Analysis III, SoSe 2011 – Lösung Blatt 7

7.1. Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ sternförmiges Gebiet und ω stetige 1-Form auf G. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) Für alle geschlossenen Wege γ in G ist $\int_\gamma \omega = 0$.

(ii) Für alle Dreiecke $\Delta \subset G$ ist $\int_{\partial\Delta} \omega = 0$.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii) Klar, da für jedes Dreieck $\Delta \subset G$ gilt: $\partial\Delta$ ist geschlossener Weg in G.

(ii) $\Rightarrow$ (i) • Sei $z \in G$ ein Zentrum des sternförmigen Gebietes. Setze

$$F: G \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \int_{[z,x]} \omega$$

wobei $[z,x]$ den Weg $t \mapsto (1-t)z + tw$ bezeichne (gerade Verbindungsstrecke von z nach x $\Rightarrow$ Weg in G, da G sternförmig !).

• Genügt zu zeigen: $dF = \omega$, denn ist γ geschlossener Weg in G, dann:

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma dF = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0 \qquad (\gamma: [a,b] \to G).$$

• Sei $\omega = \sum_{i=1}^n a_i\, dx_i$ und $p \in G$ fixiert. $\Rightarrow$ $\exists$ Kugel $B \subset G$ um p.

$\Rightarrow$ $\forall y \in B$ ist das Dreieck Δ mit Eckpunkten z, p und y in G enthalten (da G sternförmig !). Also:

$$F(y) = \int_{[z,y]} \omega = \int_{[z,y]} \omega + \underbrace{\int_{\partial\Delta} \omega}_{=0} = \int_{[z,y]} \omega + \int_{[z,p]} \omega + \int_{[p,y]} \omega + \int_{[y,z]} \omega$$

$$= \int_{[z,p]} \omega + \int_{[p,y]} \omega$$

$$= F(p) + \int_{[p,y]} \omega .$$

Also: $\forall y \in B$ ist $F(y) = F(p) + \int\limits_{[p,y]} \omega$.

Sei nun $j \in \{1, \dots, n\}$ fixiert. Für geeignetes $\varepsilon > 0$ ist $p + te_j \in B$ für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, also

$$F(p+te_j) - F(p) = \int\limits_{[p,p+te_j]} \omega = \int_0^t \alpha^* \omega \qquad \text{mit} \quad \begin{aligned} \alpha: [0,t] &\to G \\ s &\mapsto p + se_j \end{aligned}$$

$$= \int_0^t \sum_{i=1}^n a_i(p+se_j) \cdot \underbrace{\frac{\partial \alpha^i}{\partial s}(s)}_{= \delta_{i,j}} \, ds$$

$$= \int_0^t a_j(p+se_j) \, ds$$

Also ist (HDI !) $F(p+te_j)$ für $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ differenzierbar (d.h. $\frac{\partial F}{\partial x_j}(p)$ existiert) und es folgt:

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(p) = \frac{d}{dt}\left(F(p+te_j)\right)\Big|_{t=0} = a_j(p + 0 \cdot e_j) = a_j(p).$$

Da $p \in G$ und $j \in \{1, \dots, n\}$ beliebig war, folgt:

$$a_i = \frac{\partial F}{\partial x_i} \quad \text{auf } G \quad \forall\, 1 \leq i \leq n$$

d.h. $dF = \omega$.

$\blacksquare$

7.2. Es sei

$$\omega_1 = (x^2 - yz)\,dx + (y^2 - xz)\,dy - xy\,dz$$

$$\omega_2 = \omega_1 + 2xy\,dz.$$

Bestimme eine Stammfunktion für ω_1 auf dem $\mathbb{R}^3$. Ist ω_2 geschlossen? Berechne ferner die Integrale von ω_1 und ω_2 entlang der Schraubenlinie $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), ct)$, $t \in [0, 2\pi]$ für $c > 0$.

Dazu:

- Setze für $p \in \mathbb{R}^3$: $F(p) := \int_{[0,p]} \omega_1$ wobei $[0,p]$ der Weg $t \mapsto t \cdot p$, $t \in [0,1]$ sei.

