Analysis III, SoSe 2011 - Lösung Blatt 11

11.1. Zeige:

a) Sind $U, V \in GL_n^+(\mathbb{R})$ so dass VU^{-1} keine negativen Eigenwerte besitzt, so ist $(tU + (1-t)V) \in GL_n^+(\mathbb{R})$ $\forall t \in [0,1]$.

b) $GL_n^+(\mathbb{R})$ ist wegzusammenhängend

c) Eine topologische Mannigfaltigkeit M ist zusammenhängend, genau dann, wenn sie wegzusammenhängend ist.

d) Die Mannigfaltigkeit $O_n(\mathbb{R})$ besteht aus genau zwei Zusammenhangskomponenten.

Beweis:

a) Setze für $t \in [0,1]$: $\quad D(t) := \det(tU + (1-t)V)$.

Zu zeigen: $D(t) > 0 \quad \forall t \in [0,1]$.

Da D stetig ist und $D(0) > 0$, $D(1) > 0$ (wegen $U, V \in GL_n^+(\mathbb{R})$) genügt es zu zeigen: D besitzt in $(0,1)$ keine Nullstelle.

Sei also $t \in (0,1)$.

$$D(t) = \det\left(tU + (1-t)V\right) = \det\left((tE + (1-t)VU^{-1})U\right)$$

$$= \det(U)\cdot\det\left(tE + (1-t)VU^{-1}\right) = \det(U)\cdot\det\left((1-t)\left(\frac{t}{1-t}E + VU^{-1}\right)\right)$$

$$= (1-t)^n \det(U)\cdot\det\left(\left(\frac{t}{1-t}\right)E + VU^{-1}\right)$$

$$= (1-t)^n \det(U)\cdot\det\left(VU^{-1} - \left(\frac{-t}{1-t}\right)E\right)$$

$$= \underbrace{(1-t)^n}_{\neq 0}\underbrace{\det(U)}_{\neq 0}\cdot\chi_{VU^{-1}}\left(\frac{-t}{1-t}\right) \qquad (\chi_{VU^{-1}}: \text{charakteristisches Polynom})$$

Da $\frac{-t}{1-t} < 0$ und VU^{-1} keine negativen Eigenwerte besitzt, ist $\chi_{VU^{-1}}\left(\frac{-t}{1-t}\right) \neq 0$, also $D(t) \neq 0$.

b) • Behauptung: $A \in GL_n^+(\mathbb{R}) \Rightarrow A = T^2 B$ mit $T, B \in GL_n^+(\mathbb{R})$ ohne negative Eigenwerte.

Dazu: Hat A keine negativen Eigenwerte, schreibe $A = E^2 A$.

Ansonsten muss wegen $0 < \det(A) = \prod \{\text{EWte von } A\}$ die Anzahl der negativen Eigenwerte von A gerade sein. Bezeichne diese mit $\lambda_1, \dots, \lambda_{2k} \in \mathbb{R}_{<0}$.

$\Rightarrow$ Wir können (neg. EWte insb. reell) diesen „Teil" von A trigonalisieren, d.h. $\exists\, V \in GL_n(\mathbb{R})$ mit

$$V^{-1} A V = \begin{pmatrix} \Lambda & * \\ 0 & C \end{pmatrix} =: A'$$

wobei $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{2k} \end{pmatrix}$ ist und C keine negativen EWte besitzt

(denn A' besitzt offenbar dieselben Eigenwerte wie A). Setze nun

$$T := \begin{pmatrix} 0 & -1 & & & & & & \\ 1 & 0 & & & & & 0 & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 0 & -1 & & & \\ & & & 1 & 0 & & & \\ & 0 & & & & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \left.\vphantom{\begin{matrix} 0\\0\\0\\0\\0 \end{matrix}}\right\} 2k \text{ Zeilen}$$

Wegen $\det\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 + 1 = 1$ sind alle Hauptminoren von T positiv, d.h. T ist positiv definit und besitzt keine negativen Eigenwerte. Wegen

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ ist T invertierbar, d.h. $T \in GL_n^+(\mathbb{R})$.

