Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. G. Schumacher
Dipl.-Math. T. Geiger

Sommersemester 2011

Übungen zur Analysis III

– Blatt 10 –

Abgabe: Montag, den 27.06.2011, 12:10 Uhr, HG SR 205

Aufgabe 10.1. (4 Punkte)
Sei $\omega = x\,dy \wedge dz - y^2\,dx \wedge dz + (y+z)\,dx \wedge dy$ eine 2-Form auf dem $\mathbb{R}^3$ und $X \subset \mathbb{R}^3$ gegeben durch $X = \{(x,y,z) \in (0,1) \times \mathbb{R} \times (0,2) \mid y = x^2\}$.

a) Zeige, dass ω weder geschlossen noch exakt ist.

b) Zeige, dass X eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.

c) Bereche $\int_X \omega$.

Aufgabe 10.2. (4 Punkte)
Sei $\omega = z\,dx + x\,dy + y\,dz$ eine Differentialform auf dem $\mathbb{R}^3$ und für $a > 0$ sei eine Untermannigfaltigkeit mit Rand durch $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 - y^2, x^2 + y^2 \leqslant a^2\}$ gegeben (ist *nicht* nachzurechnen).
Bereche das Integral $\int_M d\omega$ auf zwei Arten: Zum einen direkt, zum anderen durch die Anwendung des Satzes von Stokes.

Aufgabe 10.3. (4 Punkte)
Es sei $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ der zweidimensionale Torus und $\pi : \mathbb{R}^2 \to T^2$ die differenzierbare Quotientenabbildung. Seien c_1 und c_2 die geschlossenen Kurven $c_1(t) = \pi(t,0)$, $c_2(t) = \pi(0,t)$ für $t \in [0,1]$. Im Folgenden darf verwendet werden, dass sich jede geschlossene Kurve $\gamma : [a,b] \to T^2$ (nicht eindeutig) zu einer Kurve $\tilde{\gamma} : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ liften lässt, d.h. für $\tilde{\gamma}$ gilt: $\pi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$. Zeige:

a) Ist $\tilde{\gamma}$ eine Liftung von γ, so ist $\tilde{\gamma}(b) - \tilde{\gamma}(a) \in \mathbb{Z}^2$ und dieses Tupel ist unabhängig von der konkreten Liftung. Das Tupel heißt *Windungszahl* der Kurve γ.

b) Ist $\beta \in \Omega^1(T^2, \mathbb{R})$ geschlossen und γ eine geschlossene Kurve auf T^2 mit Windungszahl (k,l), so ist
$$\int_\gamma \beta = k \int_{c_1} \beta \, + \, l \int_{c_2} \beta.$$

c) Sind $\eta_1, \eta_2 \in \Omega^1(T^2, \mathbb{R})$ zwei geschlossene 1-Formen auf T^2 mit $\pi^*\eta_i = dx_i$ (die Existenz ist *nicht* zu zeigen), so ist $H^1_{\mathrm{dR}}(T^2, \mathbb{R}) = \operatorname{span}\big(\{[\eta_1], [\eta_2]\}\big)$.
Hinweis: Es darf verwendet werden, dass eine 1-Form β auf T^2 genau dann exakt ist, wenn $\int_\gamma \beta = 0$ für alle geschlossenen Kurven γ in T^2 gilt.

Aufgabe 10.4. (4 Punkte)
Sei $a \in]0,1[$ und $f : \mathbb{R} \times [-a,a] \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch
$$f(\varphi, t) = \big((1 + t\cos(\varphi))\cos(2\varphi),\ (1 + t\cos(\varphi))\sin(2\varphi),\ t\sin(\varphi)\big).$$
Das Möbiusband ist definiert durch $\mathcal{M} := f(\mathbb{R} \times [-a,a])$. Zeige:

a) $\mathcal{M}$ ist eine kompakte, differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Rand.

b) $\mathcal{M}$ ist nicht orientierbar.