Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. G. Schumacher
Dipl.-Math. T. Geiger

Sommersemester 2011

Übungen zur Analysis III

– Blatt 11 –

Abgabe: Montag, den 04.07.2011, 12:10 Uhr, HG SR 205

Aufgabe 11.1. (4 Punkte)
Mit $\mathrm{Gl}_n^+(\mathbb{R})$ seien die Matrizen aus $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ bezeichnet, welche eine positive Determinante besitzen. Zeige:

a) Sind $U, V \in \mathrm{Gl}_n^+(\mathbb{R})$, so dass VU^{-1} keine negativen Eigenwerte besitzt, so gehört für alle $t \in [0,1]$ die Matrix $tU + (1-t)V$ zu $\mathrm{Gl}_n^+(\mathbb{R})$.

b) $\mathrm{Gl}_n^+(\mathbb{R})$ ist wegzusammenhängend.

Hinweis: Zeige, dass sich jede Matrix $A \in \mathrm{Gl}_n^+(\mathbb{R})$ in der Form $A = T^2 B$ schreiben lässt, mit $T, B \in \mathrm{Gl}_n^+(\mathbb{R})$ ohne negative Eigenwerte.

c) Eine topologische Mannigfaltigkeit M ist zusammenhängend, genau dann, wenn sie wegzusammenhängend ist.

d) Die Mannigfaltigkeit $O_n(\mathbb{R})$ besteht aus genau zwei Zusammenhangskomponenten.

Aufgabe 11.2. (4 Punkte)
Sei $0 < r < R$ und ∂T der Rand des Torus T im $\mathbb{R}^3$ mit diesen Radien, d.h.

$$\partial T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2 = r^2\}.$$

Berechne das Volumen von ∂T als 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$, d.h. die Oberfläche des Torus T.

Aufgabe 11.3. (4 Punkte)

a) Seien $K \subset \mathbb{R}^d$ kompakt, $f : K \to [0,\infty)$ stetig. Sei $\tilde{f} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ die triviale Fortsetzung von f, d.h. $\tilde{f}(x) = f(x)$ für $x \in K$ und $\tilde{f}(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}^d \setminus K$.
Zeige: $\tilde{f} \in \mathscr{H}^{\downarrow}(\mathbb{R}^d)$.

b) Seien $U \subset \mathbb{R}^d$ offen, $f : U \to [0,\infty)$ stetig. Sei $\tilde{f} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ die triviale Fortsetzung von f.
Zeige: $\tilde{f} \in \mathscr{H}^{\uparrow}(\mathbb{R}^d)$.

Aufgabe 11.4. (4 Punkte)
Sei M ein metrischer Raum. Eine Funktion $f : M \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ heißt *halbstetig von unten*, falls es zu jedem Punkt $m \in M$ und jeder Zahl $c \in \mathbb{R}$ mit $c < f(m)$ eine Umgebung $U \subset M$ von m gibt mit $c < f(\xi)$ für alle $\xi \in U$.
Zeige: Ist M kompakt und $f : M \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ halbstetig von unten, so nimmt f auf M sein Minimum an.