Setze

$$B := T^{-2} A' = \begin{pmatrix} -\Lambda & * \\ 0 & C \end{pmatrix} \Rightarrow B \in GL_n^+(\mathbb{R}) \text{ und } B \text{ hat keine negativen Eigenwerte}$$

(denn $T^2 = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$.) $\Rightarrow$ Gesuchte Darstellung ist

$$A = (VTV^{-1})^2 (VBV^{-1}).$$

- Damit: Gl_n^+ ist wegzusammenhängend, denn sei $A \in Gl_n^+(\mathbb{R})$ beliebig.

  Schreibe $A = T^2 B$ wie eben.

  - $BE^{-1} = B$ ohne neg. EWte. $\overset{a)}{\Rightarrow}$ $tE + (1-t)B$, $t \in [0,1]$ ist (stetiger) Weg in $Gl_n^+(\mathbb{R})$ von B nach E.

    $\Rightarrow \exists$ Weg $E \rightsquigarrow B$ in $Gl_n^+(\mathbb{R})$

  - $TB, B \in Gl_n^+(\mathbb{R})$, $TBB^{-1} = T$ ohne neg. EWte

    $\overset{\text{s.o.}}{\Rightarrow} \exists$ Weg $B \rightsquigarrow TB$ in $Gl_n^+(\mathbb{R})$

  - $T^2B, TB \in Gl_n^+(\mathbb{R})$, $T^2B(TB)^{-1} = T^2BB^{-1}T^{-1} = T$ ohne neg. EWte

    $\overset{\text{s.o.}}{\Rightarrow} \exists$ Weg $TB \rightsquigarrow T^2B = A$ in $Gl_n^+(\mathbb{R})$.

  Insgesamt: $\exists$ (stetiger) Weg $E \rightsquigarrow A$ in $Gl_n^+(\mathbb{R})$.

  $\Rightarrow A, B \in Gl_n^+(\mathbb{R})$. $\Rightarrow \exists$ Wege $E \overset{\gamma_1}{\rightsquigarrow} A$, $E \overset{\gamma_2}{\rightsquigarrow} B$

  $\Rightarrow A \overset{\gamma_1^{-1}}{\rightsquigarrow} E \overset{\gamma_2}{\rightsquigarrow} B$ ist Weg in $Gl_n^+(\mathbb{R})$.

c) Stets richtig (Ana II !): M wegzusammenhängend $\Rightarrow$ M zusammenhängend.

Sei nun also M zusammenhängend.

- Ist $p \in M$, $\exists$ Umgebung $\tilde{U} \subset M$ um p und Homöomorphismus $\varphi: \tilde{U} \to \tilde{V} \subset \mathbb{R}^n$ offen

  $\Rightarrow$ Um $\varphi(p) \in \tilde{V}$ $\exists$ Kugel $\varphi(p) \in B \subset \tilde{V}$.

  Setze $U := \varphi^{-1}(B) \subset M$ offen, $\psi := \varphi|_U$ $\Rightarrow$ $\psi: U \to B$ Homöomorphismus

  Da B wegzusammenhängend ist, ist auch U wegzusammenhängend.

  Also: Jeder Punkt $p \in M$ besitzt eine offene, wegzusammenhängende Umgebung in M.

- Sei nun $x \in M$ fixiert und

  $$Z := \{y \in M \mid \exists \text{ Weg von } x \text{ nach } y\} \subset M.$$

  $\Rightarrow x \in Z$, d.h. $Z \neq \emptyset$.

Z ist offen, denn ist $y \in Z$, so $\exists$ offene, wegzusammenhängende Umgebung $y \in U \subset M$. $\Rightarrow$ $U \subset Z$, denn ist $p \in U$, so $\exists$ Weg $y \rightsquigarrow p$ und da $y \in Z$ ein Weg $x \rightsquigarrow y$, also ein Weg $x \rightsquigarrow p$, d.h. $p \in Z$.

