Analysis III, SoSe 2011 – Lösung Blatt 6

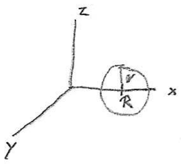
6.1. Sei $0 < r < R < \infty$ und $T \subset \mathbb{R}^3$ der Volltorus, der durch Rotation der Kreisscheibe $K := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0,\ (x-R)^2 + z^2 \le r^2\}$ um die z-Achse entsteht. Berechne das Volumen von T.

Dazu:

Am einfachsten lässt sich der Torus in Zylinderkoordinaten Z_3 (vgl. ÜA 4.1) ausdrücken. Setze

$$T' := \{(s, \phi, z) \in \mathbb{R}_{\ge 0} \times [-\pi, \pi] \times \mathbb{R} \mid (s-R)^2 + z^2 \le r^2\}.$$

$\Rightarrow\ T = Z_3(T')$. Anschauung:



„Scheibe wird mit $T' \cap \mathbb{R} \times \{0\} \times \mathbb{R}$ beschrieben".

Damit:

$$\mathrm{Vol}(T) = \int_T 1\,dx \overset{\text{Trafo}}{=} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-r}^{r} \left(\int_{-\sqrt{r^2-z^2}+R}^{\sqrt{r^2-z^2}+R} s\,ds \right) dz \right) d\phi$$

denn für festes z muss $(s-R)^2 + z^2 \le r^2 \iff |s-R| \le \sqrt{r^2-z^2}$ gelten, d.h.

$$-\sqrt{r^2-z^2} \le s - R \le \sqrt{r^2-z^2} \iff -\sqrt{r^2-z^2} + R \le s \le \sqrt{r^2-z^2} + R.$$

Also:

$$\mathrm{Vol}(T) = \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \cdot \frac{1}{2} \int_{-r}^{r} \left(\left(\sqrt{r^2-z^2} + R\right)^2 - \left(-\sqrt{r^2-z^2} + R\right)^2 \right) dz$$

$$= \pi \cdot \int_{-r}^{r} \left(|r^2-z^2| + 2\sqrt{r^2-z^2}\,R + R^2 - |r^2-z^2| + 2\sqrt{r^2-z^2}\,R - R^2 \right) dz$$

$$= 4\pi R \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-z^2}\,dz = 4\pi R \int_{r\sin(-\frac{\pi}{2})}^{r\sin(\frac{\pi}{2})} r\sqrt{1-\frac{z^2}{r^2}}\,dz \overset{\text{Subst.}}{=} 4\pi r R \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2\alpha}\; r\cos\alpha\,d\alpha$$

$$= 4\pi r^2 R \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\alpha\,d\alpha = 4\pi r^2 R \left[\frac{1}{2}\sin\alpha\cos\alpha + \frac{\alpha}{2} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2\pi r^2 R \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = 2\pi^2 r^2 R.$$

$\blacksquare$

6.2. $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $p \in U$, W_p die Menge aller $\mathcal{C}^1$-Wege durch p. Für $w, v \in W_p$ sei $w \sim v$, falls $w'(0) = v'(0)$.

a) $\tilde{T}_p U := W_p/\sim$. Zeige, dass $J_p : \mathbb{R}^n \to \tilde{T}_p U$, $v \mapsto [t \mapsto p + tv]$ bijektiv ist.

b) $\tilde{T}_p U$ sei vermöge J_p ein Vektorraum. Zeige, dass

$$\iota_U : \tilde{T}_p U \to T_p U, \quad [w] \mapsto \left(f \mapsto \frac{d}{dt} f \circ w \Big|_0 \right)$$

ein wohldefinierter Vektorraum-Isomorphismus ist.

c) $f : U \to V$ für $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ stetig diffbar und $p \in U$. Sei

$$\tilde{T}_p(f) : \tilde{T}_p U \to \tilde{T}_{f(p)} V, \quad [w] \to [f \circ w].$$

