

Analysis III, SoSe 2011 - Lösung Blatt 3

3.1. Setze für $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$C_k := \bigcup \left\{ \left[0, \frac{1}{3^k}\right] + \sum_{j=1}^k \frac{a_j}{3^j} \mid a_j \in \{0, 2\} \right\}.$$

Sei $C := \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k$ („Cantorsches Diskontinuum“).

Zeige, dass C kompakt, überabzählbar und vom Maß 0 ist.

Beweis:

• C_k ist als endliche Vereinigung abgeschlossener Mengen selbst abgeschlossen.

$\Rightarrow C$ als Schnitt abgeschlossener Mengen selbst abgeschlossen.

Weiter ist stets $C_k \subset [0, 1]$: Offenbar ist $C_k \subset \left[0, \frac{1}{3^k} + \sum_{j=1}^k \frac{2}{3^j}\right]$. Da

$$\frac{1}{3^k} + \sum_{j=1}^k \frac{2}{3^j} = \frac{1}{3^k} + 2 \cdot \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{3^{j+1}} = \frac{1}{3^k} + \frac{2}{3} \left(\frac{1 - (\frac{1}{3})^k}{1 - \frac{1}{3}} \right) = \frac{1}{3^k} + 1 - \frac{1}{3^k} = 1$$

folgt die Aussage.

$\Rightarrow C \subset [0, 1]$ d.h. C ist beschränkt.

$\xRightarrow[\text{Borel}]{\text{Heine}}$ C ist kompakt.

• Es ist $C = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k \subset C_j \quad \forall j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Sei $\varepsilon > 0$. Da $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 0$

gilt, $\exists j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ mit $\left(\frac{2}{3}\right)^j < \varepsilon$. Es ist $C \subset C_j$ wobei C_j aus 2^j

Quadern $Q_{j,n} = \left[\sum_{i=1}^j \frac{a_{i,n}}{3^i}, \frac{1}{3^j} + \sum_{i=1}^j \frac{a_{i,n}}{3^i} \right]$ besteht. Für alle diese

Quader ist offenbar

$$v(Q_{j,n}) = \frac{1}{3^j}.$$

Also ist

$$C \subset \bigcup_{n=1}^{2^j} Q_{j,n} \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{2^j} v(Q_{j,n}) = 2^j \cdot \frac{1}{3^j} = \left(\frac{2}{3}\right)^j < \varepsilon$$

$\Rightarrow C$ ist vom Volumen 0 also auch vom Maß 0.

• Sei $M := \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{3^j} \mid a_j \in \{0, 2\} \right\}$.

- Behauptung: $M \subset \mathbb{C}$ (Bemerkung: Es gilt sogar Gleichheit - hier nicht erforderlich.)

Sei dazu $x \in M$, d.h. $x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{3^j}$ für gewisse $a_j \in \{0, 2\}$.

Sei $K \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ beliebig. Dann:

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{3^j} = R + \sum_{j=1}^K \frac{a_j}{3^j} \quad \text{wobei} \quad R := \sum_{j=K+1}^{\infty} \frac{a_j}{3^j}$$

Offenbar ist

$$\begin{aligned} 0 \leq R &\leq \sum_{j=K+1}^{\infty} \frac{2}{3^j} = 2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{3^{j+K+1}} = \frac{2}{3^{K+1}} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^j = \frac{2}{3^{K+1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} \\ &= \frac{2}{3^{K+1}} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{3^K} \end{aligned}$$

d.h. $R \in [0, \frac{1}{3^K}] \Rightarrow x \in C_K$.

Da K beliebig war, folgt $x \in \bigcap_{K=1}^{\infty} C_K = \mathbb{C}$, d.h. $M \subset \mathbb{C}$.

- Behauptung: M ist überabzählbar (und damit auch $\mathbb{C}$).

