

Analysis III, SoSe 2011 - Lösung Blatt 9

9.1. Sei $\mathbb{R}$ mit der natürlichen Topologie ausgestattet und $Z := \mathbb{R} \cup \{0'\}$ für ein Objekt $0'$ mit $0' \notin \mathbb{R}$. Es sei

$$\mathcal{B} := \{U \subset \mathbb{R} \mid U \text{ offen in } \mathbb{R}\} \cup \{]-\varepsilon, 0[\cup \{0'\} \cup]0, \varepsilon[\mid \varepsilon > 0\} \subset \mathcal{P}(Z).$$

Zeige:

- $\mathcal{B}$ ist Basis einer Topologie auf Z .
- Die von $\mathcal{B}$ erzeugte Topologie besitzt eine abzählbare Basis.
- Jeder Punkt $p \in Z$ besitzt eine offene Umgebung, welche homöomorph zu $\mathbb{R}$ ist.
- Z ist kein Hausdorff-Raum.

Beweis:

a) Zu zeigen: $\bigcup_{A \in \mathcal{B}} A = Z$ und $B_1, B_2 \in \mathcal{B}, b \in B_1 \cap B_2 \Rightarrow \exists B_3 \in \mathcal{B} : b \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

$$\bullet Z = \mathbb{R} \cup \{0'\} = \underbrace{\mathbb{R}}_{\substack{\uparrow \\ \mathcal{B}}} \cup \underbrace{([-\varepsilon, 0[\cup \{0'\} \cup]0, \varepsilon[)}_{\in \mathcal{B}} \Rightarrow \bigcup_{A \in \mathcal{B}} A = Z.$$

• Seien $U, V \in \mathcal{B}$. Fallunterscheidung:

- $U, V \subset \mathbb{R}$ offen $\Rightarrow U \cap V \subset \mathbb{R}$ offen, d.h. $U \cap V \in \mathcal{B}$, ok.

- $U =]-\varepsilon_1, 0[\cup \{0'\} \cup]0, \varepsilon_1[$, $V =]-\varepsilon_2, 0[\cup \{0'\} \cup]0, \varepsilon_2[$ für $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$.

Setze $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, dann gilt offenbar:

$$U \cap V =]-\varepsilon, 0[\cup \{0'\} \cup]0, \varepsilon[\in \mathcal{B} \text{ ok.}$$

- $U \subset \mathbb{R}$ offen, $V =]-\varepsilon, 0[\cup \{0'\} \cup]0, \varepsilon[$.

$$\Rightarrow U \cap V = \bigcup_{\substack{\nearrow \\ 0' \notin \mathbb{R}}} U \cap \underbrace{([-\varepsilon, 0[\cup]0, \varepsilon[)}_{\subset \mathbb{R} \text{ offen}} \subset \mathbb{R} \text{ offen also aus } \mathcal{B}, \text{ ok.}$$

Also: $\mathcal{B}$ ist Basis einer Topologie auf Z .

b) Setze $\mathcal{A}' = \{]a, b[\mid a, b \in \mathbb{Q}\}$. Da $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ dicht ist, ist $\mathcal{A}'$ offenbar eine abzählbare Basis der natürlichen Topologie von $\mathbb{R}$. Mit einem analogen Argument wie in Teil a) folgt, dass

$$\mathcal{A}_8 = \mathcal{A}' \cup \{]-\frac{1}{n}, 0[\cup \{0\} \cup]0, \frac{1}{n}[\mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$$

Basis einer Topologie auf $\mathbb{Z}$ ist. Offenbar ist $\mathcal{A}$ abzählbar mit $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$.

Da sich jede Menge aus $\mathcal{B}$ als Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{A}$ schreiben lässt, erzeugen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ dieselbe Topologie auf $\mathbb{Z}$.

c) Sei $x \in \mathbb{Z}$. Fallunterscheidung:

- $x \in \mathbb{R}$. $\Rightarrow \mathbb{R} \subset \mathbb{Z}$ ist offene Umgebung von x und die Abbildung $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto t$ offenbar der gesuchte Homöomorphismus (da $\mathbb{R} \subset \mathbb{Z}$ als Unterraum die natürliche Topologie trägt).