Zeige: $\tilde{T}_p(f)$ ist linear und das Diagramm

$$\begin{tikzcd} T_p U \arrow[r, "T_p(f)"] & T_{f(p)} V \\ \tilde{T}_p U \arrow[u, "\iota"] \arrow[r, "\tilde{T}_p(f)"'] & \tilde{T}_{f(p)} V \arrow[u, "\iota"'] \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Beweis:

a) Injektivität: $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$, $v_1 \neq v_2$ $\quad (p + tv_1)'(0) = v_1 \neq v_2 = (p + tv_2)'(0)$

$\Rightarrow J_p(v_1) \neq J_p(v_2)$

Surjektivität: Sei $[w] \in \tilde{T}_p U$. Setze $v := w'(0) \in \mathbb{R}^n$. Dann ist

$(p + tv)'(0) = v = w'(0)$ d.h. $J_p(v) = [w]$.

b) Nach Konstruktion genügt es, $\Psi := \iota_U \circ J_p : \mathbb{R}^n \to T_p U$ zu betrachten.

- Zur Wohldefiniertheit: $\Psi(v)(\lambda f + \mu g) = \frac{d}{dt}(\lambda f + \mu g)(p + tv)\Big|_0$

$$= \frac{d}{dt}\left(\lambda f(p+tv) + \mu g(p+tv)\right)\Big|_0 \underset{\frac{d}{dt}\text{ linear}}{=} \lambda \frac{d}{dt} f(p+tv)\Big|_0 + \mu \frac{d}{dt} g(p+tv)\Big|_0$$

$= \lambda \Psi(v)(f) + \mu \Psi(v)(g) \quad \Rightarrow \Psi(v)$ $\mathbb{R}$-linear (auf $\mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})$)

$$\Psi(v)(f\cdot g) = \frac{d}{dt}(f\cdot g)(p+tv)\Big|_0 = \frac{d}{dt}\big(f(p+tv)\cdot g(p+tv)\big)\Big|_0$$

$$\overset{\text{Produktregel}}{=} f(p)\cdot\frac{d}{dt}g(p+tv)\Big|_0 + g(p)\cdot\frac{d}{dt}f(p+tv)\Big|_0$$

$$= f(p)\,\Psi(v)(g) + g(p)\,\Psi(v)(f)$$

$\Rightarrow \Psi(v) \in T_pU$.

- Linearität:

$$\Psi(\lambda v+\mu w)(f) = \frac{d}{dt}f(p+t(\lambda v+\mu w))\Big|_0 = Df(p)\cdot(\lambda v+\mu w)$$

$$= \lambda\, Df(p)\cdot v + \mu\, Df(p)\cdot w$$

$$= \lambda\frac{d}{dt}f(p+tv)\Big|_0 + \mu\frac{d}{dt}f(p+tw)\Big|_0$$

$$= \lambda\,\Psi(v)(f) + \mu\,\Psi(w)(f).$$

f beliebig $\Rightarrow \Psi(\lambda v+\mu w) = \lambda\Psi(v) + \mu\Psi(w)$.

- VR-Isomorphismus.

Sei $\{e_1,\dots,e_n\}$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$.

$$\Psi(e_i)(f) = \frac{d}{dt}f(p+te_i)\Big|_0 \overset{\text{Ana II}}{=} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p(f)$$

f beliebig $\Rightarrow \Psi(e_i) = \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p$

Da $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p,\dots,\frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_p\right\}$ Basis von T_pU ist, folgt die Behauptung.

c) - Wohldefiniertheit. $[w]=[v]$ d.h. $w'(0)=v'(0)$. Dann:

$$(f\circ w)'(0) = Df(\underbrace{w(0)}_{=p=v(0)})\cdot w'(0) = Df(v(0))\cdot v'(0) = (f\circ v)'(0)$$

d.h. $[f\circ w]=[f\circ v]$.

