

Analysis III, SoSe 2011 - Lösung Blatt 12

12.1. Sei $\alpha > 0$ und $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

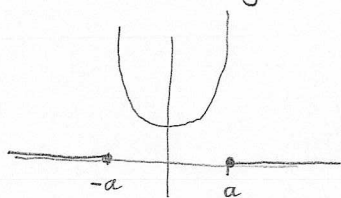
$$x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}} & \text{für } |x| < \alpha \\ 0 & \text{für } |x| \geq \alpha \end{cases}$$

Konstruiere explizit eine Funktionenfolge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ mit $f_k \uparrow f$ und zeige

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \pi.$$

Dazu:

• Anschauung:



Wir konstruieren die f_k , indem wir die Funktion f auf $[-a, -a + \frac{1}{k}]$ und $[a - \frac{1}{k}, a]$ durch eine lineare Funktion ersetzen. Es ist:

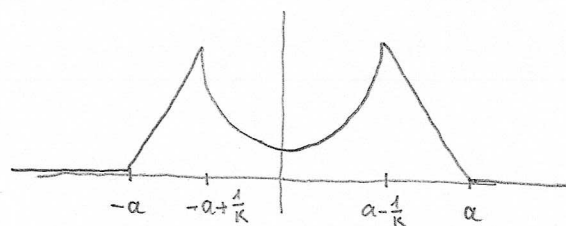
$$f(a - \frac{1}{k}) = f(-a + \frac{1}{k}) = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - (a - \frac{1}{k})^2}} = \frac{k}{\sqrt{2ak - 1}}$$

• Konstruiere lineare Funktion $g_k^1(x) = \alpha_k x + b_k$ mit $g_k^1(a) = 0$, $g_k^1(a - \frac{1}{k}) = \frac{k}{\sqrt{2ak - 1}}$
 $\Rightarrow \alpha_k = -\frac{k^2}{\sqrt{2ak - 1}}, \quad b_k = \frac{k^2}{\sqrt{2ak - 1}} a$

Analog ist $g_k^2(x) = -\alpha_k x + b_k$ Funktion mit $g_k^2(-a) = 0$ und $g_k^2(-a + \frac{1}{k}) = \frac{k}{\sqrt{2ak - 1}}$.

• Setze

$$f_k(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } |x| \geq a \\ g_k^1(x) & \text{für } a - \frac{1}{k} \leq x \leq a \\ \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}} & \text{für } -a + \frac{1}{k} \leq x \leq a - \frac{1}{k} \\ g_k^2(x) & \text{für } -a \leq x \leq -a + \frac{1}{k} \end{cases}$$



$\Rightarrow f_k$ ist stetig, $\text{supp } f_k = [-a, a]$ also $f_k \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}) \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

- Berechne $\lim_{K \rightarrow \infty} f_K(x)$:

$$* |x| \geq a \Rightarrow f_K(x) = 0 \quad \forall K \in \mathbb{N} \text{ also } \lim_{K \rightarrow \infty} f_K(x) = 0 = f(x)$$

$$* |x| < a \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} \text{ mit } x \in]-a + \frac{1}{N}, a - \frac{1}{N}[\quad \forall N \geq N \text{ (offenbar).}$$

$$\Rightarrow \lim_{K \rightarrow \infty} f_K(x) = f_\ell(x) = f(x).$$

Also: $\lim_{K \rightarrow \infty} f_K(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ und offenbar ist stets $f_K \leq f_{K+1}$

$$\Rightarrow f_K \uparrow f.$$

- Aus der Vorlesung folgt damit:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(x) dx &= \lim_{K \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_K(x) dx = \lim_{K \rightarrow \infty} \int_{-a}^a f_K(x) dx \\ &= \lim_{K \rightarrow \infty} \left(\int_{-a + \frac{1}{K}}^{a - \frac{1}{K}} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx + \underbrace{\int_{-a}^{-a + \frac{1}{K}} (-a_K x + b_K) dx + \int_{a - \frac{1}{K}}^a (a_K x + b_K) dx}_{(*)} \right) \end{aligned}$$

Es ist:

$$(*) = \left(-\frac{a_K}{2} x^2 + b_K x \right) \Big|_{-a}^{-a + \frac{1}{K}} + \left(\frac{a_K}{2} x^2 + b_K x \right) \Big|_{a - \frac{1}{K}}^a$$

$$= -\frac{a_K}{2} \left(-a + \frac{1}{K} \right)^2 + b_K \left(-a + \frac{1}{K} \right) + \frac{a_K}{2} a^2 + b_K a + \frac{a_K}{2} a^2 + b_K a - \frac{a_K}{2} \left(a - \frac{1}{K} \right)^2 - b_K \left(a - \frac{1}{K} \right)$$

$$= -a_K \left(a - \frac{1}{K} \right)^2 + 2b_K a + a_K a^2 - 2b_K \left(a - \frac{1}{K} \right)$$

