Analysis III, SoSe 2011 – Lösung Blatt 2

2.1. Sei X eine Menge.

a) Zeige, dass $\mathcal{P}(X)$ mit Δ als Addition und $\cap$ als Multiplikation ein kommutativer Ring mit Eins ist.

b) Zeige, dass $\mathcal{J}(\mathbb{R}^n) := \{C \subset \mathbb{R}^n \mid C \text{ ist Jordan-messbar}\} \subset \mathcal{P}(X)$ ein Unterring und das Jordan-Maß $\mathcal{J}(\mathbb{R}^n) \to \overline{\mathbb{R}}$ ein Inhalt ist.

c) Ist $\mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ ein σ-Ring?

Beweis:

a) Entweder direkt nachrechnen oder ein schnelles Argument:
Betrachte den Körper $\mathbb{F}_2 := \{\bar{0}, \bar{1}\}$. Dann ist

$$R := \{f : X \to \mathbb{F}_2\}$$

ein kommutativer Ring mit Eins (bzgl. punktweiser Verknüpfung).
Die Abbildung

$$\Psi : \mathcal{P}(X) \to R, \quad A \mapsto \Psi(A) := \left(x \mapsto \begin{cases} \bar{1} & \text{falls } x \in A \\ \bar{0} & \text{sonst} \end{cases} \right)$$

ist offenbar bijektiv mit

$$\Psi(A \Delta B) = \Psi(A) + \Psi(B) \qquad (\text{da } \bar{1} + \bar{1} = \bar{0} \text{ in } \mathbb{F}_2)$$

und $\Psi(A \cap B) = \Psi(A) \cdot \Psi(B)$.

$\Rightarrow$ $(\mathcal{P}(X), \Delta, \cap)$ ist ein kommutativer Ring mit Eins ($\emptyset$ ist die Null und X die Eins)

b) Da offenbar $\emptyset \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ und $A \Delta A = (A \setminus A) \cup (A \setminus A) = \emptyset \quad \forall A \in \mathcal{P}(X)$ (d.h. jedes Element ist zu sich selbst additiv invers) gilt, genügt es für die Unterring-Eigenschaft nachzuweisen, dass mit $A, B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ auch $A \Delta B$, $A \cap B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ gilt. Dazu genügt es nach Definition von Δ nachzurechnen, dass

$$A \cup B,\ A \setminus B,\ A \cap B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n) \qquad \forall A, B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n) \quad \text{gilt.}$$

Seien also $A, B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ d.h. insbesondere sind A und B beschränkt.

$\Rightarrow$ $A \cup B$, $A \setminus B$ und $A \cap B$ sind beschränkt.

Es genügt also zu zeigen, dass ihre Ränder vom Volumen 0 sind.

$A, B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \partial A, \partial B$ vom Volumen 0 $\Rightarrow$ $\partial A \cup \partial B$ vom Volumen 0.

Für beliebige Mengen $C, D \subset X$ gilt offenbar: $\partial(C \cup D) \subset \partial C \cup \partial D$.

Damit:

- $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B \Rightarrow \partial(A \cup B)$ vom Volumen 0 $\Rightarrow A \cup B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$.
- $\partial(A \cap B) = \partial(A \cap B)^c = \partial(A^c \cup B^c) \subset \partial A^c \cup \partial B^c = \partial A \cup \partial B$
  $\Rightarrow \partial(A \cap B)$ vom Volumen 0 $\Rightarrow A \cap B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$
- $\partial(A \setminus B) = \partial(A \cap B^c) \subset \partial A^c \cup \partial B^c = \partial A \cup \partial B$
  $\Rightarrow \partial(A \setminus B)$ vom Volumen 0 $\Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$

$\Rightarrow$ $\mathcal{J}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{P}(X)$ Unterring.

- Trivialerweise ist $v(\emptyset) = 0$ (wähle z.B. die Nullfunktion und irgendeinen Quader Q).
- Ist $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, so ist für geeignetes Q: $v(A) = \int_Q \underbrace{\chi_A(x)}_{\geq 0} dx \geq 0$.
- Seien nun $A, B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ disjunkt. Offenbar ist

$$\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \underbrace{\chi_{A \cap B}}_{=0} = \chi_A + \chi_B .$$

Damit folgt für geeignetes Q:

$$v(A \cup B) = \int_Q \chi_{A \cup B}(x)\,dx = \int_Q (\chi_A(x) + \chi_B(x))\,dx = \int_Q \chi_A(x)dx + \int_Q \chi_B(x)\,dx$$

$$= v(A) + v(B)$$

$\Rightarrow$ v ist ein Inhalt auf $\mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$.

c) Sei $E = [0,1] \times \ldots \times [0,1] \subset \mathbb{R}^n$. Die Menge $\mathbb{Q}^n$ ist abzählbar

$\Rightarrow$ $E \cap \mathbb{Q}^n$ ist abzählbar.