- $x = 0'$. Es ist $\mathbb{Z} \setminus \{0\} = \underbrace{\mathbb{R} \setminus \{0\}}_{\text{offen in } \mathbb{Z}} \cup \underbrace{(-1, 0[\cup \{0'\} \cup]0, 1[)}_{\text{offen in } \mathbb{Z}}$, d.h.

$\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ist offene Umgebung von $0' \in \mathbb{Z}$. Betrachte die (offenbar) bijektive Abbildung

$$\psi: \mathbb{Z} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \psi(p) = \begin{cases} 0 & \text{falls } p = 0' \\ p & \text{sonst} \end{cases}$$

ψ ist stetig, denn sei $U \subset \mathbb{R}$ offen.

- $0 \notin U \Rightarrow \psi^{-1}(U) = U \cap \mathbb{R} \subset \mathbb{Z}$ offen in $\mathbb{Z}$

- $0 \in U \xRightarrow{U \text{ offen}}]-\varepsilon, \varepsilon[\subset U$ für $\varepsilon > 0$ geeignet

$$\Rightarrow \psi^{-1}(U) = U \setminus \{0\} \cup \{0'\}$$

$$= \underbrace{U \setminus \{0\}}_{\text{offen}} \cup \underbrace{(-\varepsilon, 0[\cup \{0'\} \cup]0, \varepsilon[)}_{\text{offen}} \text{ offen in } \mathbb{Z}.$$

Auch ψ^{-1} ist stetig, sei $U \subset \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ offen.

- $0' \notin U \Rightarrow U \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ offen und $\psi(U) = U$.

- $0' \in U \Rightarrow]-\varepsilon, 0[\cup \{0'\} \cup]0, \varepsilon[\subset U$ für $\varepsilon > 0$ geeignet

$$\Rightarrow \psi(U) = U \setminus \{0'\} \cup \underbrace{]-\varepsilon, \varepsilon[}_{\text{offen in } \mathbb{R}}$$

Da $\{0'\}$ abgeschlossen ist, ist $U \setminus \{0'\}$ offen in $\mathbb{Z}$, also offen in $\mathbb{R}$. Insgesamt $\psi(U)$ offen.

$\Rightarrow \psi$ ist der gesuchte Homöomorphismus.

d) Sei $U \subset \mathbb{Z}$ beliebige Umgebung von 0 und $V \subset \mathbb{Z}$ beliebige Umgebung von $0'$.

$\stackrel{\mathcal{B} \text{ Basis}}{\Rightarrow} \exists \tilde{U}, \tilde{V} \in \mathcal{B}$ mit $0 \in \tilde{U} \subset U$ und $0' \in \tilde{V} \subset V$

$\Rightarrow \tilde{U} \subset \mathbb{R}$ offen und $\tilde{V} =]-\varepsilon_2, 0[\cup \{0'\} \cup]0, \varepsilon_2[$ für ein $\varepsilon_2 > 0$.

Da $0 \in \tilde{U}$ und $\tilde{U}$ offen $\exists \varepsilon_1 > 0$ mit $]-\varepsilon_1, \varepsilon_1[\subset \tilde{U}$.

Setze $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, dann:

$$\begin{array}{l}]-\varepsilon_1, \varepsilon_1[\subset \tilde{U} \subset U \\]0, \varepsilon[\subset]0, \varepsilon_2[\subset \tilde{V} \subset V \end{array}$$

Also: $]0, \varepsilon[\subset U \cap V$, d.h. $U \cap V \neq \emptyset$.

$\Rightarrow 0$ und $0'$ lassen sich nicht durch Umgebungen in $\mathbb{Z}$ trennen.



9.2. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, Γ eine Gruppe und $\alpha: \Gamma \rightarrow \text{Aut}(M)$ eine freie, eigentlich diskontinuierliche Wirkung auf M . $M/\Gamma := M/\sim$ wobei $p \sim q$, falls $gp = q$ für ein $g \in \Gamma$ ist, sei mit der Quotiententopologie ausgestattet.