Z ist abgeschlossen, denn ist $y \in M \setminus Z$, so $\exists$ offene, wegzusammenhängende Umgebung $y \in U \subset M$ $\Rightarrow$ $U \subset M \setminus Z$, denn wäre $p \in U \cap Z$, so gäbe es einen Weg $x \rightsquigarrow p$ und Weg $p \rightsquigarrow y$ also wäre $y \in Z$.
$\Rightarrow$ $M \setminus Z$ ist offen, d.h. Z ist abgeschlossen

$\overset{M \text{ zshgd.}}{\Longrightarrow}$ $Z = M$, also ist M wegzusammenhängend.

d) Nach c) genügt es, alle Wegzusammenhangskomponenten von $O_n(\mathbb{R})$ zu bestimmen. $O_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid A^t A = E\}$

$\Rightarrow$ $A \in O_n(\mathbb{R})$, $1 = \det(E) = \det(A^t A) = \det(A^t)\det(A) = \det(A)^2$
$\Rightarrow$ $\det(A) \in \{\pm 1\}$.

Setze $SO_n(\mathbb{R}) := \{A \in O_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$
$R := \{A \in O_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = -1\}$ $\Rightarrow$ $O_n(\mathbb{R}) = SO_n(\mathbb{R}) \cup R$.

- Behauptung: $\nexists$ Weg zwischen $SO_n(\mathbb{R})$ und R.
  Sei dazu $A \in SO_n(\mathbb{R})$, $B \in R$. $\nearrow$ γ ist Weg von A nach B.
  $\Rightarrow$ $\det \circ \gamma$ ist ein stetiger Weg in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ von 1 nach -1 $\lightning$

  $\Rightarrow$ $O_n(\mathbb{R})$ besitzt mindestens zwei Wegzusammenhangskomponenten.
  Es genügt zu zeigen: $SO_n(\mathbb{R})$ und R sind wegzusammenhängend

- Behauptung: Ist $SO_n(\mathbb{R})$ wegzusammenhängend, dann auch R.
  (damit genügt es zu zeigen: $SO_n(\mathbb{R})$ ist wegzusammenhängend)

Dazu: Setze

$$T := \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & 1 \end{pmatrix} \in O_n(\mathbb{R}). \quad \Rightarrow \quad T^t = T \quad \text{und} \quad T^2 = E.$$

$\Rightarrow$ T ist Homöomorphismus $\mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ (Klar: VR-Isomorphismus)

und $T(SO_n(\mathbb{R})) = R$, denn für $A \in SO_n(\mathbb{R})$ ist $\det(A) = 1$

also $\det(TA) = \det(T)\det(A) = -1$ und

$(TA)^t(TA) = A^t T^t T A = A^t T^2 A = A^t A = E$, also $TA \in O_n(\mathbb{R})$.

$\Rightarrow$ $SO_n(\mathbb{R})$ wegzusammenhängend $\overset{\text{vermöge}}{\underset{T}{\Longleftrightarrow}}$ R wegzusammenhängend.

- Behauptung: $SO_n(\mathbb{R})$ ist wegzusammenhängend.

Dazu: Interpretiere Gram-Schmidt-Orthonormalisierung als Abbildung

$GL_n(\mathbb{R}) \xrightarrow{g} O_n(\mathbb{R})$.

$\Rightarrow$ Nach Konstruktion ist g stetig!

Sind nun $A, B \in SO_n(\mathbb{R}) \subset GL_n^+(\mathbb{R})$ gegeben, existiert nach b), ein Weg $\gamma : [0,1] \to GL_n^+(\mathbb{R})$ von A nach B.

$\overset{g \text{ stetig}}{\Longrightarrow}$ $g \circ \gamma : [0,1] \to O_n(\mathbb{R})$ ist ein Weg in $O_n(\mathbb{R})$ von A nach B.

$\Rightarrow$ Da $A, B \in SO_n(\mathbb{R})$ muss $g \circ \gamma$ komplett in $SO_n(\mathbb{R})$ verlaufen, da wir sonst einen Weg von $A \in SO_n(\mathbb{R})$ zu einer Matrix $C \in R$ hätten (also ein Widerspruch zu unserer ersten Behauptung).

$\Rightarrow$ $g \circ \gamma$ ist der gesuchte Weg!