Sei $\tau : \mathbb{N} \to E \cap \mathbb{Q}^n$ eine Abzählung (d.h. τ bijektiv).

Setze für $k \in \mathbb{N}$

$$A_k := \tau(\{0, \ldots, k\}) .$$

Dann ist $\forall k \in \mathbb{N}$ A_k endlich, d.h. vom Volumen 0 und damit $A_k \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$.

Offenbar ist

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = E \cap \mathbb{Q}^n \qquad \text{(nach Konstruktion)}$$

Da $E \cap \mathbb{Q}^n \subset E$ und $E \setminus (E \cap \mathbb{Q}^n) \subset E$ dicht ist $\chi_{E \cap \mathbb{Q}^n}$ in allen Punkten von E unstetig $\Rightarrow$ $\chi_{E \cap \mathbb{Q}^n} \notin \mathcal{R}(E)$

$$\Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = E \cap \mathbb{Q}^n \notin \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$$

$\Rightarrow$ $\mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ ist kein σ-Ring.

$\blacksquare$

2.2. Sei $N \subset \mathbb{R}^n$ eine Menge vom Maß 0. Zeige, dass $N^c \subset \mathbb{R}^n$ dicht ist.

Beweis:

$\lightning$ N^c ist nicht dicht $\Rightarrow \overline{N^c} \neq \mathbb{R}^n \Rightarrow \exists\, p \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{N^c}$

Da $\overline{N^c}$ abgeschlossen ist, ist $\mathbb{R}^n \setminus \overline{N^c}$ offen.

$\Rightarrow$ $\exists$ offener Quader V mit $p \in V \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{N^c}$ (denn die Maximumsnorm induziert die Topologie des $\mathbb{R}^n$).

$\Rightarrow$ $\exists$ Quader $Q = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ mit $a_i < b_i \;\; \forall i \in \{1, \ldots, n\}$ und $p \in Q \subset V \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{N^c}$.

Für diesen Quader Q gilt $v(Q) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i) > 0$. $\quad (*)$

Da $N^c \subset \overline{N^c}$ ist

$$\mathbb{R}^n \setminus \overline{N^c} \subset \mathbb{R}^n \setminus N^c = \mathbb{R}^n \cap (N^c)^c = \mathbb{R}^n \cap N = N$$

$\Rightarrow Q \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{N^c} \subset N$

Da N nach Voraussetzung vom Maß 0 ist und $Q \subset N$ gilt, folgt dass Q vom Maß 0 ist.

Da Q Kompakt, ist Q also vom Volumen 0, d.h. $v(Q) = 0$ $\lightning$ zu $(*)$.

$N^c \subset \mathbb{R}^n$ muss also doch dicht sein.

$\blacksquare$

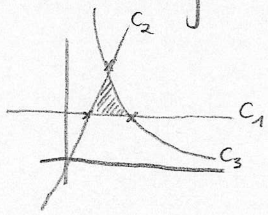
2.3. Berechne den Inhalt der Menge $B \subset [0,\infty) \times [0,\infty) \subset \mathbb{R}^2$, welche von den Kurven $y = 1$, $y = 4x$ und $y = \frac{1}{x}$ begrenzt wird.

Dazu:

$$C_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1\}, \quad C_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 4x\}, \quad C_3 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \tfrac{1}{x}\}$$

$$C_1 \cap C_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1,\ y = 4x\} = \{(\tfrac{1}{4}, 1)\}$$

Anschauung:



$$C_1 \cap C_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1,\ y = \tfrac{1}{x}\} = \{(1,1)\}$$

$$C_2 \cap C_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 4x,\ y = \tfrac{1}{x}\} \underset{\substack{4x^2 = 1 \\ \Leftrightarrow\ x = \frac{1}{2},\ x = -\frac{1}{2}}}{=} \{(\tfrac{1}{2}, 2), \underbrace{(-\tfrac{1}{2}, -2)}_{\notin B}\}$$

$\Rightarrow$ Für Punkte $(x,y) \in B$ ist $1 \leq y \leq 2$, x wird (abhängig von y) durch C_2 von links und durch C_3 von rechts begrenzt.

