

Analysis III, SoSe 2011 - Lösung Blatt 5

5.1. Sei $f: [0,1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{für } 0 < y < x \\ -\frac{1}{y^2} & \text{für } 0 < x < y \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Zeige: $f|_{[p,1]^2} \in \mathcal{R}([p,1]^2) \quad \forall 0 < p < 1$ und

$$\lim_{p \rightarrow 0} \int_{[p,1]^2} f(x,y) d(x,y) = 0$$

b) Zeige: $y \mapsto f(x,y) \in \mathcal{R}([0,1]) \quad \forall x \in [0,1]$ und $x \mapsto f(x,y) \in \mathcal{R}([0,1]) \quad \forall y \in [0,1]$ mit

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y) dx \right) dy \neq \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y) dy \right) dx.$$

Beweis:

a) • $(x,y) \mapsto \frac{1}{x^2}$ und $(x,y) \mapsto \frac{1}{y^2}$ sind stetig auf der kompakten Menge $[p,1]^2$ (da $p > 0$). $\Rightarrow \exists M > 0$ mit

$$|f(x,y)| \leq M \quad \forall (x,y) \in [p,1]^2$$

d.h. $f|_{[p,1]^2}$ ist beschränkt. Die Menge der Unstetigkeitsstellen ist

$$[p,1]^2 \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x=y\}$$

und damit offenbar vom Maß 0 (enthalten in einer Hyperebene).

Lebesgue.

$\Rightarrow f|_{[p,1]^2} \in \mathcal{R}([p,1]^2)$. (insb. ist Fubini zum Berechnen anwendbar!)

$$\begin{aligned} \int_{[p,1]^2} f(x,y) d(x,y) &= \int_p^1 \int_p^1 f(x,y) dx dy = \int_p^1 \left(\int_p^y -\frac{1}{y^2} dx + \int_y^1 \frac{1}{x^2} dx \right) dy \\ &= \int_p^1 \left(-\frac{1}{y^2} (y-p) + \left(-\frac{1}{x} \Big|_y^1 \right) \right) dy \\ &= \int_p^1 \left(\frac{p}{y^2} - \frac{1}{y} - 1 + \frac{1}{y} \right) dy = \int_p^1 \left(\frac{p}{y^2} - 1 \right) dy \end{aligned}$$

$$= p \left(-\frac{1}{y} \Big|_p^1 \right) - (1-p) = -p + 1 - 1 + p = 0.$$

Damit:

$$\lim_{p \rightarrow 0} \int_{[p,1]^2} f(x,y) d(x,y) = \lim_{p \rightarrow 0} 0 = 0.$$

b) • Sei $x \in [0,1]$, $f_x := (y \mapsto f(x,y))$. Falls $x=0$, ist $f_x \equiv 0$ also $f_x \in \mathcal{R}([0,1])$. Sei also $x > 0$. Die Menge der Unstetigkeitsstellen ist $\{0, x\}$ also vom Maß 0. Auf dem Intervall $(0,x)$ ist f_x konstant mit Wert $\frac{1}{x^2}$.

Auf dem kompakten Intervall $[x,1]$ ist $y \mapsto -\frac{1}{y^2}$ stetig (da $x > 0$!) also beschränkt. Da $f_x|_{[x,1]} \equiv (y \mapsto -\frac{1}{y^2})$ ist f_x auch auf $(x,1]$ beschränkt, d.h. f_x ist in $[0,1]$ beschränkt. $\Rightarrow f_x \in \mathcal{R}([0,1])$.

• Sei $y \in [0,1]$, $f_y := (x \mapsto f(x,y))$. Mit völlig analoger Argumentation folgt: $f_y \in \mathcal{R}([0,1])$.