Zeige:

- a) M/Γ trägt kanonisch die Struktur einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit mit $\dim M/\Gamma = \dim M$, so dass die Restklassenabbildung $\pi: M \rightarrow M/\Gamma$ differenzierbar ist.
- b) $f: M/\Gamma \rightarrow N$ differenzierbar $\Leftrightarrow f \circ \pi: M \rightarrow N$ differenzierbar.

Beweis:

a) Zur Topologie von M/Γ . Nach Konstruktion ist $0 \subset M/\Gamma$ offen $\Leftrightarrow \pi^{-1}(0) \subset M$ offen ist, d.h. π ist stetig.

• Behauptung: π ist offen

Dazu: Sei $U \subset M$ offen.

$$\Rightarrow \pi^{-1}(\pi(U)) \stackrel{\text{Konstr.}}{=} \bigcup_{g \in \Gamma} gU = \bigcup_{g \in \Gamma} \alpha(g)(U)$$

$\uparrow$
 Diffeom. also
 Homöomorphismus

$\Rightarrow \forall g \in \Gamma$ ist $\alpha(g)(U)$ offen, also ist $\pi^{-1}(\pi(U))$ offen und damit nach Konstruktion auch $\pi(U) \subset M/\Gamma$.

• M/Γ ist Hausdorff-Raum, denn seien $[p], [q] \in M/\Gamma$ mit $[p] \neq [q]$

$\Rightarrow \nexists g \in \Gamma: gp = q$, d.h. $\underbrace{q \notin \Gamma p}_{\in \Gamma q}$, also $\Gamma q \neq \Gamma p$

eig.-disk. $\Rightarrow \exists$ offene Umgebungen $p \in U, q \in V$ mit $gU \cap g'V = \emptyset \quad \forall g, g' \in \Gamma$.

Setze $\tilde{U} := \pi(U)$, $\tilde{V} := \pi(V) \Rightarrow \tilde{U}$ offene Umgebung von $[p]$,
 $\tilde{V}$ offene Umgebung von $[q]$.

$$\nearrow [z] \in \tilde{U} \cap \tilde{V} \Rightarrow \exists w \in [z] \text{ mit } w \in U \text{ und} \\ \exists v \in [z] \text{ mit } v \in V$$

$$\Rightarrow gw = z, g'v = z \text{ für gewisse } g, g' \in \Gamma$$

$$\Rightarrow z \in gU \cap g'V = \emptyset \quad \text{!}$$

Also: $\tilde{U} \cap \tilde{V} = \emptyset$, d.h. $M/\sim$ ist Hausdorff-Raum.

• $M/\sim$ besitzt abzählbare Basis, denn sei $\mathcal{B}$ abzählbare Basis von M .

Setze $\tilde{\mathcal{B}} := \{\pi(U) \mid U \in \mathcal{B}\} \Rightarrow \tilde{\mathcal{B}}$ System offener Mengen

$$- \pi \text{ surjektiv} \Rightarrow M/\sim = \pi(M) = \pi\left(\bigcup_{A \in \mathcal{B}} A\right) = \bigcup_{A \in \mathcal{B}} \pi(A) = \bigcup_{U \in \tilde{\mathcal{B}}} U$$

$$- \text{Sei } U \subset M/\sim \text{ offen} \Rightarrow \pi^{-1}(U) \subset M \text{ offen} \Rightarrow \exists A_i \in \mathcal{B}, i \in I:$$

$$\pi^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} A_i \Rightarrow \underbrace{U}_{\pi \text{ surj.}} = \pi(\pi^{-1}(U)) = \pi\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} \underbrace{\pi(A_i)}_{\in \tilde{\mathcal{B}}}$$

$$\Rightarrow \tilde{\mathcal{B}} \text{ ist abzählbare Basis der Topologie von } M/\sim.$$

• M zusammenhängend $\Rightarrow M/\sim$ zusammenhängend.