∎

(Bemerkung: Der Beweis des Wegzusammenhangs von $SO_n(\mathbb{R})$ ist konstruktiv ...)

11.2. Sei $0<r<R$ und ∂T der Rand des Torus $T \subset \mathbb{R}^3$ mit diesen Radien, d.h.

$$\partial T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2 = r^2\}$$

Berechne das Volumen von ∂T als 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$, d.h. die Oberfläche des Torus.

Dazu:

- Untersuche ∂T: $(x,y,z) \in \partial T$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2 = r^2 \Leftrightarrow z^2 = r^2 - (\sqrt{x^2+y^2} - R)^2$$

$$\Leftrightarrow z = \pm \left(r^2 - (\sqrt{x^2+y^2} - R)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Also existieren „Lösungen" für z genau dann, wenn

$$(\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 \leq r^2 \quad \underset{(s,\varphi)}{\overset{\text{Polarkoord.}}{\Longleftrightarrow}} \quad (s-R)^2 \leq r^2$$

$$\Leftrightarrow (s-R)^2 - r^2 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (s-R-r)(s-R+r) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (s-R-r) \leq 0 \text{ und } (s-R+r) \geq 0, \text{ d.h. } R-r \leq s \leq R+r$$

oder

$$(s-R-r) \geq 0 \text{ und } (s-R+r) \leq 0, \text{ d.h. } R+r \leq s \leq R-r \rightsquigarrow \text{unmöglich.}$$

$\Rightarrow$ Es existieren Lösungen für $(x,y) \in \overline{B_{R-r,R+r}(0)}$.

- Setze $B := B_{R-r,R+r}(0)$ und

$$\varphi_1 : B \to \partial T, \; (x,y) \mapsto \Big(x, y, \underbrace{\left(r^2 - (\sqrt{x^2+y^2} - R)^2\right)^{\frac{1}{2}}}_{=: f_1 : B \to \mathbb{R}}\Big)$$

$$\varphi_2 : B \to \partial T, \; (x,y) \mapsto \Big(x, y, \underbrace{-f_1(x,y)}_{=: f_2 : B \to \mathbb{R}}\Big)$$

$\Rightarrow$ Die φ_j sind injektiv, stetig und

$$D\varphi_j(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ * & * \end{pmatrix}, \text{ d.h. } \operatorname{Rg} D\varphi_j(x,y) = 2.$$

$\Rightarrow$ Wir Können die φ_j^{-1} als Karten auf ∂T verwenden!

Außerdem stellen die φ_j den jeweiligen „Ausschnitt" von ∂T als Graph der f_j über $\mathcal{B}$ dar. Unter Vernachlässigung des „Äquators" $(\mathbb{R}^2 \times \{0\}) \cap \partial T$ (als Kurve in jeder Karte von ∂T eine Nullmenge und daher bei der Integration vernachlässigbar) folgt mit der VL:

$$\operatorname{Vol}(\partial T) = \int_{\mathcal{B}} (1 + \|\operatorname{grad} f_1\|^2)^{\frac{1}{2}}\, dx\,dy + \int_{\mathcal{B}} (1 + \|\operatorname{grad} f_2\|^2)^{\frac{1}{2}}\, dx\,dy$$

$$= 2 \cdot \int_{\mathcal{B}} (1 + \|\operatorname{grad} f_1\|^2)^{\frac{1}{2}}\, dx\,dy$$

bzw. $2y$ bei $\frac{\partial}{\partial y}$ ..

Es ist: $$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2\left(r^2 - \left(\sqrt{x^2+y^2} - R\right)^2\right)^{1/2}} \left(-2\left(\sqrt{x^2+y^2} - R\right) \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} \right)$$

$$= \frac{-\left(\sqrt{x^2+y^2} - R\right)}{f_1(x,y)} \cdot \frac{x}{\|(x,y)\|}$$ bzw. y bei $\frac{\partial}{\partial y}$ ..

$$\Rightarrow \operatorname{grad} f_1(x,y) = \frac{-\left(\sqrt{x^2+y^2} - R\right)}{f_1(x,y)} \cdot \frac{(x,y)}{\|(x,y)\|}$$

$$\Rightarrow \|\operatorname{grad} f_1(x,y)\|^2 = \frac{\left(\sqrt{x^2-y^2} - R\right)^2}{(f_1(x,y))^2} = \frac{\left(\sqrt{x^2+y^2} - R\right)^2 - r^2 + r^2}{(f_1(x,y))^2}$$

$$= \left(\frac{r}{f_1(x,y)}\right)^2 - 1.$$

Damit:

$$\operatorname{Vol}(\partial T) = 2 \cdot \int_{\mathcal{B}} \frac{r}{f_1(x,y)}\, dx\,dy \overset{\text{Polarkoord.}}{=} 2r \int_{R-r}^{R+r} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{(r^2 - (s-R)^2)^{\frac{1}{2}}}\, s\, ds\, d\varphi$$

$$= 4\pi r \int_{R-r}^{R+r} \frac{s}{\left(r^2-(s-R)^2\right)^{1/2}}\, ds \underset{\substack{\text{Subst:}\\ t=s-R}}{=} 4\pi r \int_{-r}^{r} \frac{t+R}{(r^2-t^2)^{1/2}}\, dt$$

$$= 4\pi r \left(\underbrace{\int_{-r}^{r} \frac{t}{(r^2-t^2)^{1/2}}\, dt}_{\substack{=0 \text{ da Integrand}\\ \text{schiefsymmetrisch}}} + R \int_{-r}^{r} \frac{1}{(r^2-t^2)^{1/2}}\, dt \right)$$

$$= 4\pi R r \int_{-r}^{r} \frac{1}{(r^2-t^2)^{1/2}}\, dt \underset{\substack{\text{Subst:}\\ s=tr}}{=} 4\pi R r \int_{-1}^{1} \frac{r}{(r^2-t^2r^2)^{1/2}}\, dt$$

$$= 4\pi R r \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = 4\pi R r \left(\arcsin(t)\right)\Big|_{-1}^{1}$$

$$= 4\pi R r \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 4\pi^2 R r.$$

$\blacksquare$

11.3.

a) $K \subset \mathbb{R}^d$ kompakt, $f: K \to [0,\infty)$ stetig. Sei $\tilde{f}: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ die triviale Fortsetzung von f. Zeige: $\tilde{f} \in \mathcal{H}^\downarrow(\mathbb{R}^d)$.

b) $U \subset \mathbb{R}^d$ offen, $f: U \to [0,\infty)$ stetig. Sei $\tilde{f}: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ die triviale Fortsetzung von f. Zeige: $\tilde{f} \in \mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R}^d)$.

Beweis:

a) Nach VL genügt es zu zeigen: $\tilde{f}$ ist von oben halbstetig, denn nach Konstruktion ist $f(x) = 0$ (≤ 0) $\forall x \in \mathbb{R}^d \setminus K$ und K ist kompakt. Dazu sei $x \in \mathbb{R}^d$ beliebig. Fallunterscheidung:

- $x \in \mathring{K}$. $\Rightarrow$ $\exists$ offene Umgebung $x \in U \subset \mathring{K}$. Da $\tilde{f}|_U = f|_U$ und f stetig ist, ist $\tilde{f}$ in x stetig, also insb. von oben halbstetig.

- $x \in \mathbb{R}^d \setminus K$ $\overset{\mathbb{R}^d \setminus K \text{ offen}}{\Longrightarrow}$ $\exists$ offene Umgebung $x \in U \subset \mathbb{R}^d \setminus K$ und $\tilde{f}|_U \equiv 0$, d.h. $\tilde{f}$ ist in x stetig, also insb. von oben halbstetig.

- $x \in K \setminus \mathring{K} = \overline{K} \setminus \mathring{K} = \partial K$. Sei $c > \tilde{f}(x) \overset{x \in K}{=} f(x) \geq 0$.

  Da f stetig ist, $\exists$ Umgebung $x \in U$ so dass $\forall y \in K \cap U$ gilt:
  $$\tilde{f}(y) = f(y) < c$$
  Für $y \in (\mathbb{R}^d \setminus K) \cap U$ ist $\tilde{f}(y) = 0 \leq f(x) < c$.