• Berechne iterierte Integrale:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y) dx \right) dy &= \int_0^1 \left(\int_0^y -\frac{1}{y^2} dx + \int_y^1 \frac{1}{x^2} dx \right) dy \\ &= \int_0^1 \left(-\frac{1}{y^2} (y-0) + \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_y^1 \right) dy = \int_0^1 \left(-\frac{1}{y} - 1 + \frac{1}{y} \right) dy \\ &= \int_0^1 -1 dy = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y) dy \right) dx &= \int_0^1 \left(\int_0^x \frac{1}{x^2} dy + \int_x^1 -\frac{1}{y^2} dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{x^2} (x-0) + \left(\frac{1}{y} \right) \Big|_x^1 \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{x} + 1 - \frac{1}{x} \right) dx \\ &= \int_0^1 1 dx = 1. \end{aligned}$$

5.2. a) Sei $\rho: [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ stetig und

$$\mathcal{R}_\rho^n := \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times [a, b] \mid \| (x_1, \dots, x_{n-1}) \|_2^2 \leq \rho(x_n)^2 \}.$$

Zeige, dass $\mathcal{R}_\rho^n$ Jordan-messbar ist, mit

$$\text{Vol}(\mathcal{R}_\rho^n) = \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2} + 1)} \int_a^b \rho(t)^{n-1} dt.$$

b) Berechne für $h > 0$ das Volumen des Kegels

$$K_h := \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_n \leq h, \| (x_1, \dots, x_{n-1}) \|_2^2 \leq x_n^2 \}$$

Beweis:

a) Betrachte $Z_n: \mathbb{R}_{\geq 0} \times (-\pi, \pi) \times (0, \pi)^{n-3} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus (-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{n-2}$,

$$(r, \phi, \theta_1, \dots, \theta_{n-3}, x_n) \mapsto (P_{n-1}(r, \phi, \theta_1, \dots, \theta_{n-3}), x_n) \quad (\text{Zylinderkoordinaten!}).$$

Da nach 4.1. P_{n-1} auf dem entsprechenden Definitionsbereich ein $\mathcal{C}^1$ -Diffeomorphismus ist, ist offenbar Z_n ein $\mathcal{C}^1$ -Diffeomorphismus mit

$$|\det DZ_n(r, \phi, \theta_1, \dots, \theta_{n-3}, x_n)| = |\det DP_{n-1}(r, \phi, \theta_1, \dots, \theta_{n-3})| = r^{n-2} \prod_{j=1}^{n-3} (\sin \theta_j).$$

Dehne Z_n (auf offensichtliche Weise) aus: $Z_n: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (stetig diffbar).

$$\mathcal{D} := \{ (r, \phi, \theta_1, \dots, \theta_{n-3}, x_n) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times [-\pi, \pi] \times [0, \pi]^{n-3} \times [a, b] \mid r \leq \rho(x_n) \}.$$

$$\Rightarrow Z_n(\mathcal{D}) = \mathcal{R}_\rho^n \quad (\text{offenbar})$$

• Zeige: $\mathcal{D}$ ist Jordan-messbar. Dann (VL!) $\mathcal{R}_\rho^n = Z_n(\mathcal{D})$ Jordan-messbar (Z_n ist $\mathcal{C}^1$ -Diffeom.).

$$\text{Setze } Q := \{ (r, x_n) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times [a, b] \mid r \leq \rho(x_n) \}.$$

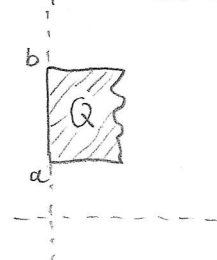
Es genügt zu zeigen, dass Q Jordan-messbar ist. Setze

$$\Gamma(\rho) := \{ (r, x_n) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times [a, b] \mid r = \rho(x_n) \}$$

ρ stetig $\Rightarrow Q$ beschränkt. Genügt zu zeigen: ∂Q vom Maß 0. Es ist:

$$\partial Q \subset \mathbb{R} \times \{a\} \cup \mathbb{R} \times \{b\} \cup \{0\} \times \mathbb{R} \cup \Gamma(\rho)$$

$\uparrow$
 $\uparrow$
 $\uparrow$
c Hyperebene, also vom Maß 0.