Dann:

$$F(p) = \int_{[0,p]} \omega_1 = \int_0^1 \left((t^2 p_1^2 - t^2 p_2 p_3) p_1 + (t^2 p_2^2 - t^2 p_1 p_3) p_2 - t^2 p_1 p_2 p_3 \right) dt$$

$$= \left(p_1^3 - p_1 p_2 p_3 + p_2^3 - p_1 p_2 p_3 - p_1 p_2 p_3 \right) \int_0^1 t^2\,dt$$

$$= \left(p_1^3 + p_2^3 - 3 p_1 p_2 p_3 \right) \cdot \frac{1}{3}$$

Also: $F((x,y,z)) = \frac{1}{3}(x^3 + y^3 - 3xyz)$. Es ist

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) = \frac{1}{3}(3x^2 - 3yz) = x^2 - yz$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) = \frac{1}{3}(3y^2 - 3xz) = y^2 - xz$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = \frac{1}{3}(-3xy) = -xy.$$

Also: $dF = \omega_1$ d.h. F ist eine Stammfunktion von ω_1.

- $\omega_2 = \omega_1 + 2xy\,dz = (x^2 - yz)\,dx + (y^2 - xz)\,dy + xy\,dz$

Sei $\omega_2 =: a_1\,dx + a_2\,dy + a_3\,dz$. Dann ist ω_2 geschlossen, falls

$$\frac{\partial a_1}{\partial y} = \frac{\partial a_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial a_1}{\partial z} = \frac{\partial a_3}{\partial x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial a_2}{\partial z} = \frac{\partial a_3}{\partial y} \quad \text{gilt.}$$

Es ist

$$\frac{\partial a_1}{\partial z} = -y \quad \text{und} \quad \frac{\partial a_3}{\partial x} = +y .$$

$\Rightarrow$ ω_2 ist nicht geschlossen.

- Da F Stammfunktion von ω_1 ist, folgt:

$$\int_\gamma \omega_1 = F(\gamma(2\pi)) - F(\gamma(0)) = F((1,0,c2\pi)) - F((1,0,0))$$
$$= \tfrac{1}{3}(1+0-0) - \tfrac{1}{3}(1+0-0)$$
$$= 0 .$$

Damit:

$$\int_\gamma \omega_2 = \int_\gamma (\omega_1 + 2xy\,dz) = \underbrace{\int_\gamma \omega_1}_{=0} + \int_\gamma 2xy\,dz$$

$$= \int_\gamma 2xy\,dz = \int_0^{2\pi} 2\cos(t)\sin(t)\cdot c\,dt$$

$$= 2c\left(-\tfrac{1}{2}\cos^2(t)\Big|_0^{2\pi}\right) = 2c\left(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\right)$$

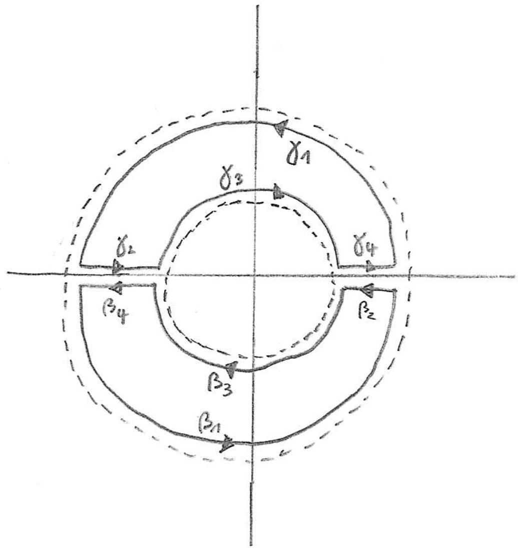
$$= 0 .$$

$\blacksquare$

7.3. Sei $\omega = f dx + g dy$ stetig differenzierbare, geschlossene 1-Form auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Zeige: Ist ω beschränkt um 0, so ist $\int_{\partial E} \omega = 0$ (E die Einheitskreisscheibe).