$$\nearrow M/\sim = A \dot{\cup} B \text{ für } A, B \subset M/\sim \text{ offen, } A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow M = \pi^{-1}(M/\sim) = \pi^{-1}(A \dot{\cup} B) = \pi^{-1}(A) \dot{\cup} \pi^{-1}(B)$$

$$(A \cap B = \emptyset \Rightarrow \pi^{-1}(A) \cap \pi^{-1}(B) = \pi^{-1}(A \cap B) = \pi^{-1}(\emptyset) = \emptyset)$$

$$\overset{M \text{ zshg.}}{\Rightarrow} \emptyset = \pi^{-1}(A) = \emptyset \xRightarrow{\pi \text{ surj.}} A = \emptyset \quad \text{!}$$

(Argument nicht zwingend erforderlich: Häufig werden Mannigfaltigkeiten ohne „zusammenhängend“ definiert).

Konstruktion eines Atlas:

- Sei $q \in M/\Gamma$. Wähle $p \in M$ mit $\pi(p) = q$.

$\xRightarrow[\text{frei}]{\text{Wirkung}}$ $\exists$ Umgebung U_1 von p mit $gU_1 \cap U_1 = \emptyset \quad \forall g \in \Gamma \setminus \{e\}$.

M MPkt. $\Rightarrow \exists$ Karte (U_2, ψ) um p . Setze $U = U_1 \cap U_2$, $\psi = \psi|_U$.

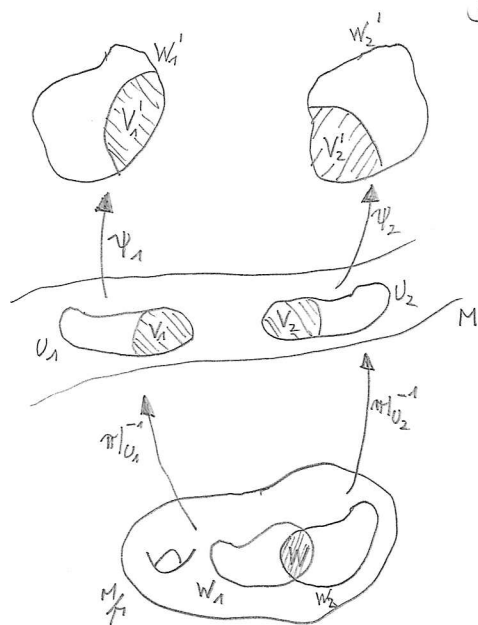
$\Rightarrow (U, \psi)$ ist Karte um p mit $gU \cap U = \emptyset \quad \forall g \in \Gamma \setminus \{e\}$.

$\Rightarrow \pi|_U: U \rightarrow \pi(U) =: W$ ist bijektiv, also (da π offen und stetig) ein Homöomorphismus.

Setze $\theta: W \rightarrow W' \subset \mathbb{R}^{\dim(M)}$, $\theta = \psi \circ \pi|_U^{-1} \Rightarrow \theta$ Homöomorphismus

$\leadsto$ Verwende (W, θ) als Karte um $q \in M/\Gamma$.

- Verträglichkeit der Karten: Seien $(W_1, \theta_1), (W_2, \theta_2)$ Karten mit $W = W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$
 $\Leftrightarrow$ sei W zusammenhängend (sonst: Betrachte Zusammenhangskomponenten getrennt).



Setze $V_i := \pi|_{U_i}^{-1}(W) \Rightarrow V_i$ zusammenhängend
 und $V'_i := \theta_i^{-1}(W)$, $g := \theta_2 \circ \theta_1^{-1}: V'_1 \rightarrow V'_2$

Für $g, h \in \Gamma$ ist $h^{-1}(gV_1 \cap hV_1) = (h^{-1}g)V_1 \cap V_1 = \emptyset$
 falls $g \neq h$, d.h. $gV_1 \cap hV_1 = \emptyset$ für $g \neq h$.

