbar $\mathcal{M} = f(\mathbb{R}\times[-a,a]) = f(\underbrace{[0,2\pi]\times[-a,a]}_{\text{Kompakt}})$,
d.h. $\mathcal{M}$ ist kompakt (und zusammenhängend).

• f ist auf jeder offenen Menge eine Immersion, denn:

$$Df(\varphi,t) = \begin{pmatrix} -t\sin(\varphi)\cos(2\varphi) - (1+t\cos(\varphi))2\sin(2\varphi) & \cos(\varphi)\cos(2\varphi) \\ -t\sin(\varphi)\sin(2\varphi) + (1+t\cos(\varphi))2\cos(2\varphi) & \cos(\varphi)\sin(2\varphi) \\ t\cos(\varphi) & \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

Die Determinante der oberen 2×2-Matrix ist:

$$-t\sin(\varphi)\cos(2\varphi)\cos(\varphi)\sin(2\varphi) - (1+t\cos(\varphi))2\sin(2\varphi)\cos(\varphi)\sin(2\varphi)$$

$$+t\sin(\varphi)\sin(2\varphi)\cos(\varphi)\cos(2\varphi) - (1+t\cos(\varphi))2\cos(2\varphi)\cos(\varphi)\cos(2\varphi)$$

$$= -2(1+t\cos(\varphi))\cos(\varphi)\big(\sin^2(2\varphi)+\cos^2(2\varphi)\big)$$

$$= -2(1+t\cos(\varphi))\cos(\varphi)$$

$\Rightarrow \operatorname{Rg} Df(\varphi,t) = 2$, wenn $(1+t\cos(\varphi)) \neq 0$ und $\cos(\varphi) \neq 0$

Ist $\cos(\varphi) = 0$, so ist $Df(\varphi,t) = \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$, also $\operatorname{Rg} Df(\varphi,t) = 2$.

Ist $(1+t\cos(\varphi)) = 0$, d.h. $t\cos(\varphi) = -1$, so ist:

$$Df(\varphi,t) = \begin{pmatrix} -t\sin(\varphi)\cos(2\varphi) & \cos(\varphi)\cos(2\varphi) \\ -t\sin(\varphi)\sin(2\varphi) & \cos(\varphi)\sin(2\varphi) \\ t\cos(\varphi) & \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

$\nearrow$ $\operatorname{Rg} Df(\varphi,t) \neq 2 \Rightarrow$ Wegen $\cos(\varphi)\cos(2\varphi)\cdot\left(-t\frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)}\right) = -t\sin(\varphi)\cos(2\varphi)$

muss gelten: $-t\frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)}\sin(\varphi) = t\cos(\varphi)$

$$\overset{t\neq 0}{\underset{\text{da } t\cos(\varphi)\neq 0}{\Longrightarrow}} \quad -\underbrace{(\sin(\varphi))^2}_{\geq 0} = \underbrace{(\cos(\varphi))^2}_{>0} \quad ↯$$

Also gilt in jedem Fall $\operatorname{Rg} Df(\varphi,t) = 2$, d.h. f ist Immersion.

- Setze für $a \in]0,1[$ $\mathcal{M}_a := f(\mathbb{R}\times]-a,a[)$
  offen!

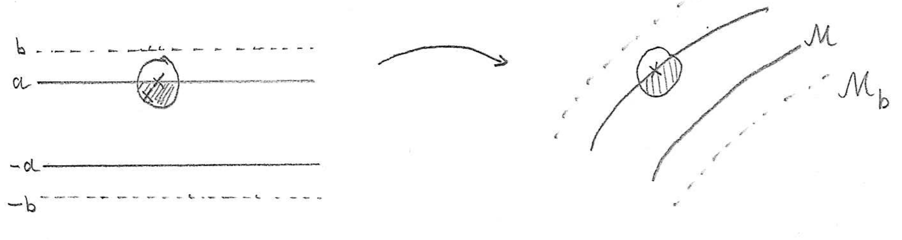
$\overset{\text{Ana II, z.B.}}{\underset{\text{Forster II, §9, Satz 1}}{\Longrightarrow}}$ $\forall x \in \mathbb{R}\times]-a,a[$ $\exists$ offene Umgebung $x\in V$ so dass $f|_V : V \to f(V) \subset \mathcal{M}_a$ ein Homöomorphismus ist.