Dazu betrachten wir folgende Abbildungen („ $\simeq$ “ bedeutet bijektiv, „ $\twoheadrightarrow$ “ surjektiv)

$$\begin{array}{ccccccc} M & \xrightarrow{\sim} & \{0, 2\}^{\mathbb{N}} & \xrightarrow{\sim} & \{0, 1\}^{\mathbb{N}} & \twoheadrightarrow & \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{b_j}{2^j} \mid b_j \in \{0, 1\} \right\} = [0, 1] \\ & \nearrow & \text{3-adische Entwicklung,} & & & & \nearrow \text{2-adische Entwicklung} \\ & & 1 \notin \{0, 2\} & & & & \end{array}$$

$\Rightarrow \exists$ Teilmenge $N \subset M$ mit $N \twoheadrightarrow [0, 1]$. Also ist N und damit auch M überabzählbar.



3.2. Auf dem Raum $\mathcal{C}([-1,1])$ werden durch

$$\|f\|_{\mathcal{C}^0} := \sup\{|f(x)| \mid x \in [-1,1]\} \text{ und } \|f\|_{L_2} := \left(\int_{-1}^1 (f(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

zwei Normen definiert. Zeige:

a) $\exists K > 0$ mit $\|f\|_{L_2} \leq K \|f\|_{\mathcal{C}^0} \quad \forall f \in \mathcal{C}([-1,1])$

b) $\nexists K > 0$ mit $\|f\|_{\mathcal{C}^0} \leq K \|f\|_{L_2} \quad \forall f \in \mathcal{C}([-1,1])$

Beweis:

a) Setze $K := \sqrt{2} > 0$. Dann folgt für $f \in \mathcal{C}([-1,1])$:

$$f(x) \leq \|f\|_{\mathcal{C}^0} \quad \forall x \in [-1,1] \Rightarrow (f(x))^2 \leq \|f\|_{\mathcal{C}^0}^2 \quad \forall x \in [-1,1]$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|f\|_{L_2} &= \left(\int_{-1}^1 (f(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_{-1}^1 \|f\|_{\mathcal{C}^0}^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \underbrace{\left(\int_{-1}^1 1 dx \right)^{\frac{1}{2}}}_{=\sqrt{2}} \|f\|_{\mathcal{C}^0} \\ &= K \|f\|_{\mathcal{C}^0} \end{aligned}$$

b) Sei $\varepsilon > 0$ und $f_\varepsilon: [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \left(\max\left\{0, \frac{1}{\varepsilon} \left(1 - \frac{|x|}{\varepsilon}\right)\right\} \right)^{\frac{1}{2}}$

Da $\max\{a,b\} = \frac{a+b+|a-b|}{2}$ also stetig in a und b , ist

$$f_\varepsilon \in \mathcal{C}([-1,1]).$$

Da $\varepsilon > 0$ ist, wird f_ε für $|x| = 0$ maximal, d.h.

$$\|f_\varepsilon\|_{\mathcal{C}^0} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Wir wollen $\|f_\varepsilon\|_{L_2}$ berechnen und stellen zunächst fest:

$$\frac{1}{\varepsilon} \left(1 - \frac{|x|}{\varepsilon}\right) < 0 \Leftrightarrow \left(1 - \frac{|x|}{\varepsilon}\right) < 0 \Leftrightarrow 1 < \frac{|x|}{\varepsilon}$$

$$\Leftrightarrow |x| > \varepsilon.$$

Damit können wir für ε mit $0 < \varepsilon < 1$ berechnen:

$$\begin{aligned}\|f_\varepsilon\|_{L_2}^2 &= \int_{-1}^1 \max\left\{0, \frac{1}{\varepsilon}\left(1 - \frac{|x|}{\varepsilon}\right)\right\} dx = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon}\left(1 - \frac{|x|}{\varepsilon}\right) dx \\&= \frac{2}{\varepsilon} \int_0^{\varepsilon} \left(1 - \frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \frac{2}{\varepsilon} \left(\int_0^{\varepsilon} 1 dx - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\varepsilon} x dx \right) \\&= \frac{2}{\varepsilon} \left(\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\varepsilon^2}{2} \right) = \frac{2}{\varepsilon} \cdot \frac{\varepsilon}{2} = 1\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|f_\varepsilon\|_{L_2} = 1.$$