Genügt also zu zeigen: $\Gamma(\rho)$ vom Maß 0.

Sei $\varepsilon > 0$. ρ stetig $\Rightarrow \rho$ integrierbar $\Rightarrow \exists$ Partition P von $[a, b]$ mit

$$S(f, P) - s(f, P) \leq \varepsilon, \text{ d.h. } \sum_{S \in P(Q)} (M_S f - m_S f) \text{Vol}(S) \leq \varepsilon.$$

Sehe für $S \in P(Q)$: $W_S = [m_S f, M_S f] \times S \Rightarrow W_S$ Quader mit

$$\Gamma(\rho) \subset \bigcup_{S \in P(Q)} W_S \quad \text{und} \quad \sum_{S \in P(Q)} \text{Vol}(W_S) = \sum_{S \in P(Q)} (M_S f - m_S f) \text{Vol}(S) \leq \varepsilon.$$

$\Rightarrow \Gamma(\rho)$ vom Volumen 0, d.h. D ist Jordan-messbar.

- Damit lässt sich das Volumen mit Hilfe der Zylinderkoordinaten leicht berechnen:

$$\text{Vol}(\mathcal{R}_\rho^n) = \int_{\mathcal{R}_\rho^n} 1 dy = \int_{Z_n(D)} 1 dy = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{[0, \pi]^{n-3}} \int_a^b \int_0^{\rho(x_n)} s^{n-2} \prod_{j=1}^{n-3} (\sin \theta_j)^j ds dx_n d\phi d\theta_1 \dots d\theta_{n-3}$$

$$= \underbrace{\left(\int_{-\pi}^{\pi} \int_{[0, \pi]^{n-3}} \prod_{j=1}^{n-3} (\sin \theta_j)^j d\phi d(\theta_1, \dots, \theta_{n-3}) \right)}_{= (n-1) \cdot \text{Vol}(\mathcal{B}_1^{n-1}) \text{ vgl. ÜA 4.2.}} \cdot \int_a^b \int_0^{\rho(x_n)} s^{n-2} ds dx_n$$

$$= (n-1) \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2} + 1)} \int_a^b \frac{\rho(x_n)^{n-1}}{n-1} dx_n$$

$$= \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2} + 1)} \int_a^b \rho(t)^{n-1} dt.$$

b) Wähle $[a, b] = [0, h]$ und $\rho = \text{id}$. Dann folgt mit a):

$$\text{Vol}(K_n) = \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2} + 1)} \int_0^h t^{n-1} dt$$

$$= \frac{h^n}{n} \cdot \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2} + 1)} = \frac{h}{n} \cdot \frac{h^{n-1} \pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2} + 1)} = \frac{h}{n} \cdot \text{Vol}(\mathcal{B}_h^{n-1}).$$

5.3. Berechne den Inhalt der Figuren, die von folgenden Kurven begrenzt werden:

$$a) \quad (x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2), \quad a \in \mathbb{R}$$

$$b) \quad (x^2 + y^2)^2 = 2ax^3, \quad a > 0$$

Dazu:

a) Die Fläche ist offenbar symmetrisch zur x - und y -Achse - es genügt also ihren Inhalt in $(\mathbb{R}_{\geq 0})^2$ zu berechnen. Die entsprechende Fläche sei mit A bezeichnet.

Seien $\rho_{\mathbb{R}^2}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (r, \phi) \mapsto (r \cos \phi, r \sin \phi)$ die Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^2$. Die Kurve schreibt sich in $(\mathbb{R}_{\geq 0})^2$ um in:

$$(r^2 \cos^2 \phi + r^2 \sin^2 \phi)^2 = 2a^2(r^2 \cos^2 \phi - r^2 \sin^2 \phi)$$

$$\Leftrightarrow r^4 = 2a^2 r^2 (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi)$$

$$\Leftrightarrow r^2 = 2a^2 \cos(2\phi) \quad (*)$$

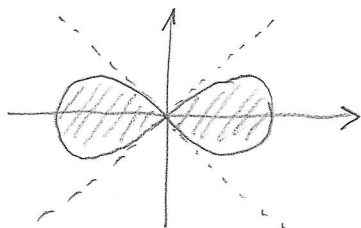
Die Fläche kann also durch $(*)$ und $r \geq 0, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}$ beschrieben werden.