Beweis:

- Sei S ein Kreis um $0 \in \mathbb{R}^2$ mit Radius $0 < \varepsilon < 1$, welcher (als Weg) im Uhrzeigersinn durchlaufen werde, ∂E werde entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen. Wir „zerschneiden" $\mathbb{R}^2$ entlang der x-Achse und führen Wege wie folgt ein:



$\Rightarrow$ $\partial E = \gamma_1 \cdot \beta_1$ und $S = \gamma_3 \cdot \beta_3$. Setze $\gamma := \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \gamma_3 \cdot \gamma_4$ und $\beta := \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \beta_3 \cdot \beta_4$

$\Rightarrow$ γ ist ein geschlossener Weg in $D_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0 \text{ oder } y > 0\}$ und β ein geschlossener Weg in $D_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0 \text{ oder } y < 0\}$

Da D_1 und D_2 sternförmige Gebiete sind (offenbar, mit Zentrum $(0,1)$ bzw. $(0,-1)$) und ω geschlossene 1-Form ist, folgt:

$$\int_\gamma \omega = 0 \quad \text{und} \quad \int_\beta \omega = 0.$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \int_\gamma \omega + \int_\beta \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \underbrace{\int_{\gamma_2} \omega}_{= -\int_{\beta_4} \omega} + \int_{\gamma_3} \omega + \underbrace{\int_{\gamma_4} \omega}_{= -\int_{\beta_2} \omega} + \int_{\beta_1} \omega + \int_{\beta_2} \omega + \int_{\beta_3} \omega + \int_{\beta_4} \omega$$

$$= \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\beta_1} \omega + \int_{\gamma_3} \omega + \int_{\beta_3} \omega$$

$$= \int_{\partial E} \omega + \int_{S} \omega .$$

$$\Rightarrow \quad \left| \int_{\partial E} \omega \right| = \left| \int_{S} \omega \right| \qquad (*)$$

- Sei nun $0 < \varepsilon < 1$ beliebig und S ein Kreis um 0 mit Radius ε, $\quad S : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$$t \longmapsto (\varepsilon \cos(t), \varepsilon \sin(t))$$

Da $\omega = f dx + g dy$ um 0 beschränkt ist, $\exists$ $M > 0$ mit

$$|f(p)| \leq M, \quad |g(p)| \leq M \qquad \forall\, p \in E \setminus \{0\}$$

Setze $\quad C := \int_0^{2\pi} |\sin(t)| + |\cos(t)| \, dt \quad \Rightarrow \quad C > 0$ Konstant.

Damit:

$$\left| \int_{\partial E} \omega \right| \overset{(*)}{=} \left| \int_{S} \omega \right| = \left| \int_0^{2\pi} f(S(t)) \cdot (-\varepsilon \sin(t)) + g(S(t)) \varepsilon \cos(t) \, dt \right|$$

$$\leq \varepsilon \int_0^{2\pi} \underbrace{|f(S(t))|}_{\leq M} |\sin(t)| + \underbrace{|g(S(t))|}_{\leq M} |\cos(t)| \, dt$$

$$\leq \varepsilon \cdot M \cdot C$$

Also: $\left| \int_{\partial E} \omega \right| \leq \varepsilon \cdot M \cdot C \quad \forall\, 0 < \varepsilon < 1.$ Mit $\varepsilon \to 0$ folgt also

$$\left| \int_{\partial E} \omega \right| = 0 \quad \text{und damit} \quad \int_{\partial E} \omega = 0 .$$

$\blacksquare$

7.4. $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $p \in U$. $M := \{\gamma : [0,1] \to U \mid \gamma \text{ stetig}, \gamma(0) = \gamma(1) = p\}$.

Für $\gamma_1, \gamma_2 \in M$ sei $\gamma_1 \sim \gamma_2$, falls γ_1 und γ_2 homotop sind ($\rightsquigarrow$ Äquivalenzrelation). Setze $\pi_1(U,p) := M/_\sim$. Zeige:

a) $\pi_1(U,p)$ ist bezüglich $[\gamma_1] * [\gamma_2] := [\gamma_1 \cdot \gamma_2]$ eine Gruppe, wobei

$$\gamma_1 \cdot \gamma_2(t) := \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{falls } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2t-1) & \text{falls } \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}.$$

b) Ist U wegzusammenhängend und $p_0, p_1 \in U$, so ist $\pi_1(U,p_0) \cong \pi_1(U,p_1)$.

c) Sind $G_1 \subset \mathbb{R}^n$ und $G_2 \subset \mathbb{R}^m$ Gebiete, $p \in G_1$ und $f : G_1 \to G_2$ stetig, so ist $f_* : \pi_1(G_1,p) \to \pi_1(G_2, f(p))$, $f_*([\gamma]) := [f \circ \gamma]$ ein Gruppenhomomorphismus.

d) Ist $f : G_1 \to G_2$ Homöomorphismus, so ist f_* ein Isomorphismus.

