

Analysis III, SoSe 2011 - Lösung Blatt 8

8.1. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ sternförmiges Gebiet mit Zentrum $0 \in \mathbb{R}^n$. Wir ordnen jeder stetigen K -Form

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_K \leq n} f_{i_1, \dots, i_K} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_K}$$

die $(K-1)$ -Form

$$P(\omega) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_K \leq n} \sum_{\alpha=1}^K (-1)^{\alpha-1} \left(\int_0^1 t^{K-1} f_{i_1, \dots, i_K}(tx) dt \right) x_{i_\alpha} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \dots \wedge dx_{i_K}$$

zu. Zeige, dass damit für eine stetig differenzierbare K -Form ω die Identität $\omega = P(d\omega) + dP(\omega)$ gilt und folgere den Satz von Poincaré: Ist ω geschlossen, so ist ω exakt.

Beweis:

• Der Satz von Poincaré folgt unmittelbar:

$$\omega \text{ geschlossen} \Rightarrow d\omega = 0 \xRightarrow{\text{offenbar}} P(d\omega) = 0 \Rightarrow \omega = P(d\omega) + dP(\omega) = dP(\omega)$$

d.h. $P(\omega)$ ist Stammform von ω und ω damit exakt.

• Es bleibt die Identität nachzurechnen. Wir berechnen $d(P(\omega))$:

$$\begin{aligned} d(P(\omega)) &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_K \leq n} \sum_{\alpha=1}^K (-1)^{\alpha-1} d \left(\left(\int_0^1 t^{K-1} f_{i_1, \dots, i_K}(tx) dt \right) x_{i_\alpha} \right) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \dots \wedge dx_{i_K} \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_K \leq n} \sum_{\alpha=1}^K (-1)^{\alpha-1} \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\int_0^1 t^{K-1} f_{i_1, \dots, i_K}(tx) dt \right) x_{i_\alpha} \right) dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \dots \wedge dx_{i_K} \end{aligned}$$

Da $f_{i_1, \dots, i_K}$ stetig diffbar ist, folgt (vgl. Ana II):

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\int_0^1 t^{K-1} f_{i_1, \dots, i_K}(tx) dt \right) x_{i_\alpha} \right) = \begin{cases} \left(\int_0^1 t^{K-1} \frac{\partial f_{i_1, \dots, i_K}}{\partial x_j}(tx) dt \right) x_{i_\alpha} + \int_0^1 t^{K-1} f_{i_1, \dots, i_K}(tx) dt & \text{falls } j = i_\alpha \\ \left(\int_0^1 t^{K-1} \frac{\partial f_{i_1, \dots, i_K}}{\partial x_j}(tx) dt \right) x_{i_\alpha} & \text{sonst} \end{cases}$$

Damit erhalten wir:

$$d(P(w)) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \sum_{\alpha=1}^k (-1)^{\alpha-1} \left(\int_0^1 t^{k-1} f_{i_1, \dots, i_k}(tx) dt \right) dx_{i_\alpha} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\ + \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \sum_{j=1}^n \sum_{\alpha=1}^k (-1)^{\alpha-1} \left(\int_0^1 t^k \frac{\partial f_{i_1, \dots, i_k}}{\partial x_j}(tx) dt \right) x_{i_\alpha} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

dx_{i_α} in 1. Summe
verschieben

$$= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \sum_{\alpha=1}^k \left(\int_0^1 t^{k-1} f_{i_1, \dots, i_k}(tx) dt \right) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\ + \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \sum_{j=1}^n \sum_{\alpha=1}^k (-1)^{\alpha-1} \left(\int_0^1 t^k \frac{\partial f_{i_1, \dots, i_k}}{\partial x_j}(tx) dt \right) x_{i_\alpha} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\ = k \cdot \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \left(\int_0^1 t^{k-1} f_{i_1, \dots, i_k}(tx) dt \right) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \quad (*)$$

$$+ \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \sum_{j=1}^n \sum_{\alpha=1}^k (-1)^{\alpha-1} \left(\int_0^1 t^k \frac{\partial f_{i_1, \dots, i_k}}{\partial x_j}(tx) dt \right) x_{i_\alpha} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

Nun ist $dw = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_{i_1, \dots, i_k}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ und damit

erhalten wir durch Anwenden von P (beachte: P ist „linear“):

$$P(dw) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 t^k \frac{\partial f_{i_1, \dots, i_k}}{\partial x_j}(tx) dt \right) x_j dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\ - \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \sum_{\alpha=1}^k \sum_{j=1}^n (-1)^{\alpha-1} \left(\int_0^1 t^k \frac{\partial f_{i_1, \dots, i_k}}{\partial x_j}(tx) dt \right) x_{i_\alpha} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