$$\Rightarrow \quad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq y \leq 2,\ \tfrac{y}{4} \leq x \leq \tfrac{1}{y}\} \subset [\tfrac{1}{4}, 1] \times [1,2] =: Q$$

Damit:

$$v(B) = \int_Q \chi_B(x,y)\, d(x,y) = \int_1^2 \left(\int_{\frac{1}{4}}^{1} \chi_B(x,y)\, dx \right) dy = \int_1^2 \left(\int_{\frac{y}{4}}^{\frac{1}{y}} 1\, dx \right) dy$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{1}{y} - \frac{y}{4} \right) dy = \int_1^2 \frac{1}{y}\, dy - \int_1^2 \frac{y}{4}\, dy$$

$$= \ln(2) - \ln(1) - \frac{2^2}{8} + \frac{1^2}{8}$$

$$= \ln(2) - \frac{3}{8}$$

$\blacksquare$

2.4. Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader und $\mathcal{R}(Q)$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der Riemann-integrierbaren Funktionen auf Q.

a) Zeige, dass

$$\mathcal{R}(Q) \times \mathcal{R}(Q) \to \mathbb{R}, \quad (f,g) \mapsto \langle f | g \rangle := \int_Q f(x)\,g(x)\,dx$$

wohldefiniert und kein Skalarprodukt ist.

b) Sei $\mathcal{N} := \{ f \in \mathcal{R}(Q) \mid \exists B \subset Q \text{ vom Maß } 0 \text{ mit } f(x) = 0 \ \forall x \in Q \setminus B \}$.
Zeige, dass $\mathcal{N} \subset \mathcal{R}(Q)$ ein Untervektorraum und

$$\mathcal{R}(Q)/_{\mathcal{N}} \times \mathcal{R}(Q)/_{\mathcal{N}} \to \mathbb{R}, \quad ([f],[g]) \mapsto \langle [f] | [g] \rangle := \int_Q f(x)\,g(x)\,dx$$

wohldefiniert und ein Skalarprodukt ist.

Beweis:

a) Für die Wohldefiniertheit muss gezeigt werden: $f, g \in \mathcal{R}(Q) \Rightarrow f \cdot g \in \mathcal{R}(Q)$.
Schreibe dazu:

$$\begin{aligned} f \cdot g &= \tfrac{1}{4} \cdot 4fg = \tfrac{1}{4}\left(f^2 + 2fg + g^2 - f^2 + 2fg - g^2\right) \\ &= \tfrac{1}{4}\left((f+g)^2 - (f^2 - 2fg + g^2)\right) \\ &= \tfrac{1}{4}\left((f+g)^2 - (f-g)^2\right) \end{aligned}$$

Da $\mathcal{R}(Q)$ $\mathbb{R}$-Vektorraum, ist $f+g \in \mathcal{R}(Q)$, nach 1.1. c) dann $(f+g)^2 \in \mathcal{R}(Q)$, usw. Insgesamt: $f \cdot g \in \mathcal{R}(Q)$.

Sei nun $p \in Q$ irgendein Punkt. Dann ist $\chi_{\{p\}} \in \mathcal{R}(Q)$ mit

$$\langle \chi_{\{p\}} | \chi_{\{p\}} \rangle = \int_Q \chi_{\{p\}}(x) \cdot \chi_{\{p\}}(x)\,dx = \int_Q \chi_{\{p\}}(x)\,dx \underset{\uparrow}{=} 0$$

$\{p\}$ offenbar vom Volumen 0.

Da $\chi_{\{p\}} \neq 0$ folgt, dass $\langle \, | \, \rangle$ kein Skalarprodukt auf $\mathcal{R}(Q)$ ist (es ist nicht positiv definit).

b) • $\mathcal{N} \subset \mathcal{R}(Q)$ Untervektorraum.

- $\mathcal{N} \neq \emptyset$, da $0 \in \mathcal{N}$ (für beliebiges B vom Maß 0)
- $f \in \mathcal{N}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Sei B_f „passende" Menge vom Maß 0. Dann:

  $\lambda \cdot f \in \mathcal{R}(Q)$ und für $x \in Q \setminus B_f$: $\lambda \cdot f(x) = \lambda \cdot 0 = 0$

  $\Rightarrow \lambda \cdot f \in \mathcal{N}$
- $f, g \in \mathcal{N}$. Seien B_f, B_g passende Mengen vom Maß 0. Dann:

  $B := B_f \cup B_g$ vom Maß 0, $f+g \in \mathcal{R}(Q)$ und für $x \in Q \setminus B$,

  d.h. $x \notin B_f$ und $x \notin B_g$: $f(x) + g(x) = 0 + 0 = 0$.

