

Analysis III, SoSe 2011 - Riemannsches Integral, Jordan-Messbarkeit

1. Das Riemann-Integral

Definition:

(i) Sind $I_j = [a_j, b_j]$, $j \in \{1, \dots, n\}$ Intervalle, so heißt

$$Q := I_1 \times \dots \times I_n \subset \mathbb{R}^n$$

Quader.

(ii) Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ mit

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

heißt Partition von $[a, b]$.

P, P' Partitionen von $[a, b]$. P' heißt feiner als P („ $P' < P$ “) falls $P \subset P'$ gilt.

(iii) Ist Q ein Quader, $P_j = \{t_{j,0}, \dots, t_{j,N_j}\}$ für $j \in \{1, \dots, n\}$ Partition von I_j , so heißt

$$P := P_1 \times \dots \times P_n$$

Partition von Q .

P, P' Partitionen von Q . P' heißt feiner als P („ $P' < P$ “) wenn $P'_j < P_j \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$.

(iv) P Partition von Q .

$$\mathcal{P}(Q) := \left\{ [t_{1,v_1}, t_{1,v_1+1}] \times \dots \times [t_{n,v_n}, t_{n,v_n+1}] \mid v_j \in \{0, \dots, N_j-1\} \right\}$$

ist die Menge der Unterquader von Q (zur Partition P)

(v) Der Inhalt eines Quaders ist

$$v([a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]) := (b_1 - a_1) \cdot \dots \cdot (b_n - a_n)$$

Definition:

Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ Quader, P Partition von Q , $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt.

(i) Ist $S \in \mathcal{P}(Q)$ Unterquader, dann:

$$m_S(f) := \inf \{ f(x) \mid x \in S \} \quad (= \inf_S f)$$

$$M_S(f) := \sup \{ f(x) \mid x \in S \} \quad (= \sup_S f)$$

(ii) Dann heißt

$$s(f, P) := \sum_{S \in \mathcal{P}(Q)} m_S(f) \cdot v(S) \quad \text{Untersumme von } f \text{ bzgl. } P$$

$$S(f, P) := \sum_{S \in \mathcal{P}(Q)} M_S(f) \cdot v(S) \quad \text{Obersumme von } f \text{ bzgl. } P$$

Eigenschaften:

~~///~~ P, P' Partitionen von Q mit $P' \leq P$. Dann:

$$-\infty < s(f, P) \leq s(f, P') \leq S(f, P') \leq S(f, P) < \infty$$

Definition:

Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ Quader, $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt.

$$(i) \quad \overline{\int_Q} f dx := \inf \{ S(f, P) \mid P \text{ Partition von } Q \}$$

heißt Oberintegral.

$$(ii) \quad \underline{\int_Q} f dx := \sup \{ s(f, P) \mid P \text{ Partition von } Q \}$$

heißt Unterintegral.

(iii) f heißt Riemann-integrierbar, falls $\underline{\int_Q} f dx = \overline{\int_Q} f dx$. In diesem Fall:

$$\int_Q f dx := \overline{\int_Q} f dx \quad (= \underline{\int_Q} f dx)$$

Eigenschaften:

$\mathcal{R}(Q) := \{ f: Q \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ Riemann-integrierbar} \}$ ist ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum
und $\int_Q : \mathcal{R}(Q) \rightarrow \mathbb{R}$

linear und monoton, d.h. $f, g \in \mathcal{R}(Q)$, $\alpha, \mu \in \mathbb{R}$, dann:

$$\int_Q (\alpha f + \mu g) dx = \alpha \int_Q f dx + \mu \int_Q g dx$$

$$\text{und } f \leq g \Rightarrow \int_Q f dx \leq \int_Q g dx.$$

Beispiele: (für $\mathcal{R}(Q)$)

- Konstante Funktionen
- stetige Funktionen

Frage: Wie lassen sich Riemann-integrierbare Funktionen charakterisieren?

2. Riemannsches Integrabilitätskriterium

Satz:

$Q \subset \mathbb{R}^n$ Quader, $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Äquivalent:

(i) $f \in \mathcal{R}(Q)$

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \exists$ Partition P von Q mit

$$S(f, P) - s(f, P) \leq \varepsilon$$

3. Riemannsche Summen

- Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ Quader und P Partition von Q . Eine Menge $\eta = \{ \eta_S \mid S \in \mathcal{P}(Q) \} \subset Q$ heißt Menge von zu P passenden Zwischenpunkten, falls $\eta_S \in S \quad \forall S \in \mathcal{P}(Q)$ gilt.

- Dann heißt

$$S(f, P, \eta) := \sum_{S \in P(Q)} f(\eta_S) \cdot v(S)$$

Zwischensumme (zu P und η) bzw. Riemannsche Summe.

- Ist P Partition von Q , so heißt

$$|P| := \max \{ \text{diam } S \mid S \in P(Q) \}$$

wobei $\text{diam } S := \sup \{ |a-b| \mid a, b \in S \}$ ist, Feinheit von P .

- Eine Folge (P^k) von Partitionen P^k von Q heißt

Partitionsnullfolge, wenn $\lim_{k \rightarrow \infty} |P^k| = 0$ gilt.

Satz:

$f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Äquivalent:

(i) $f \in \mathcal{R}(Q)$

(ii) $\exists c \in \mathbb{R}$ mit: Für jede Partitionsnullfolge (P^k) von Q mit Folge passender Zwischenpunkte (η^k) gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S(f, P^k, \eta^k) = c.$$

In diesem Fall gilt $c = \int_Q f dx$.

4. Lebesgue - Kriterium

Definition:

(i) $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt vom Maß 0 (Lebesgue-M Nullmenge), falls

$\forall \varepsilon > 0 \exists Q_j \subset \mathbb{R}^n$ Quader für $j \in \mathbb{N}$ mit

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^{\infty} v(Q_j) \leq \varepsilon$$

(ii) $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt vom Volumen 0 (Jordan-M Nullmenge), falls

$\forall \varepsilon > 0 \exists Q_1, \dots, Q_N \subset \mathbb{R}^n$ Quader mit

$$A \subset \bigcup_{j=1}^N Q_j \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^N v(Q_j) \leq \varepsilon$$

Bemerkung: Die abgeschlossenen Quader können durch offene ersetzt werden, ohne die Begriffe zu verändern.

Eigenschaften:

(i) A vom Volumen 0 $\Rightarrow A$ vom Maß 0

(Umkehrung i.A. falsch!)

(ii) Sind $A_j \subset \mathbb{R}^n$ für $j \in \mathbb{N}$ vom Maß 0, dann ist auch

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \quad \text{vom Maß 0.}$$

(iii) $A \subset \mathbb{R}^n$ abzählbar $\Rightarrow A$ vom Maß 0.

(iv) Ist $A \subset \mathbb{R}^n$ vom Maß 0 und kompakt $\Rightarrow A$ vom Volumen 0.

Bemerkung:

Nullmengen kommt in der Maß- und Integrationstheorie eine besondere Bedeutung zu, in Form von „zulässigen Ausnahmemengen“. Das folgende Kriterium für Riemann-integrierbarkeit kann als ein erstes Beispiel angesehen werden.

Satz:

$Q \subset \mathbb{R}^n$ Quader, $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Äquivalent:

(i) $f \in \mathcal{R}(Q)$

(ii) Die Menge $B := \{x \in Q \mid f \text{ in } x \text{ unstetig}\}$ ist vom Maß 0.

5. Der Satz von Fubini (für das Riemann-Integral)

Satz:

Seien $A \subset \mathbb{R}^n$ und $B \subset \mathbb{R}^m$ Quader und $f: A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar.