$$\text{Vol}(A) = \int_A 1 dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{(2a^2 \cos(2\phi))^{\frac{1}{2}}} s ds d\phi = \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos(2\phi) d\phi$$

$$\stackrel{\text{subst.}}{=} \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \phi d\phi = \frac{a^2}{2} \left(\sin \phi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{a^2}{2}$$

$\Rightarrow$ Die Fläche besitzt den Inhalt $4 \cdot \frac{a^2}{2} = 2a^2$.

Skizze:



b) Aus der Gleichung folgt: $x \geq 0$ und die Fläche ist symmetrisch bzgl. der x -Achse. In Polarkoordinaten schreibt sich die Kurve als:

$$(r^2 \cos^2 \phi + r^2 \sin^2 \phi)^2 = 2a r^3 \cos^3 \phi$$

$$\Leftrightarrow r^4 = 2a r^3 \cos^3 \phi$$

$$\Leftrightarrow r = 2a \cos^3 \phi \quad (*)$$

Die Fläche wird also durch (*) mit $r \geq 0$, $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$ beschrieben.

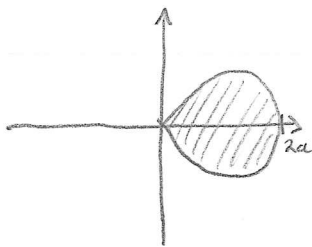
$$\text{Vol}(B) = 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2a \cos^3 \phi} s \, ds \, d\phi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4a^2 \cos^6 \phi \, d\phi = 4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 \phi \, d\phi$$

$$\stackrel{\text{Rechnen}}{=} 4a^2 \left(\frac{1}{6} \cos^5 \phi \sin \phi + \frac{5}{24} \cos^3 \phi \sin \phi + \frac{5}{16} \cos \phi \sin \phi + \frac{5}{16} \phi \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 4a^2 \cdot \frac{5}{16} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{5}{8} \pi a^2$$

Skizze:



5.4. Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar mit $\text{Vol}(A) > 0$. Sei $s_j(A) = \frac{1}{\text{Vol}(A)} \cdot \int_A x_j dx$ für $j \in \{1, \dots, n\}$. Dann heißt $s_A = (s_1(A), \dots, s_n(A))$ der Schwerpunkt von A .

a, Zeige: Ist $\mathcal{C} = a + T$ mit $a \in \mathbb{R}^n$, $T \in GL(n, \mathbb{R})$ ein affiner Isomorphismus, so ist $s_{\mathcal{C}(A)} = \mathcal{C}(s_A)$.

b, Für $\alpha \geq 1$ sei $H_\alpha = \{(r \sin \theta, -r \cos \theta) \mid 0 \leq r \leq \alpha + \cos \theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$.

Berechne s_{H_α} und skizziere H_α und die Lage von s_{H_α} .

Dazu:

a, Sei $\mathcal{C} = a + T$ wie in der Voraussetzung. $\Rightarrow \mathcal{C}$ ist $\mathcal{C}^1$ -Diffeomorphismus $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $D\mathcal{C}(x) = T \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.

$$\Rightarrow \text{Vol}(\mathcal{C}(A)) = \int_{\mathcal{C}(A)} 1 dx = \int_A |\det D\mathcal{C}(y)| dy = |\det T| \int_A 1 dy = |\det T| \text{Vol}(A)$$

($\mathcal{C}(A)$ ist nach VL Jordan-messbar ∇)