Nun können wir folgendermaßen argumentieren:

$$\nexists K > 0 \text{ mit } \|f\|_{C^0} \leq K \|f\|_{L_2} \quad \forall f \in \mathcal{C}([-1, 1]).$$

Da $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \infty$ gilt, $\exists \varepsilon > 0$, nach geeigneter Verkleinerung, sogar mit $0 < \varepsilon < 1$ so dass $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} > K$ gilt. Dann folgt:

$$\|f_\varepsilon\|_{C^0} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} > K = K \cdot 1 = K \cdot \|f_\varepsilon\|_{L_2} \quad \begin{array}{l} \text{⚡} \\ \text{da } f_\varepsilon \in \mathcal{C}([-1, 1]) \end{array}$$

Also existiert kein solches K .



3.3. Der Raum $\mathcal{C}([0,2])$ sei mit der Norm

$$\|f\|_{L_2} := \left(\int_0^2 (f(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

versehen. Zeige, dass $(\mathcal{C}([0,2]), \|\cdot\|_{L_2})$ kein Banachraum ist.

Beweis:

Setze für $k \in \mathbb{N}$ $f_k: [0,2] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} x^k & \text{falls } x \in [0,1] \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$.

$\Rightarrow f_k \in \mathcal{C}([0,2])$.

• Behauptung: $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge in $(\mathcal{C}([0,2]), \|\cdot\|_{L_2})$.

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $N \in \mathbb{N}$ so, dass $\left(\frac{1}{N + \frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon$ gilt

(möglich, da $\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{N + \frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = 0$).

Sei $n \geq m \geq N$ beliebig.

$$\begin{aligned} \|f_n - f_m\|_{L_2}^2 &= \int_0^2 (f_n(x) - f_m(x))^2 dx = \int_0^1 (x^n - x^m)^2 dx + \underbrace{\int_1^2 (1-1)^2 dx}_{=0} \\ &= \int_0^1 x^{2n} dx - \int_0^1 2x^{n+m} dx + \int_0^1 x^{2m} dx \\ &= \frac{1}{2n+1} - \underbrace{\frac{2}{n+m+1}}_{\geq 0} + \frac{1}{2m+1} \leq \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2m+1} \\ &\leq \frac{2}{2N+1} = \frac{1}{N + \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Also gilt für alle $n \geq m \geq N$:

$$\|f_n - f_m\|_{L_2} \leq \left(\frac{1}{N + \frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon$$

d.h. $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge.

• Behauptung: $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert nicht in $(\mathcal{C}([0,2]), \|\cdot\|_{L_2})$.

Idee: Bette $(\mathcal{C}([0,2]), \|\cdot\|_{L_2})$ in einen Raum ein, in dem $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert. $\mathcal{C}([0,2]) \subset \mathcal{R}([0,2])$ funktioniert nicht, da nach Aufgabe 2.4. a), $\|\cdot\|_{L_2}$ keine Norm auf $\mathcal{R}([0,2])$ definiert (positive Definitheit verletzt). Wir suchen also einen kleineren Raum.

Setze $f: [0,2] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in [0,1) \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$

$\Rightarrow f \notin \mathcal{C}([0,2])$ aber $f \in \mathcal{R}([0,2])$. f ist der „erwartete Grenzwert“ von $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

Definiere nun $V := \text{Lin}(\mathcal{C}([0,2]) \cup \{f\}) \Rightarrow V$ ist ein Vektorraum mit $\mathcal{C}([0,2]) \subset V \subset \mathcal{R}([0,2])$.