(**)

Damit können wir nun schließlich mit (*) und (**) berechnen:

$$\begin{aligned}
 P(dw) + dP(w) &= K \cdot \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \left(\int_0^1 t^{k-1} f_{i_1, \dots, i_k}(tx) dt \right) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\
 &\quad + \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 t^k \frac{\partial f_{i_1, \dots, i_k}}{\partial x_j}(tx) dt \right) x_j dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\
 &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^n t^k \frac{\partial f_{i_1, \dots, i_k}}{\partial x_j}(tx) \cdot x_j + K t^{k-1} f_{i_1, \dots, i_k}(tx) \right) dt dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}
 \end{aligned}$$

Produkt- und
Kettenregel
↓
=

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \left(\int_0^1 \frac{d}{dt} (t^k f_{i_1, \dots, i_k}(tx)) dt \right) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

$$= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \left(1^k f_{i_1, \dots, i_k}(x) - 0^k f_{i_1, \dots, i_k}(0) \right) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

$$= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} f_{i_1, \dots, i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

$$= \omega$$

Also ist die Identität $\omega = P(dw) + dP(w)$ gezeigt.



8.2. a) Gib eine äquivalente Formulierung des Satzes von Poincaré mit den $H_{dR}^q(U, \mathbb{R})$ an.

b) Zeige, dass

$$H_{dR}^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \mathbb{R}) = \text{Lin} \left(\left[\frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} \right] \right).$$

Beweis:

a) Formulierung: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ sternförmiges Gebiet. Dann ist
 $H_{dR}^q(U, \mathbb{R}) = 0 \quad \forall q \geq 1$.

Denn: Nach Definition bedeutet $H_{dR}^q(U, \mathbb{R}) = 0$ für $q \geq 1$ gerade, dass jede geschlossene q -Form ($dw = 0$) exakt ist (sich als $w = d\eta$ für $(q-1)$ -Form η schreiben lässt).

b) Sei $w := \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \mathbb{R})$. Nach Vorlesung ist w geschlossen, d.h.

$$[w] \in H_{dR}^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \mathbb{R})$$

und

$$\int_{\gamma} w = 2\pi$$

(mit $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$ wie im Hinweis).

• Sei $\alpha \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \mathbb{R})$ eine geschlossene 1-Form.

Behauptung: $\exists c \in \mathbb{R}$ so dass $\alpha - cw$ exakt ist.

Dazu: Setze

$$c := \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \alpha \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma} \alpha - cw = \int_{\gamma} \alpha - c \cdot \int_{\gamma} w = \int_{\gamma} \alpha - \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \alpha \right) \cdot 2\pi = 0.$$

Sei nun $\tau: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ irgendeine geschlossene Kurve und $p := \tau(0) (= \tau(1))$ der Anfangs- und Endpunkt.

$\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist wegzusammenhängend, sei η eine Kurve von $(1,0)$ nach p .

$\Rightarrow \eta \cdot \tau \cdot \eta^{-1}$ ist geschlossene Kurve mit Anfangs- und Endpunkt $(1,0)$.

$\Rightarrow [\eta \cdot \tau \cdot \eta^{-1}] \in \pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, (1,0))$.

Sei $f([\eta \cdot \tau \cdot \eta^{-1}]) = K \in \mathbb{Z}$. Wegen $f([\gamma]) = 1$ folgt:

$$[\eta \cdot \tau \cdot \eta^{-1}] \xrightarrow{f \text{ Isom.}} f^{-1} \circ f([\eta \cdot \tau \cdot \eta^{-1}]) = f^{-1}(K) \xrightarrow{f^{-1} \text{ Gruppenhom.}} [\gamma]^K = [\gamma^K],$$

d.h. $(\eta \cdot \tau \cdot \eta^{-1}) \sim \gamma^K$ (homotop).

Damit:

$$\begin{aligned} \int_{\tau} \alpha - c\omega &= \int_{\eta} \alpha - c\omega + \int_{\tau} \alpha - c\omega - \int_{\eta} \alpha - c\omega \\ &= \int_{\eta \cdot \tau \cdot \eta^{-1}} \alpha - c\omega \xrightarrow{(\alpha - c\omega) \text{ geschlossen}} \int_{\gamma^K} \alpha - c\omega = K \cdot \int_{\gamma} \alpha - c\omega = K \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Also: Für alle geschlossenen Wege τ in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist $\int_{\tau} \alpha - c\omega = 0$

$\stackrel{VL}{\Rightarrow} \alpha - c\omega$ ist exakt.