- Diagramm Kommutativ: Sei $h\in C^\infty(V,\mathbb{R})$. Dann:

$$T_p(f)(\iota_U([w]))(h) \overset{\text{VL}}{=} \iota_U([w])(f^*h) = \iota_U([w])(h\circ f) = \frac{d}{dt}(h\circ f\circ w)\Big|_0$$

Andererseits:

$$\iota_V\left(\tilde{T}_p(f)([w])\right)(h) = \iota_V\left([f\circ w]\right)(h) = \frac{d}{dt}(h\circ f\circ w)\Big|_0$$

$$h \text{ beliebig} \Rightarrow \quad T_p(f)\left(\iota_U([w])\right) = \iota_V\left(\tilde{T}_p(f)([w])\right)$$

$$\overset{[w] \text{ bel.}}{\Rightarrow} \quad T_p(f)\circ\iota_U = \iota_V\circ\tilde{T}_p(f)$$

- $\tilde{T}_p(f)$ ist linear: Da das Diagramm kommutiert und ι_V Isomorphismus, folgt: $\tilde{T}_p(f) = \iota_V^{-1}\circ\underbrace{T_p(f)}_{\text{linear nach VL}}\circ\iota_U$

$\Rightarrow \tilde{T}_p(f)$ ist linear.

$\blacksquare$

6.3. a) $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in \mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$ und $\gamma : (-\varepsilon,\varepsilon) \to U$ Integralkurve des Vektorfeldes $\operatorname{grad} f$. Zeige: $\forall\, a,b \in (-\varepsilon,\varepsilon)$ mit $a \leq b$ ist $f(\gamma(a)) \leq f(\gamma(b))$.

b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_1,x_2) \mapsto c + x_1^2 + x_2^2$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Berechne $\forall\, p \in \mathbb{R}^n$ die maximale Integralkurve von $\operatorname{grad} f$ durch p.

Beweis:

a) • Es ist (VL) $\operatorname{grad} f(p) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(p) \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_p \in T_pU$.

γ Integralkurve $\Rightarrow$ $T_s(\gamma)\left(\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_s\right) = \operatorname{grad} f(\gamma(s)) \quad \forall\, s \in (-\varepsilon,\varepsilon)$

Also:

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial \gamma^j}{\partial t}(s) \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_{\gamma(s)} \overset{VL}{=} T_s\gamma\left(\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_s\right) = \operatorname{grad} f(\gamma(s))$$

$$= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(\gamma(s)) \cdot \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_{\gamma(s)} \qquad (\in T_{\gamma(s)}U)$$

$$\overset{\left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_{\gamma(s)} \text{ Basis}}{\Longrightarrow} \quad \frac{\partial \gamma^j}{\partial t}(s) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\gamma(s)) \qquad \forall\, j \in \{1,\dots,n\},\ s \in (-\varepsilon,\varepsilon).$$

• Es ist

$$D(f\circ\gamma)(s) \overset{\text{Kettenregel}}{=} Df(\gamma(s)) \cdot D\gamma(s) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(\gamma(s)) \cdot \frac{\partial \gamma^j}{\partial t}(s)$$

$$= \sum_{j=1}^n \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(\gamma(s))\right)^2}_{\geq 0} \geq 0 \qquad \forall\, s \in (-\varepsilon,\varepsilon)$$

$\overset{\text{Ana I}}{\Longrightarrow}$ $f\circ\gamma$ ist auf $(-\varepsilon,\varepsilon)$ monoton wachsend, d.h.

$\forall\, a,b \in (-\varepsilon,\varepsilon)$ mit $a \leq b$ ist $f(\gamma(a)) \leq f(\gamma(b))$.

b) Sei $p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Gesucht: Integralkurve $\mathcal{C} = \begin{pmatrix} \mathcal{C}^1 \\ \mathcal{C}^2 \end{pmatrix}$ von $\operatorname{grad} f$ mit $\mathcal{C}(0) = p$.