Da $\pi(V_1) = W$ bijektiv, folgt nach Konstruktion

$$\pi^{-1}(W) = \bigcup_{g \in \Gamma} gV_1. \quad \text{Da die } gV_1 \text{ und } V_2$$

zusammenhängend sind, und $\pi(V_2) = W$ bijektiv,

ist $V_2 = gV_1$ für ein $g \in \Gamma$. Da $\pi|_{U_2}^{-1} \circ \pi|_{U_1}(q) = gq$ für $q \in V_1$

muss damit stets $gq = g$ sein, d.h. $\pi|_{U_2}^{-1} \circ \pi|_{U_1}: V_1 \rightarrow V_2$ ist der
 Diffeomorphismus $q \mapsto gq$. Damit ist der Kartenwechsel

$$\theta_2 \circ \theta_1^{-1} = \psi_2 \circ \pi|_{U_2}^{-1} \circ \pi|_{U_1} \circ \psi_1^{-1}$$

eine Kartendarstellung des Diffeomorphismus $q \mapsto gq$ und damit selbst
 ein Diffeomorphismus.

$\Rightarrow M/\sim$ ist mit diesem Atlas eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit $\dim(M/\sim) = \dim(M)$.

Klar: π ist in lokalen Koordinaten die Kartendarstellung eines Diffeomorphismus $g \mapsto g \circ \pi$ und damit differenzierbar.

b) Da die Differenzierbarkeit einer Abbildung $f: M/\sim \rightarrow N$ lokal in Karten nachgerechnet wird, ist die Aussage nach Konstruktion des Atlas von $M/\sim$ klar: Lokal ist für Karte auf $M/\sim$:

$$f \circ (\psi \circ \pi^{-1})^{-1} = (f \circ \pi) \circ \psi^{-1}$$

$\uparrow$
 $f \circ \pi$ in lokalen
Karte von M .



9.3. Seien M, N differenzierbare Mannigfaltigkeiten mit $\dim M = m > \dim N = n$ und $f: M \rightarrow N$ C^∞ -Abbildung. Sei $q \in N$ regulärer Wert von f , d.h. $\forall p \in f^{-1}(\{q\})$ ist $T_p f$ surjektiv. Zeige: Ist $L := f^{-1}(\{q\}) \neq \emptyset$, so ist L eine $(m-n)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von M .

Beweis:

Sei $p \in L$ fixiert. Konstruieren passende Karte. Wähle Karten (U, φ) um p in M , (V, ψ) um q in N mit $\psi(q) = 0$ und $\varphi(U) \subset V$

(Konstruktion: Mit Translation im $\mathbb{R}^n$ -Diffeomorphismus - $\psi(q) = 0$, verkleinere dann U)

Setze $g := \psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \rightarrow \psi(V)$ (Kartendarstellung von $f \Rightarrow C^\infty$).

$\forall \tilde{p} \in f^{-1}(\{q\}) \cap U$ kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} T_{\tilde{p}} M & \xrightarrow{T_{\tilde{p}} f} & T_{\tilde{q}} N \\ T_{\tilde{p}} \varphi \downarrow & & \downarrow T_{\tilde{q}} \psi \\ \mathbb{R}^m & \xrightarrow{Dg|_{\varphi(\tilde{p})}} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

$\stackrel{\text{Vor.}}{\Rightarrow} Dg(x)$ surjektiv $\forall x \in g^{-1}(\{0\})$

d.h. 0 ist regulärer Wert von g .

$\stackrel{\text{Ana II}}{\Rightarrow} X := g^{-1}(\{0\})$ ist $(m-n)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^m$.

$\Rightarrow \exists$ Karte (W, θ) des $\mathbb{R}^m$ um $\varphi(p)$, $\exists W \subset \varphi(U)$ (verkleinere) mit $\theta: W \rightarrow W'$ Diffeomorphismus (wähle id als Karte des $\mathbb{R}^m$..) so dass

$$\theta(X \cap W) = W' \cap \mathbb{R}^{m-n} \times \{0\}$$

Setze $\tilde{W} := \varphi^{-1}(W) \subset U$ offen, so ist offenbar $(\tilde{W}, \theta \circ \varphi)$ Karte von M um p und nach Konstruktion ist

$$\theta \circ \varphi(L \cap \tilde{W}) = \theta(X \cap W) = W' \cap \mathbb{R}^{m-n} \times \{0\}.$$

p beliebig
 $\Rightarrow$
aus L

L ist $(m-n)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von M .