$\|\cdot\|_{L_2}$ sei auf V definiert, indem die Abbildung $f \mapsto \sqrt{\langle f|f \rangle}$ aus Aufgabe 2.4. a), auf V eingeschränkt wird. Dann ist $\|\cdot\|_{L_2}$ auf V eine Fortsetzung der Norm $\|\cdot\|_{L_2}$ auf $\mathcal{C}([0,2])$. Wir zeigen, dass $\|\cdot\|_{L_2}$ auch auf V eine Norm ist, d.h. die positive Definitheit. Sei dazu $h \in V$ mit $\|h\|_{L_2} = 0$. $h \in V \Rightarrow h = g + \alpha f$ für ein $g \in \mathcal{C}([0,2])$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^2 (h(x))^2 dx = \int_0^1 \underbrace{(g(x) + \alpha f(x))^2}_{=0} dx + \int_1^2 \underbrace{(g(x) + \alpha f(x))^2}_{=1} dx \\ &= \underbrace{\int_0^1 (g(x))^2 dx}_{\geq 0} + \underbrace{\int_1^2 (g(x) + \alpha)^2 dx}_{\geq 0} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 (g(x))^2 dx = 0 \quad \overset{g \text{ stetig}}{\Rightarrow} g(x) = 0 \quad \forall x \in [0,1]$$

$$\int_1^2 (g(x) + \alpha)^2 dx = 0 \quad \overset{g+\alpha \text{ stetig}}{\Rightarrow} g(x) + \alpha = 0 \quad \forall x \in [1,2]$$

$$\text{d.h. } g(x) = -\alpha \quad \forall x \in [1,2]$$

$g \stackrel{\text{stetig}}{\Rightarrow} a = 0$ und damit auch $g = 0$

$$\Rightarrow h = g + af = 0$$

d.h. $\|\cdot\|_{L_2}$ ist Norm auf V . Wir zeigen nun, dass $f_k \rightarrow f$ in V gilt.

$$\begin{aligned}\|f_k - f\|_{L_2} &= \left(\int_0^2 (f_k(x) - f(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^1 x^{2k} dx - \int_1^2 (1-1)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{1}{2k+1} \right)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.\end{aligned}$$

Also gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = f$ in $(V, \|\cdot\|_{L_2})$. Damit:

$\nearrow (\mathcal{C}([0,2]), \|\cdot\|_{L_2})$ vollständig. $\Rightarrow \exists \tilde{f} \in \mathcal{C}([0,2])$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = \tilde{f}$.

$\Rightarrow$ In V gelesen gilt $\tilde{f} = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k = f$ d.h. $f \in \mathcal{C}([0,2])$ ⚡.

Also ist $(\mathcal{C}([0,2]), \|\cdot\|_{L_2})$ nicht vollständig, d.h. kein Banachraum. ■

3.4. Berechne folgende Integrale:

a) $\int_A x^2 d(x,y)$ für $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\}$

b) $\int_B xyz d(x,y,z)$ für $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq y \leq z \leq 1\}$

Dazu:

a) $A \subset [-1,1] \times [-1,1] =: Q \Rightarrow$

$$\begin{aligned}\int_A x^2 d(x,y) &= \int_Q \chi_A(x,y) \cdot x^2 d(x,y) = \int_{-1}^1 \left(\underbrace{\int_{-1}^1 \chi_A(x,y) \cdot x^2 dx}_{=0 \text{ für } |x| > 1-|y|} \right) dy \\&= \int_{-1}^1 \left(\int_{|y|-1}^{1-|y|} x^2 dx \right) dy = \int_{-1}^1 \left(\frac{(1-|y|)^3}{3} - \frac{(|y|-1)^3}{3} \right) dy \\&= \frac{1}{3} \left(\int_{-1}^1 (1-|y|)^3 dy + \int_{-1}^1 (1-|y|)^3 dy \right) \\&= \frac{4}{3} \int_0^1 (1-y)^3 dy = -\frac{4}{3} \int_1^0 y^3 dy = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

b) $B \subset [0,1]^3 =: Q \Rightarrow$

$$\begin{aligned}\int_B xyz d(x,y,z) &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 \chi_B(x,y,z) \cdot xyz dx \right) dy \right) dz \\&= \int_0^1 \left(\int_0^z \left(\int_0^y x \cdot y \cdot z dx \right) dy \right) dz \\&= \int_0^1 \left(\int_0^z \frac{y^3 \cdot z}{2} dy \right) dz = \int_0^1 \frac{z \cdot z^4}{2 \cdot 4} dz = \int_0^1 \frac{z^5}{8} dz \\&= \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{48}.\end{aligned}$$