Beweis:

a) • Zunächst ist $*$ wohldefiniert. Seien $\gamma_1 \sim \gamma_2$, $\tau_1 \sim \tau_2$ und A bzw. B die entsprechenden Homotopien. Setze

$$C : [0,1] \times [0,1] \to U, \quad C(s,t) := \begin{cases} A(s,2t) & \text{für } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ B(s,2t-1) & \text{für } \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

Da $A(s, 2 \cdot \frac{1}{2}) = A(s,1) = p = B(s,0) = B(s, 2 \cdot \frac{1}{2} - 1)$ gilt $(\forall s)$ ist C stetig. Außerdem:

$C(s,0) = A(s,0) = p$, $C(s,1) = B(s,1) = p \quad \forall s$ und

$$C(0,t) = \left(\begin{cases} A(0,2t) & \text{f. } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ B(0,2t-1) & \text{f. } \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases} \right) = \left(\begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{f. } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \tau_1(2t-1) & \text{f. } \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases} \right) = \gamma_1 \cdot \tau_1(t)$$

$$C(1,t) = \left(\begin{cases} A(1,2t) & \text{f. } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ B(1,2t-1) & \text{f. } \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases} \right) = \left(\begin{cases} \gamma_2(2t) & \text{f. } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \tau_2(2t-1) & \text{f. } \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases} \right) = \gamma_2 \cdot \tau_2(t).$$

$\Rightarrow \gamma_1 \cdot \tau_1 \sim \gamma_2 \cdot \tau_2$.

- Hilfsbehauptung: $\gamma \in M$, $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ stetig mit $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$
$$\Rightarrow (\gamma \circ \varphi) \sim \gamma \qquad (*)$$

Dazu: Definiere $A : [0,1] \times [0,1] \to U$, $(s,t) \mapsto \gamma((1-s)t + s\varphi(t))$.

$\Rightarrow$ A ist stetig und $A(0,t) = \gamma(t)$, $A(1,t) = \gamma \circ \varphi(t)$,

$$A(s,0) = \gamma((1-s) \cdot 0 + s \cdot \underbrace{\varphi(0)}_{=0}) = \gamma(0) = p$$

$$A(s,1) = \gamma((1-s) \cdot 1 + s \cdot \underbrace{\varphi(1)}_{=1}) = \gamma(1) = p.$$

$\Rightarrow$ A ist Homotopie zwischen γ und $\gamma \circ \varphi$.

- Setze $e : [0,1] \to U$, $e(t) = p$ $\forall t \in [0,1]$. Ist $\gamma \in M$ beliebig, dann:

$$e \cdot \gamma(t) = \left(\begin{cases} e(2t) & \text{f. } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \gamma(2t-1) & \text{f. } \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases} \right) = \left(\begin{cases} p & \text{f. } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \gamma(2t-1) & \text{f. } \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases} \right) = \gamma \circ \varphi(t)$$

mit $\varphi(t) := \begin{cases} 0 & \text{falls } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ 2t-1 & \text{falls } \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$. $\quad (*) \Rightarrow e \cdot \gamma = \gamma \circ \varphi \sim \gamma$.

Analog: $\gamma \cdot e \sim \gamma$, d.h. $[e] \in \pi_1(U,p)$ ist neutrales Element.

- Sei $\gamma \in M$. Definiere $\gamma^- := \gamma(1-t)$. $\Rightarrow$ $\gamma^- \in M$ und

$$\gamma \cdot \gamma^-(t) = \left(\begin{cases} \gamma(2t) & \text{f. } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \gamma(1-(2t-1)) & \text{f. } \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases} \right) = \left(\begin{cases} \gamma(2t) & \text{f. } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \gamma(2(1-t)) & \text{f. } \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases} \right)$$

Definiere: $A(s,t) := \begin{cases} \gamma(2t(1-s)) & \text{f. } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \gamma(2(1-t)(1-s)) & \text{f. } \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$ $\Rightarrow$ A stetig

und $A(0,t) = \gamma \cdot \gamma^-(t)$, $A(1,t) = e(t)$, $A(s,0) = p = A(s,1)$, d.h. $\gamma \cdot \gamma^- \sim e$

Analog: $\gamma^- \cdot \gamma \sim e$. Also: Invers zu $[\gamma]$ ist $[\gamma^-]$.