Damit $(T = (t_{ij})_{i,j})$:

$$\begin{aligned} s_j(\mathcal{C}(A)) &= \frac{1}{\text{Vol}(\mathcal{C}(A))} \int_{\mathcal{C}(A)} x_j dx = \frac{1}{|\det T| \text{Vol}(A)} \int_A \left(\sum_{k=1}^n t_{jk} y_k + a_j \right) |\det T| dy \\ &= \frac{1}{\text{Vol}(A)} \int_A \sum_{k=1}^n t_{jk} y_k dy + \frac{1}{\text{Vol}(A)} \cdot a_j \cdot \int_A dy \\ &= \sum_{k=1}^n t_{jk} \left(\frac{1}{\text{Vol}(A)} \int_A y_k dy \right) + a_j \\ &= \sum_{k=1}^n t_{jk} s_k(A) + a_j \end{aligned}$$

$$\Rightarrow s_{\mathcal{C}(A)} = \mathcal{C}(s_A).$$

$$b_1 \quad H_\alpha = \{ (r \sin \Theta, -r \cos \Theta) \mid 0 \leq r \leq \alpha + \cos \Theta, 0 \leq \Theta \leq 2\pi \}$$

↑
Polar Koordinaten - verschoben um $\frac{\pi}{2}$

ist bereits eine Darstellung als Bild einer Menge unter Polar Koordinaten!

$$\begin{aligned} \bullet \quad \text{Vol}(H_\alpha) &= \int_{H_\alpha} 1 \, dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{\alpha + \cos \Theta} 1 \cdot s \, ds \, d\Theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\alpha + \cos \Theta)^2 \, d\Theta \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^{2\pi} \alpha^2 \, d\Theta + 2 \int_0^{2\pi} \alpha \cos \Theta \, d\Theta + \int_0^{2\pi} \cos^2 \Theta \, d\Theta \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \left(2\alpha^2\pi + 2\alpha \cdot 0 + \frac{1}{2} (\Theta + \sin \Theta \cos \Theta) \Big|_0^{2\pi} \right)$$

$$= \alpha^2\pi + \frac{1}{4} \cdot 2\pi = \left(\alpha^2 + \frac{1}{2} \right) \pi.$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \text{Vol}(H_\alpha) \cdot s_1(H_\alpha) &= \int_{H_\alpha} y_1 \, dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{\alpha + \cos \Theta} s^2 \sin \Theta \, ds \, d\Theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sin \Theta \underbrace{\frac{(\alpha + \cos \Theta)^3}{3}}_{\substack{\text{gerade Funktion um } \pi \\ \text{ungerade Funktion um } \pi}} \, d\Theta \end{aligned}$$

$$= 0$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \text{Vol}(H_\alpha) \cdot s_2(H_\alpha) &= \int_{H_\alpha} y_2 \, dy = - \int_0^{2\pi} \int_0^{\alpha + \cos \Theta} s^2 \cos \Theta \, ds \, d\Theta \\ &= - \int_0^{2\pi} \cos \Theta \frac{(\alpha + \cos \Theta)^3}{3} \, d\Theta \\ &= - \frac{1}{3} \left(\underbrace{\int_0^{2\pi} \alpha^3 \cos \Theta \, d\Theta}_{=0} + \int_0^{2\pi} 3\alpha^2 \cos^2 \Theta \, d\Theta + \underbrace{\int_0^{2\pi} 3\alpha \cos^3 \Theta \, d\Theta}_{=0} + \int_0^{2\pi} \cos^4 \Theta \, d\Theta \right) \end{aligned}$$

$$= -\alpha^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta - \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \cos^4 \theta d\theta$$

$$= -\frac{\alpha^2}{2} \left(\theta + \sin \theta \cos \theta \right) \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} \cos^3 \theta \sin \theta + \frac{3}{8} \cos \theta \sin \theta + \frac{3}{8} \theta \right) \Big|_0^{2\pi}$$

$$= -\alpha^2 \pi - \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8} \cdot 2\pi = -\left(\alpha^2 + \frac{1}{4}\right)\pi$$

$$\Rightarrow S_{H_\alpha} = \left(0, -\frac{\alpha^2 + \frac{1}{4}}{\alpha^2 + \frac{1}{2}} \right)$$

• Skizze:

