Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. G. Schumacher
Dipl.-Math. T. Geiger

Sommersemester 2011

Übungen zur Analysis III

– Blatt 1 –

Abgabe: Mittwoch, den 27.04.2011, 12:10 Uhr, HG SR 109

Aufgabe 1.1. (4 Punkte)
Es sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader und $\mathcal{R}(Q)$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der Riemann-integrierbaren Funktionen auf Q. Zeige:

a) Ist $f \in \mathcal{R}(Q)$ mit $m \leqslant f(x) \leqslant M$ für alle $x \in Q$ und $\varphi : [m, M] \to \mathbb{R}$ lipschitz-stetig, so ist auch $\varphi \circ f \in \mathcal{R}(Q)$.

(*Hinweis:* Zeige mit Bolzano-Weierstraß, dass für jeden Unterquader $S \subset Q$ die Ungleichung $(\sup_S \varphi \circ f - \inf_S \varphi \circ f) \leqslant L(\sup_S f - \inf_S f)$ gilt, wobei L die Lipschitzkonstante von φ bezeichne.)

b) Ist $\delta > 0$ und $f \in \mathcal{R}(Q)$ mit $f(x) \geqslant \delta$ für alle $x \in Q$, so ist $\frac{1}{f} \in \mathcal{R}(Q)$.

c) Ist $f \in \mathcal{R}(Q)$, so ist auch $f^2 \in \mathcal{R}(Q)$.

Aufgabe 1.2. (4 Punkte)
Seien $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader und $f, g : Q \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbare Funktionen. Zeige:

a) Ist $f(x) = g(x)$ für alle $x \in D$ mit $D \subset Q$ dicht, so folgt

$$\int_Q f(x)\,dx = \int_Q g(x)\,dx.$$

b) Ist $B \subset Q$ eine Menge vom Volumen 0 und gilt $f(x) = g(x)$ für alle $x \in Q \setminus B$ so folgt

$$\int_Q f(x)\,dx = \int_Q g(x)\,dx.$$

Aufgabe 1.3. (4 Punkte)
Sei $Q := [-1, 1]^3$ und $f : Q \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x_1^2 x_2)\cos(x_2 x_3^2)e^{x_1 x_3}$. Berechne

$$\int_Q f(x)\,dx.$$

Aufgabe 1.4. (4 Punkte)
Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader und $f : Q \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar mit $f(x) \geqslant 0$ für alle $x \in Q$ und $\int_Q f(x)\,dx = 0$. Zeige, dass die Menge $P := \{x \in Q \mid f(x) > 0\}$ das Maß 0 hat.

(*Hinweis:* Zeige, dass für jedes $\alpha > 0$ die Menge $P_\alpha := \{x \in Q \mid f(x) \geqslant \alpha\}$ das Volumen 0 hat.)