- Zeigen nun noch: $*$ ist assoziativ. Seien $u, v, w \in M$. Dann (ausrechnen):

$$(u \cdot v) \cdot w(t) = \begin{cases} u(4t) & \text{f. } 0 \le t \le \frac{1}{4} \\ v(4t-1) & \text{f. } \frac{1}{4} \le t \le \frac{1}{2} \\ w(2t-1) & \text{f. } \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases} \quad \text{und} \quad u \cdot (v \cdot w)(t) = \begin{cases} u(2t) & \text{f. } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ v(4t-2) & \text{f. } \frac{1}{2} \le t \le \frac{3}{4} \\ w(4t-3) & \text{f. } \frac{3}{4} \le t \le 1 \end{cases}.$$

Definiere $\psi : [0,1] \to [0,1]$,

$$\psi(t) := \begin{cases} 2t & 0 \le t \le \frac{1}{4} \\ t + \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \le t \le \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \psi \text{ ist stetig, } \psi(0) = 0,\ \psi(1) = 1.$$

Außerdem ist $\psi([0,\frac{1}{4}]) = [0,\frac{1}{2}]$, $\psi([\frac{1}{4},\frac{1}{2}]) = [\frac{1}{2},\frac{3}{4}]$, $\psi([\frac{1}{2},1]) = [\frac{3}{4},1]$

und durch Einsetzen sieht man: $(v \cdot v) \cdot w = (v \cdot (v \cdot w)) \circ \psi$

$\overset{(*)}{\Rightarrow}$ $(v \cdot v) \cdot w \sim v \cdot (v \cdot w)$ d.h. $*$ ist assoziativ.

Insgesamt: $\pi_1(U,p)$ ist eine Gruppe.

b) U ist wegzusammenhängend, sei α: ein Weg von p_0 nach p_1.

Definiere („$\cdot$" und „$^-$" analog zu a))

$$f : \pi_1(U,p_1) \to \pi_1(U,p_0), \quad [\gamma] \mapsto [\alpha \cdot \gamma \cdot \alpha^-]$$

(Wohldefiniertheit klar: Berechne $\alpha \cdot \gamma \cdot \alpha^-$ und „baue" Homotopie A zwischen γ_1 und γ_2 im „mittleren Stück" ein.).

$$f([\gamma] * [\tau]) = f([\gamma \cdot \tau]) = [\alpha \cdot \gamma \cdot \tau \cdot \alpha^-] = [\alpha \cdot \gamma \cdot \underbrace{\alpha^- \cdot \alpha}_{=e} \cdot \tau \cdot \alpha^-]$$

$$= [\alpha \cdot \gamma \cdot \alpha^-] * [\alpha \cdot \tau \cdot \alpha^-] = f([\gamma]) * f([\tau]).$$

$\Rightarrow$ f ist Gruppenhomomorphismus.

Analog haben wir den Gruppenhomomorphismus $\bar{f} : \pi_1(U,p_0) \to \pi_1(U,p_1)$, $\bar{f}([\gamma]) = [\alpha^- \cdot \gamma \cdot \alpha]$. Es ist $f \circ \bar{f}([\gamma]) = f([\alpha^- \cdot \gamma \cdot \alpha]) = [\alpha \cdot \alpha^- \cdot \gamma \cdot \alpha \cdot \alpha^-] = [\gamma]$ und analog $\bar{f} \circ f = id$.

$\Rightarrow$ f ist Isomorphismus, also $\pi_1(U,p_0) \cong \pi_1(U,p_1)$.

c) Zunächst ist f_* wohldefiniert (Argument wie in a)).

$$f_*([\gamma] * [\tau]) = f_*([\gamma \cdot \tau]) = [f \circ \gamma \cdot \tau] = [(f \circ \gamma) \cdot (f \circ \tau)]$$

$$= [f \circ \gamma] * [f \circ \tau] = f_*([\gamma]) * f_*([\tau]).$$

d) f Homöomorphismus $\Rightarrow$ f^{-1} ist stetig.

$(f^{-1})_* \circ f_*([\gamma]) = (f^{-1})_*([f \circ \gamma]) = [f^{-1} \circ f \circ \gamma] = [\gamma]$ $\Rightarrow$ $(f^{-1})_* \circ f_* = id$.

Analog: $f_* \circ (f^{-1})_* = id$ $\Rightarrow$ f_* ist Isomorphismus. $\blacksquare$