• Sei nun $[\alpha] \in H_{dR}^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \mathbb{R})$, d.h. α ist geschlossene 1-Form.

$\stackrel{\text{oben}}{\Rightarrow} \exists c \in \mathbb{R}$ so dass $\alpha - c\omega$ exakt ist, d.h. $\alpha - c\omega = dg$

für eine $\mathcal{C}^\infty$ -Funktion $g: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ($\mathcal{C}^\infty$ da $dg = \alpha - c\omega$ und $\alpha, \omega \in \mathcal{C}^\infty$)
d.h. $g \in \Omega^0(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \mathbb{R})$.

$\Rightarrow \alpha = c \cdot \omega + \underbrace{dg}_{\in \text{im}(d: \Omega^0 \rightarrow \Omega^1)} \Rightarrow [\alpha] = c \cdot [\omega] \text{ für } c \in \mathbb{R}.$



8.3. $U \subset \mathbb{R}^3$ offen, $a, b, c: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ Abbildungen und

$$d\vec{s} = (dx_1, dx_2, dx_3)$$

$$d\vec{S} = (dx_2 \wedge dx_3, dx_3 \wedge dx_1, dx_1 \wedge dx_2)$$

$$dV = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.$$

Zeige:

$$a) (a \cdot d\vec{s}) \wedge (b \cdot d\vec{s}) = (a \times b) \cdot d\vec{S}$$

$$b) (a \cdot d\vec{s}) \wedge (b \cdot d\vec{S}) = \langle a | b \rangle dV$$

$$c) (a \cdot d\vec{s}) \wedge (b \cdot d\vec{s}) \wedge (c \cdot d\vec{s}) = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} dV.$$

Beweis:

$$a) (a \cdot d\vec{s}) \wedge (b \cdot d\vec{s}) = (a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + a_3 dx_3) \wedge (b_1 dx_1 + b_2 dx_2 + b_3 dx_3)$$

$$\stackrel{dx_i \wedge dx_i = 0, \text{ ek.}}{=} a_1 dx_1 \wedge b_2 dx_2 + a_1 dx_1 \wedge b_3 dx_3 + a_2 dx_2 \wedge b_1 dx_1 + a_2 dx_2 \wedge b_3 dx_3$$

$$+ a_3 dx_3 \wedge b_1 dx_1 + a_3 dx_3 \wedge b_2 dx_2$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2) dx_2 \wedge dx_3 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) dx_3 \wedge dx_1 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) dx_1 \wedge dx_2$$

$$= (a \times b) \cdot d\vec{S}$$

$$b) (a \cdot d\vec{s}) \wedge (b \cdot d\vec{S}) = (a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + a_3 dx_3) \wedge (b_1 dx_2 \wedge dx_3 + b_2 dx_3 \wedge dx_1 + b_3 dx_1 \wedge dx_2)$$

$$= a_1 dx_1 \wedge b_1 dx_2 \wedge dx_3 + a_2 dx_2 \wedge b_2 dx_3 \wedge dx_1 + a_3 dx_3 \wedge b_3 dx_1 \wedge dx_2$$

$$= (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

$$= \langle a | b \rangle dV$$

c) Mit VL oder direkt nachrechnen:

$$(a \cdot d\vec{s}) \wedge (b \cdot d\vec{s}) \wedge (c \cdot d\vec{s}) = (a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + a_3 dx_3) \wedge (b_1 dx_1 + b_2 dx_2 + b_3 dx_3) \wedge (c_1 dx_1 + c_2 dx_2 + c_3 dx_3)$$

$$= a_1 dx_1 \wedge b_2 dx_2 \wedge c_3 dx_3 + a_1 dx_1 \wedge b_3 dx_3 \wedge c_2 dx_2$$

$$+ a_2 dx_2 \wedge b_1 dx_1 \wedge c_3 dx_3 + a_2 dx_2 \wedge b_3 dx_3 \wedge c_1 dx_1$$

$$+ a_3 dx_3 \wedge b_1 dx_1 \wedge c_2 dx_2 + a_3 dx_3 \wedge b_2 dx_2 \wedge c_1 dx_1$$

$$= (a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1) dx_1 dx_2 dx_3$$

$$= \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} dV$$



8.4. Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf dem $\mathbb{R}^3$ und $U = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| < 1\}$.