  $\Rightarrow f \in \mathcal{N}$

Insgesamt: $\mathcal{N} \subset \mathcal{R}(Q)$ Untervektorraum.

• Behauptung: $f \in \mathcal{R}(Q)$, $g \in \mathcal{N} \Rightarrow f \cdot g \in \mathcal{N}$

Sei B_g passende Menge vom Maß 0. Nach Teil a) ist $f \cdot g \in \mathcal{R}(Q)$

und für $x \in Q \setminus B_g$: $f(x) \cdot g(x) = f(x) \cdot 0 = 0$

$\Rightarrow f \cdot g \in \mathcal{N}$

• Behauptung: $f \in \mathcal{N} \Rightarrow \int_Q f(x)\, dx = 0$

Sei $B \subset Q$ die zu f „passende" Menge vom Maß 0.

2.2 $\Rightarrow B^c$ ist dicht im $\mathbb{R}^n$.

Nach Voraussetzung stimmt f auf $Q \setminus B$ mit der Nullfunktion überein. Im Argument von Aufgabe 1.2. a) werden nur offene Mengen $O \subset Q$ verwendet, die auch im $\mathbb{R}^n$ offen sind. Mit exakt demselben Argument folgt also wegen der Dichtheit von B^c im $\mathbb{R}^n$:

$$\int_Q f(x)dx = \int_Q 0\, dx = 0$$

d.h. die Behauptung.

- Wohldefiniertheit der Abbildung

Seien $[f]=[\bar{f}]$, $[g]=[\bar{g}] \in \mathcal{R}(Q)/\mathcal{N}$, d.h. $\bar{f}=f+h_1$, $\bar{g}=g+h_2$ für gewisse $h_1, h_2 \in \mathcal{N}$. Damit:

$$\langle [\bar{f}] \mid [\bar{g}] \rangle = \int_Q \bar{f}(x)\bar{g}(x)dx = \int_Q (f(x)+h_1(x))(g(x)+h_2(x))dx$$

$$= \int_Q f(x)g(x)dx + \underbrace{\int_Q f(x)h_2(x)dx}_{=0 \text{ da } f\cdot h_2 \in \mathcal{N}} + \underbrace{\int_Q h_1(x)g(x)dx}_{=0 \text{ da } g\cdot h_1 \in \mathcal{N}} + \underbrace{\int_Q h_1(x)h_2(x)dx}_{=0 \text{ da } h_1\cdot h_2 \in \mathcal{N}}$$

$$= \int_Q f(x)g(x)dx = \langle [f] \mid [g] \rangle$$

- Symmetrie

$$\langle [f] \mid [g] \rangle = \int_Q f(x)g(x)dx = \int_Q g(x)f(x)dx = \langle [g] \mid [f] \rangle \quad \forall [f],[g] \in \mathcal{R}(Q)/\mathcal{N}$$

- Bilinearität (genügt wg. Symmetrie: Linearität im 1. Argument)

Seien $[f],[g],[h] \in \mathcal{R}(Q)/\mathcal{N}$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\langle \lambda[f]+\mu[g] \mid [h] \rangle = \langle [\lambda f+\mu g] \mid [h] \rangle = \int_Q (\lambda f(x)+\mu g(x))h(x)dx$$

$$= \int_Q \lambda f(x)h(x)+\mu g(x)h(x)\,dx = \lambda\int_Q f(x)h(x)dx + \mu\int_Q g(x)h(x)dx$$

$$= \lambda \langle [f] \mid [h] \rangle + \mu \langle [g] \mid [h] \rangle$$

- Positive Definitheit

Zunächst: $\langle [f] \mid [f] \rangle = \int_Q \underbrace{f(x)f(x)}_{\geq 0}dx \geq \int_Q 0\,dx = 0.$

und $\langle [0] \mid [0] \rangle = \int_Q 0\,dx = 0$.

Ist nun $0 = \langle [f] \mid [f] \rangle = \int_Q f(x)\cdot f(x)dx = \int_Q f^2(x)dx$, so ist folgt aus Aufgabe 1.4 die Existenz einer Menge $B \subset Q$ vom Maß 0 mit $f^2(x)=0$ $\forall x \in Q\setminus B$. Also ist $f(x)=0$ $\forall x \in Q\setminus B$, d.h. $f \in \mathcal{N}$.

$\Rightarrow [f]=[0]$. ∎