9.4. Zeige:

a, $GL_n(\mathbb{R})$ ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $\det: GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Submersion.

b, $SL_n(\mathbb{R})$ ist eine Untermannigfaltigkeit von $GL_n(\mathbb{R})$.

c, $Sym_n(\mathbb{R}) := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A^t = A\}$ ($\mathbb{R}$ -Vektorraum). Zeige, dass $GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow Sym_n(\mathbb{R}), A \mapsto A^t A$ eine Submersion ist.

d, $O_n(\mathbb{R})$ ist eine Untermannigfaltigkeit von $GL_n(\mathbb{R})$.

Beweis:

a, $\mathbb{R}^{n \times n}$ ist als $\mathbb{R}$ -Vektorraum kanonisch eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. $\det: \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ ist als Polynom in den Einträgen der Matrix eine C^∞ -Abbildung, also insbesondere stetig. Da $\mathbb{R} \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}$ offen ist, ist $GL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \subset \mathbb{R}^{n \times n}$ offen und damit kanonisch eine differenzierbare Mannigfaltigkeit.

• Sei $A \in GL_n(\mathbb{R})$. In „lokalen Koordinaten“ ist $T_A \det$ gegeben durch:

$$\mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}, B \mapsto \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\det(A+tB) - \det(A)}{t}$$

Wir müssen die Surjektivität dieser Abbildung zeigen und berechnen sie an der Stelle $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ($= T_A GL_n(\mathbb{R})$):

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\det(A+tA) - \det(A)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1+t)^n - 1}{t} \det(A) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k - 1}{t} \right) \det(A) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} t^{k-1} \right) \det(A) \\ &= \binom{n}{1} \det(A) = n \cdot \det(A) \neq 0 \quad (\text{da } A \in GL_n(\mathbb{R})). \end{aligned}$$

$\xRightarrow[\text{1-dim.}]{\text{Bildraum}}$ $T_A \det$ ist surjektiv und $\det$ also eine Submersion.

b) Es ist

$$SL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\{1\}),$$

also nach 9.3. und 9.4. a) eine Untermannigfaltigkeit von $GL_n(\mathbb{R})$.

c) Wir berechnen wie in a), an der Stelle $A \in GL_n(\mathbb{R})$ die Richtungsableitung in Richtung $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

$$\frac{(A+tB)^t (A+tB) - A^t A}{t} = \frac{1}{t} (A^t A + t A^t B + t B^t A + t^2 B^t B - A^t A)$$

$$= A^t B + B^t A + t B^t B \xrightarrow{t \rightarrow 0} A^t B + B^t A \in \text{Sym}_n(\mathbb{R})$$

Wir müssen die Surjektivität von $\mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \text{Sym}_n(\mathbb{R}), B \mapsto A^t B + B^t A$ zeigen.

Sei $C \in \text{Sym}_n(\mathbb{R})$ beliebig. Setze $B := \frac{1}{2} (A^{-1})^t C$ (beachte: $A \in GL_n(\mathbb{R})$).

Dann:

$$\begin{aligned} A^t B + B^t A &= \frac{1}{2} A^t (A^{-1})^t C + \frac{1}{2} ((A^{-1})^t C)^t A \\ &= \frac{1}{2} (A^{-1} A)^t C + \frac{1}{2} C^t A^{-1} A = \frac{1}{2} (C + \underbrace{C^t}_{=C}) \\ &= C \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Die angegebene Abbildung ist eine Submersion.

d) Es ist $O_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid A^t A = E\}$ (E : Einheitsmatrix).

Bezeichne f die Submersion aus c), dann:

$$O_n(\mathbb{R}) = f^{-1}(\{E\}) \subset GL_n(\mathbb{R})$$

Also ist $O_n(\mathbb{R})$ nach 9.3. eine Untermannigfaltigkeit von $GL_n(\mathbb{R})$.