Weiter seien $a, b: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbare Abbildungen.

Zeige:

a) Ist $\operatorname{rot} a = 0$, so existiert $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit $\operatorname{grad} f = a$.

b) Ist $\operatorname{div} b = 0$, so existiert $c: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ differenzierbar mit $b = \operatorname{rot} c$.

Beweis:

Vorbereitungen:

- U ist sternförmig mit Zentrum 0 , denn ist $p \in U$ beliebig und $q \in [0, p]$, dann: $q = s \cdot 0 + (1-s) \cdot p$ für ein $s \in [0, 1]$, also

$$\|q\| = (1-s)\|p\| < (1-s) \leq 1 \quad \text{d.h. } q \in U.$$

Also: $[0, p] \subset U$.

- Untersuche äußere Ableitung im $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} - f \in C^1(U, \mathbb{R}) &\Rightarrow df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3 \\ &= (\operatorname{grad} f) \cdot d\vec{s} \end{aligned}$$

$$- a: U \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ wie in Vor.} \Rightarrow d(a \cdot d\vec{s}) = d(a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + a_3 dx_3)$$

$$= da_1 \wedge dx_1 + da_2 \wedge dx_2 + da_3 \wedge dx_3$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial a_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial a_1}{\partial x_3} dx_3 \right) \wedge dx_1 + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial a_2}{\partial x_3} dx_3 \right) \wedge dx_2 \\ &\quad + \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial a_3}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial a_3}{\partial x_3} dx_3 \right) \wedge dx_3 \end{aligned}$$

$$= \frac{\partial a_1}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_1 + \frac{\partial a_1}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial a_1}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1$$

$$+ \frac{\partial a_2}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_2 + \frac{\partial a_2}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_2$$

$$+ \frac{\partial a_3}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_3 + \frac{\partial a_3}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 + \frac{\partial a_3}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_3$$

↖ "Hauptdiagonalelemente" = 0.

$$= \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3} \right) dx_2 \wedge dx_3 + \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1} \right) dx_3 \wedge dx_1 + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2} \right) dx_1 \wedge dx_2$$

$$= (\operatorname{rot} a) \cdot d\vec{S}$$

$$\text{Also: } d(a \cdot d\vec{S}) = (\operatorname{rot} a) \cdot d\vec{S}$$

$$- a: U \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ wie in Vor. } \Rightarrow d(a \cdot d\vec{S}) = d(a_1 dx_2 \wedge dx_3 + a_2 dx_3 \wedge dx_1 + a_3 dx_1 \wedge dx_2)$$

$$= \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial a_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial a_1}{\partial x_3} dx_3 \right) \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

$$+ \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial a_2}{\partial x_3} dx_3 \right) \wedge dx_3 \wedge dx_1$$

$$+ \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial a_3}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial a_3}{\partial x_3} dx_3 \right) \wedge dx_1 \wedge dx_2$$

$$= \frac{\partial a_1}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_1 + \frac{\partial a_3}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2$$

$$= \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3} \right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = (\operatorname{div} a) dV$$

$$\text{Also: } d(a \cdot d\vec{S}) = (\operatorname{div} a) dV$$

Damit zum Beweis:

$$a) \text{ Sei } \operatorname{rot} a = 0, \text{ d.h. } d(a \cdot d\vec{S}) = (\operatorname{rot} a) \cdot d\vec{S} = 0.$$

$$U \text{ sternförmig} \xRightarrow{\text{Poincaré}} \exists f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}) \text{ (0-Form) mit } df = a \cdot d\vec{S},$$

$$\text{d.h. } a \cdot d\vec{S} = df = (\operatorname{grad} f) \cdot d\vec{S}, \text{ also}$$

$$\operatorname{grad} f = a.$$

$$b) \text{ Sei } \operatorname{div} b = 0, \text{ d.h. } d(b \cdot d\vec{S}) = (\operatorname{div} b) dV = 0.$$

$$U \text{ sternförmig} \xRightarrow{\text{Poincaré}} \exists w \text{ stetig differenzierbare 1-Form mit } dw = b \cdot d\vec{S}$$

$$\text{Es ist } w = c \cdot d\vec{S} \text{ für ein } c: U \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ stetig differenzierbar, also}$$

$$b \cdot d\vec{S} = dw = d(c \cdot d\vec{S}) = (\operatorname{rot} c) \cdot d\vec{S}, \text{ d.h.}$$

$$\operatorname{rot} c = b.$$