Verwende die $(f(V), f|_V^{-1})$ als Karten von $\mathcal{M}_a$ (diese überdecken ganz $\mathcal{M}_a$, also: Atlas!)

$\overset{\text{Ana II}}{\Longrightarrow}$ $\mathcal{M}_a$ wird zu diffbarer Mannigfaltigkeit.

- Ist nun $a\in]0,1[$ fixiert, so wähle ein $b\in]a,1[$. $\Rightarrow$ Können $\mathcal{M}_a$ als offene Teilmenge von $\mathcal{M}_b$ auffassen.

  $\Rightarrow$ Um jeden Punkt $x \in \mathbb{R}\times\{a,-a\} \subset \mathbb{R}\times]-b,b[$ erhalten wir eine „Randkarte" von $\mathcal{M} = f(\mathbb{R}\times[-a,a])$ durch Einschränken der entsprechenden Karte von $\mathcal{M}_b$:



$\Rightarrow$ $\mathcal{M}$ ist eine kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Rand, und

$$\partial\mathcal{M} = f(\mathbb{R}\times\{a,-a\}) = f([0,2\pi]\times\{a,-a\}).$$

b) Wir definieren $c : [0, 2\pi] \to \mathcal{M}$, $t \mapsto f(t,a)$.

Wegen
$$f(t+\pi, -a) = \Big((1 - a\cos(t+\pi)) \cos(2t+2\pi),\ (1 - a\cos(t+\pi))\sin(2t+2\pi),\ -a\sin(t+\pi) \Big)$$
$$= \Big((1+a\cos(t))\cos(2t),\ (1+a\cos(t))\sin(2t),\ a\sin(t) \Big)$$
$$= f(t,a)$$

folgt: $\partial\mathcal{M} = c([0,2\pi])$, d.h. der Rand von $\mathcal{M}$ ist eine geschlossene $\mathcal{C}^\infty$-Kurve in $\mathbb{R}^3$.

$\mathcal{M}$ wäre orientierbar $\Rightarrow$ Der Satz von Stokes ist auf $\mathcal{M}$ anwendbar!

Offenbar ist $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) \mid z \in \mathbb{R}\}$. Betrachten die 1-Form
$$\omega = \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2} \in \Omega^1(\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) \mid z\in\mathbb{R}\}, \mathbb{R}).$$

Mit derselben Rechnung wie für die Windungsform auf $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ folgt:
$$d\omega = 0.$$

Damit können wir rechnen:
$$0 = \int_{\mathcal{M}} 0 = \int_{\mathcal{M}} d\omega \overset{\text{Stokes}}{=} \int_{\partial\mathcal{M}} \omega = \pm \int_0^{2\pi} c^*\omega$$

je nach Orientierung auf $\mathcal{M}$.

Es ist
$$\int_0^{2\pi} c^*\omega = \int_0^{2\pi} \Big((1+a\cos(t))^2 (\cos^2(2t) + \sin^2(2t)) \Big)^{-1} \Big(-(1+a\cos(t))\sin(2t)\,dc_1 + (1+a\cos(t))\cos(2t)\,dc_2 \Big)$$
$$= \int_0^{2\pi} (1+a\cos(t))^{-2} (1+a\cos(t)) \Big(-\sin(2t)\big(-a\sin(t)\cos(2t) - (1+a\cos(t))2\sin(2t)\big)$$
$$+ \cos(2t)\big(-a\sin(t)\sin(2t) + (1+a\cos(t))2\cos(2t)\big) \Big)\, dt$$
$$= \int_0^{2\pi} 2\,dt = 4\pi \neq 0$$
↯ Also ist $\mathcal{M}$ nicht orientierbar. ∎