$\forall x \in A$ setze $f_x: B \rightarrow \mathbb{R}$, $f_x(y) := f(x, y)$. Sei weiter

$$\psi: A \rightarrow \mathbb{R}, \psi(x) := \int_B f_x(y) dy$$

$$\varphi: A \rightarrow \mathbb{R}, \varphi(x) := \int_{\underline{B}} f_x(y) dy.$$

Dann gilt: $\varphi, \psi \in \mathcal{R}(A)$ und

$$\begin{aligned} \int_{A \times B} f(x, y) d(x, y) &= \int_A \varphi(x) dx \quad \left(= \int_A \left(\int_{\underline{B}} f(x, y) dy \right) dx \right) \\ &= \int_A \psi(x) dx \quad \left(= \int_A \left(\int_B f(x, y) dy \right) dx \right) \end{aligned}$$

Bemerkungen:

(i) Achtung: Die Funktionen f_x müssen nicht zwingend Riemann-integrierbar sein. Es gilt der Satz:

$C := \{x \in A \mid f_x \notin \mathcal{R}(B)\}$ ist vom Maß 0.

(ii) Ist $f: A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ stetig (und damit aus $\mathcal{R}(A \times B)$), so ist $\forall x \in A$ offenbar auch f_x stetig, d.h. $f_x \in \mathcal{R}(B)$. In diesem Fall gilt also

$$\int_{A \times B} f(x, y) d(x, y) = \int_A \left(\int_B f(x, y) dy \right) dx.$$

(iii) Neben seiner Wichtigkeit für die Theorie ermöglicht der Satz von Fubini es häufig, Integrale durch Rückführen auf Integrale über $\mathbb{R}$ konkret auszurechnen.

6. Jordan-Messbarkeit

Definition:

(i) Sei $C \subset \mathbb{R}^n$. Dann heißt

$$\chi_C: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in C \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

charakteristische Funktion von C .

(ii) $C \subset \mathbb{R}^n$ heißt Jordan-messbar, falls $\chi_C|_Q \in \mathcal{R}(Q)$ für einen Quader $Q \subset \mathbb{R}^n$ mit $C \subset Q$.

(iii) Ist $C \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar und Q ein Quader wie in (ii), so heißt

$$v(C) := \int_Q \chi_C(x) dx$$

Volumen von C (oder auch: Jordan-Inhalt).

Bemerkungen:

(i) Definition von $v(C)$ unabhängig von der Wahl von Q .

(ii) Mit (ii): $C \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar $\Rightarrow C$ beschränkt.

(iii) Für Quader stimmt obiges $v(Q)$ mit dem früher definierten überein.

(iv) $A \subset \mathbb{R}^n$ vom Volumen 0 $\Leftrightarrow A$ Jordan-messbar mit $v(A) = 0$.

Satz:

Sei $C \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt. Äquivalent:

(i) C ist Jordan-messbar

(ii) $\partial C (= \bar{C} \setminus \overset{\circ}{C})$ hat Maß 0

Da für C beschränkt ∂C kompakt ist können wir die äquivalente Aussage notieren:

(iii) ∂C hat Volumen 0.

7. Das Riemann-Integral über Jordan-messbaren Mengen

Definition:

(i) Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ Menge und $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Dann:

$$f_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(ii) Sei $C \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar. $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Riemann-integrierbar, falls $f_C \in \mathcal{R}(Q)$ für einen Quader $Q \subset \mathbb{R}^n$ mit $C \subset Q$.

In diesem Fall definieren wir das Riemann-Integral durch

$$\int_C f(x) dx := \int_Q f_C(x) dx$$

(unabhängig von Q !).

Bemerkungen:

(i) Es lassen sich die Eigenschaften wie Linearität und Monotonie vom Integral für Quader übertragen.

(ii) Man kann auch umgekehrt vorgehen und zuerst ohne Riemann-Integral Jordan-messbarkeit erklären. Das Integral wird dann mit Jordan-messbaren Mengen definiert.