Es ist

$$\operatorname{grad} f\,(y_1, y_2) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(y_1,y_2) \cdot \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_{(y_1,y_2)} + \frac{\partial f}{\partial x_2}(y_1,y_2) \cdot \frac{\partial}{\partial x_2}\Big|_{(y_1,y_2)}$$

$$= 2y_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_{(y_1,y_2)} + 2y_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\Big|_{(y_1,y_2)}$$

$\mathcal{C}$ Integralkurve bedeutet $T_s(\mathcal{C})\left(\frac{\partial}{\partial t}\Big|_s\right) = \operatorname{grad} f\,(\mathcal{C}(s))$

$$= 2\,\mathcal{C}^1(s) \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_{\mathcal{C}(s)} + 2\,\mathcal{C}^2(s) \frac{\partial}{\partial x_2}\Big|_{\mathcal{C}(s)}$$

Da $T_s(\mathcal{C})\left(\frac{\partial}{\partial t}\Big|_s\right) = \frac{\partial \mathcal{C}^1}{\partial t}(s) \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_{\mathcal{C}(s)} + \frac{\partial \mathcal{C}^2}{\partial t}(s) \frac{\partial}{\partial x_2}\Big|_{\mathcal{C}(s)}$ ist, muss

$$\frac{\partial \mathcal{C}^1}{\partial t}(s) = 2\,\mathcal{C}^1(s) \quad , \quad \frac{\partial \mathcal{C}^2}{\partial t}(s) = 2\,\mathcal{C}^2(s)$$

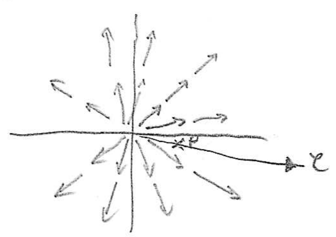
gelten.

Setze $\mathcal{C}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto e^{2t} \cdot p$. $\Rightarrow \mathcal{C}(0) = p$

und $\frac{\partial \mathcal{C}^i}{\partial t}(s) = 2e^{2s} p_i = 2\,\mathcal{C}^i(s)$.

$\Rightarrow$ $\mathcal{C}$ ist die gesuchte Integralkurve, das Definitionsintervall ist offenbar maximal.

Skizze:



$\blacksquare$

6.4. Seien $r, c > 0$, $\mathcal{C} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (r\cos t, r\sin t, ct)$ und

$\omega = (x^2 - y^2)\,dx + 3z\,dy + 4xy\,dz$. Berechne $\int_{\mathcal{C}} \omega$.

Dazu:

$$\int_{\mathcal{C}} \omega = \int_0^{2\pi} \mathcal{C}^* \omega = \int_0^{2\pi} \left((r^2\cos^2 t - r^2 \sin^2 t)(-r\sin t) + 3ct\, r\cos t + 4r^2 \cos t \sin t\, c \right) dt$$

$$= -r^3 \int_0^{2\pi} (\cos^2 t - 1 + \cos^2 t)\sin t\, dt + 3rc \int_0^{2\pi} t\cos t\, dt + 4r^2 c \int_0^{2\pi} \cos t \sin t\, dt$$

$$= -r^3 \int_0^{2\pi} 2\cos^2 t \sin t\, dt + r^3 \int_0^{2\pi} \sin t\, dt + \underbrace{3rc\left(t\sin t + \cos t\right)\Big|_0^{2\pi}}_{=0} + \underbrace{4r^2 c\left(-\tfrac{1}{2}\cos^2 t\right)\Big|_0^{2\pi}}_{=0}$$

$$= -2r^3\left(-\tfrac{1}{3}\cos^3 t\right)\Big|_0^{2\pi} + r^3(-\cos t)\Big|_0^{2\pi}$$

$$= 0.$$

$\blacksquare$