$b_K = -a_K a$ $\rightarrow$

$$= -a_K \left(a - \frac{1}{K} \right)^2 - 2a_K a^2 + a_K a^2 + 2a_K a \left(a - \frac{1}{K} \right)$$

$$= -a_K \left(\left(a - \frac{1}{K} \right)^2 - 2a \left(a - \frac{1}{K} \right) + a^2 \right) = -a_K \left(a - \left(a - \frac{1}{K} \right) \right)^2 = -\frac{a_K}{K^2} = \frac{1}{\sqrt{2aK-1}}$$

• Also:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\int_{-a + \frac{1}{k}}^{a - \frac{1}{k}} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2ak-1}}}_{\rightarrow 0} \right)$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-a + \frac{1}{k}}^{a - \frac{1}{k}} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$$

Substitution $\rightarrow$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\frac{-a + \frac{1}{k}}{a}}^{\frac{a - \frac{1}{k}}{a}} \frac{1}{\sqrt{a^2 - a^2 y^2}} a dy$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\frac{-a + \frac{1}{k}}{a}}^{\frac{a - \frac{1}{k}}{a}} \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} dy$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\arcsin \left(\frac{a - \frac{1}{k}}{a} \right) - \arcsin \left(\frac{-a + \frac{1}{k}}{a} \right) \right)$$

$\arcsin$ -
1st step $\rightarrow$

$$= \arcsin(1) - \arcsin(-1)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right)$$

$$= \pi$$



12.2. Sei $f \in \mathcal{L}^1([0,1])$. Zeige, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ die Funktion $f_k: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^k f(x)$ Lebesgue-integrierbar ist und dass der Grenzwert

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 f_k(x) dx$$

existiert. Gib den Grenzwert an.

Beweis:

- $f_k \in \mathcal{L}^1([0,1])$ folgt (da $x \mapsto x^k$ Lebesgue-integrierbar und beschränkt ist) aus der Behauptung: $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, g beschränkt $\Rightarrow f \cdot g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$.

Dazu: Verwende das Kriterium aus Satz 5.14:

- Sei $M > 0$ so gewählt, dass $|g(x)| \leq M \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$. Sei $\varepsilon > 0$.

- $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \exists \varphi \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n)$ mit $\|f - \varphi\|_{L_1} < \frac{\varepsilon}{2M}$.

- Sei $M' := \sup \{|\varphi(x)| \mid x \in \mathbb{R}^n\}$. $\varphi \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n) \Rightarrow M' < \infty$.

- $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \exists \psi \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n)$ mit $\|g - \psi\|_{L_1} < \frac{\varepsilon}{2M'}$.

$$\Rightarrow |fg - \varphi\psi| = |(f - \varphi)g + \varphi(g - \psi)| \leq M|f - \varphi| + M'|g - \psi|$$

$$\Rightarrow \|fg - \varphi\psi\|_{L_1} \leq M\|f - \varphi\|_{L_1} + M'\|g - \psi\|_{L_1} < M \frac{\varepsilon}{2M} + M' \frac{\varepsilon}{2M'} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$$\Rightarrow fg \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n).$$

- Berechne punktwisen Grenzwert der f_k :

$$\text{Für } x \in [0,1] \text{ mit } f(x) \neq \infty \text{ ist } \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = x_{1,1} \cdot f(1) =$$

Da $f \in \mathcal{L}^1([0,1])$ ist $\{x \in [0,1] \mid f(x) = \infty\}$ vom Maß 0, d.h. die f_k konvergieren fast überall gegen die Funktion $x_{1,1} \cdot f(1): [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$.

Offenbar ist $|f_k| \leq |f_1| =: F \quad \forall k \in \mathbb{N}$ und $f_1 \in \mathcal{L}([0,1]) \Rightarrow F \in \mathcal{L}([0,1])$ also $\|F\|_{L_1} < \infty$.

Mit dem Satz von Lebesgue folgt daher: $\chi_{\{1\}} \cdot f(1)$ ist Lebesgue-integrierbar mit

$$\int_0^1 \chi_{\{1\}} \cdot f(1) dx = \lim_{K \rightarrow \infty} \int_0^1 f_K(x) dx.$$

Der Grenzwert existiert also und es ergibt sich:

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \int_0^1 f_K(x) dx = \int_0^1 \chi_{\{1\}}(x) \cdot f(1) dx = f(1) \cdot \underbrace{\text{Vol}(\{1\})}_{=0} = 0.$$



12.3. Seien $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $M_1 \subset M_2 \subset \dots \subset \mathbb{R}^n$ und

$\bigcup_{k=1}^{\infty} M_k = \mathbb{R}^n$ gegeben. Zeige: Falls $f \cdot \chi_{M_k} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \forall k \in \mathbb{N}$ ist und die Folge $(\int |f \cdot \chi_{M_k}|)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert, so ist $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ und es gilt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} (f \cdot \chi_{M_k})(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx.$$

Beweis:

• Sei zunächst $f \geq 0$. Setze für $k \in \mathbb{N}$: $f_k := f \cdot \chi_{M_k}$. Dann:

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} M_k = \mathbb{R}^n \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x)$$

$$M_k \subset M_{k+1}, f \geq 0 \Rightarrow f_k \leq f_{k+1} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Weiter ist

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} (f \cdot \chi_{M_k})(x) dx \stackrel{f \geq 0}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |f \cdot \chi_{M_k}(x)| dx.$$

Der Grenzwert existiert also nach Voraussetzung. Mit dem Satz von Beppo Levi folgt nun: $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ und

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} (f \cdot \chi_{M_k})(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx.$$

• Sei nun f beliebig. Wir schreiben (vgl. VL) $f = f^+ - f^-$.

$$\Rightarrow f^+, f^- \geq 0 \text{ und } f^+ \cdot \chi_{M_k} = (f_k)^+ \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$$

$$f^- \cdot \chi_{M_k} = (f_k)^- \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$$

(VL + Voraussetzung)

Weiter ist

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f^+ \cdot \chi_{M_k}(x)| dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f \cdot \chi_{M_k}(x)| dx$$

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f^- \cdot \chi_{M_k}(x)| dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f \cdot \chi_{M_k}(x)| dx$$

$\uparrow$ beschränkte Folge, da konvergent

$\Rightarrow$ Die Folgen $(\int |f^+ \cdot \chi_{M_k}|)_{k \in \mathbb{N}}$ und $(\int |f^- \cdot \chi_{M_k}|)_{k \in \mathbb{N}}$ sind konvergent
(da beschränkt und monoton wachsend)

1. Fall
 $\Rightarrow f^+, f^- \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $\int_{\mathbb{R}^n} f^+(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k^+(x) dx,$
 $\int_{\mathbb{R}^n} f^-(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k^-(x) dx$

$\stackrel{VL}{\Rightarrow} f = f^+ - f^- \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f^+(x) dx - \int_{\mathbb{R}^n} f^-(x) dx$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k^+(x) dx - \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k^-(x) dx$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k^+(x) - f_k^-(x) dx$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x) dx$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} (f \cdot \chi_{M_k})(x) dx$$



12.4.

a, Zeige, dass das Integral

$$I := \int_{[0,1]^2} \frac{1}{1-xy} dx dy$$

existiert, und dass $\zeta(2) = I$ gilt.

b, Gib mit dem Integral aus a, einen Beweis für die Formel

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

Beweis:

a, • Wir rechnen zunächst ohne die Existenz des Integrals zu prüfen und ohne weitere Begründungen:

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]^2} \frac{1}{1-xy} dx dy &\stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{geometrische} \\ \text{Reihe}}}{=} \int_{[0,1]^2} \sum_{k=0}^{\infty} (xy)^k dx dy = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{[0,1]^2} x^k y^k dx dy \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_0^1 x^k dx \right) \left(\int_0^1 y^k dy \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k+1} \right) \left(\frac{1}{k+1} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \zeta(2). \end{aligned}$$

• Die Rechnung muss nun gerechtfertigt werden. Von „rechts nach links“ gelesen ergibt sich zunächst die Gültigkeit der Gleichung

$$\zeta(2) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{[0,1]^2} x^k y^k dx dy$$

Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $f_n(x,y) = \sum_{k=0}^n x^k y^k$. Da $x,y \in [0,1]$ ist stets $f_n \leq f_{n+1}$ und wir erhalten:

$$\zeta(2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \int_{[0,1]^2} x^k y^k dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,1]^2} \sum_{k=0}^n x^k y^k dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,1]^2} f_n(x,y) dx dy.$$

Da $\zeta(2) < \infty$, existiert das letzte Integral und der Satz von Beppo Levi ist anwendbar: $\zeta(2) = \int_{[0,1]^2} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x,y) dx dy = \int_{[0,1]^2} \sum_{k=0}^{\infty} (xy)^k dx dy$

Damit ist obige Rechnung gerechtfertigt und gezeigt: Das Integral existiert mit $\zeta(2) = I$.

b, Nach Teil a, genügt es zu zeigen: $I = \frac{\pi^2}{6}$.

• Wir definieren (nach dem Hinweis) die Abbildung

$$\psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (u, v) \quad \text{mit} \quad u = \frac{y+x}{2}, \quad v = \frac{y-x}{2}.$$

$$\Rightarrow \psi(x, y) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{d.h. } \psi \text{ ist linear und offenbar}$$

$$\text{ist } \psi^{-1}(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \quad \text{Insbesondere ist } \psi \text{ ein Diffeomorphismus}$$

Setze $A := \psi([0, 1]^2)$, so folgt:

$$\int_{[0, 1]^2} \frac{1}{1-xy} dx dy = \int_{\psi^{-1}(A)} \frac{1}{1-xy} dx dy = \int_A \frac{1}{1-(u-v)(u+v)} \cdot 2 du dv$$

$$= \int_A \frac{2}{1-u^2+v^2} du dv \quad (*)$$

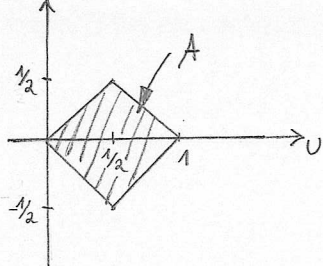
• Berechnen von A:

$$A = \psi([0, 1]^2) = \psi(\{x_1 e_1 + x_2 e_2 \mid x_1, x_2 \in [0, 1]\})$$

$$\xrightarrow{\psi \text{ linear}} \{x_1 \psi(e_1) + x_2 \psi(e_2) \mid x_1, x_2 \in [0, 1]\}$$

$$= \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2 \in [0, 1] \right\}$$

Also:



Da $\frac{2}{1-u^2+v^2}$ symmetrisch bezüglich der u -Achse ist, genügt es das Integral oberhalb dieser Achse zu berechnen. Wir erhalten aus (*):

$$I = \int_{[0, 1]^2} \frac{1}{1-xy} dx dy = 2 \left(\int_0^{1/2} \left(\int_0^u \frac{2}{1-u^2+v^2} dv \right) du + \int_{1/2}^1 \left(\int_0^{1-u} \frac{2}{1-u^2+v^2} dv \right) du \right)$$

$$= 4 \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^u \frac{1}{(\sqrt{1-v^2})^2 + v^2} dv \right) du + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\int_0^{1-u} \frac{1}{(\sqrt{1-v^2})^2 + v^2} dv \right) du \right)$$

• Es ist allgemein:

$$\int_a^b \frac{1}{c^2 + t^2} dt = \int_{\frac{ca}{c}}^{\frac{cb}{c}} \frac{1}{c^2 + t^2} dt \stackrel{t=cs}{=} \int_{\frac{a}{c}}^{\frac{b}{c}} \frac{1}{c^2 + c^2 s^2} c ds = \frac{1}{c} \int_{\frac{a}{c}}^{\frac{b}{c}} \frac{1}{1 + s^2} ds$$

$$= \frac{1}{c} \arctan(s) \Big|_{\frac{a}{c}}^{\frac{b}{c}}$$

• Wegen $\arctan(0) = 0$ folgt damit:

$$I = 4 \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right) du + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right) du \right)$$

• Zum ersten Integral:

$$\frac{d}{du} \left(\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right) \right) = \left(\frac{1}{1 + \frac{u^2}{1-u^2}} \right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} + \frac{u \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot (-2u)}{(1-u^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{1 + \frac{u^2}{1-u^2}} \right) \cdot \left(1 + \frac{u^2}{1-u^2} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right) du = \int_{\arctan\left(\frac{0}{\sqrt{1-0^2}}\right)}^{\arctan\left(\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}}\right)} t dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} t dt$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{6}\right)^2$$

• Zum zweiten Integral:

$$\arctan\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right) = \arctan\left(\sqrt{\frac{1-u}{1+u}}\right) \quad \text{und es ist}$$

$$\frac{d}{du}\left(\arctan\left(\sqrt{\frac{1-u}{1+u}}\right)\right) = \left(\frac{1}{1 + \frac{1-u}{1+u}}\right) \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{\frac{1-u}{1+u}}} \left(\frac{-1}{1+u} - \frac{1-u}{(1+u)^2}\right)\right)$$

$$= \left(\frac{1}{1 + \frac{1-u}{1+u}}\right) \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{\frac{1-u}{1+u}}}\right) \cdot \left(\frac{-1}{1+u}\right) \left(1 + \frac{1-u}{1+u}\right)$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1-u}{1+u}} (1+u)^2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$\Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan\left(\sqrt{\frac{1-u}{1+u}}\right) du = -2 \int_{\arctan\left(\sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}}\right)}^{\arctan\left(\sqrt{\frac{1-1}{1+1}}\right)} t dt = -t^2 \Big|_{\frac{\pi}{6}}^0 = \left(\frac{\pi}{6}\right)^2$$

• Damit erhalten wir:

$$I = 4 \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{6}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{6}\right)^2 \right) = \frac{6\pi^2}{6^2}$$

$$= \frac{\pi^2}{6}$$

$$\Rightarrow \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