  Da $U = (K \cap U) \cup ((\mathbb{R}^d \setminus K) \cap U)$ gilt, folgt $\tilde{f}(y) < c$ $\forall y \in U$.

  $\Rightarrow$ $\tilde{f}$ ist von oben halbstetig.

b) Es genügt wieder zu zeigen, dass $\tilde{f}$ von unten halbstetig ist, da nach Voraussetzung für jedes Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^d$ gilt:
$$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \setminus K.$$

Sei also wieder $x \in \mathbb{R}^d$ beliebig. Fallunterscheidung:

- $x \in U \Rightarrow \tilde{f}|_U = f|_U$ also stetig in x und damit insbesondere von unten halbstetig.

- $x \in \mathbb{R}^d \setminus \bar{U} \overset{\mathbb{R}^d \setminus \bar{U} \text{ offen}}{\Longrightarrow} \exists$ offene Umgebung $x \in V \subset \mathbb{R}^d \setminus \bar{U}$ und $\tilde{f}|_V \equiv 0$, also stetig in x, d.h. insb. von unten halbstetig.

- $x \in \bar{U} \setminus U = \bar{U} \setminus \mathring{U} = \partial U$. Sei $c < \tilde{f}(x) \underset{x \notin U}{=} 0$.

  Wähle irgendeine Umgebung $x \in V \subset \mathbb{R}^d$. $\underset{\text{Vor.}}{\Rightarrow} \tilde{f}|_V \geq 0 > c$

  $\Rightarrow \tilde{f}$ in x von unten halbstetig.

$\Rightarrow \tilde{f}$ ist von unten halbstetig.

$\blacksquare$

11.4. Sei M ein metrischer Raum. Zeige: Ist M Kompakt, und $f: M \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ halbstetig von unten, so nimmt f auf M sein Minimum an.

Beweis:

OE sei $f \not\equiv \infty$ (sonst ist ∞ das Minimum und wird angenommen).

Setze $\quad a := \inf\{f(x) \mid x \in M\} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \quad$ (da $f \not\equiv \infty$).

↯ $f(x) > a \quad \forall x \in M$. Aus der Definition von inf folgt:

$\exists \; (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset M$ Folge mit $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = a$.

M Kompakt $\overset{\text{Ana II}}{\Longrightarrow}$ Die Folge (x_n) besitzt in M einen Häufungspunkt.

(Erinnerung an dieses Argument: ↯ (x_n) besitzt keinen Häufungspunkt.

$\Rightarrow \forall x \in M \; \exists$ Umgebung $U(x)$ von x mit: $U(x)$ enthält nur endlich viele Folgenglieder. $\Rightarrow \bigcup\limits_{x \in M} U(x)$ ist offene Überdeckung von M

$\overset{M \text{ kpkt.}}{\Longrightarrow} \exists \; x_1, \dots, x_n \in M: \quad M = \bigcup\limits_{j=1}^{n} U(x_j) \Rightarrow$ Nur endlich viele Folgenglieder liegen in M ↯).

$\Rightarrow \exists$ Konvergente Teilfolge $(x_{n(k)})$, sei $\lim\limits_{k \to \infty} x_{n(k)} =: x$

Nach Annahme ist $f(x) > a$, also $\exists \; c \in (a, f(x))$, d.h. $a < c < f(x)$.

Da f halbstetig von unten ist, $\exists$ Umgebung $U \subset M$ von x, mit

$$a < c < f(y) \quad \forall y \in U$$

Da $\lim\limits_{k \to \infty} x_{n(k)} = x \quad \exists \; N \in \mathbb{N}: \; x_{n(k)} \in U \quad \forall \; k \geq N$ gilt.

$\Rightarrow f(x_{n(k)}) > c > a \quad \forall \; k \geq N \quad$ ↯ gegen $\lim\limits_{k \to \infty} f(x_{n(k)}) = a$

$\Rightarrow \exists \; y \in M$ mit $f(y) \leq a$, also (da a inf): $f(y) = a = \inf\{f(x) \mid x \in M\}$ ∎