Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. G. Schumacher
Dipl.-Math. T. Geiger

Sommersemester 2011

Übungen zur Analysis III

– Blatt 12 –

Keine Abgabe!

Aufgabe 12.1. (0 Punkte)
Sei $a > 0$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch:

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} & \text{für } |x| < a \\ 0 & \text{für } |x| \geqslant a \end{cases}$$

Konstruiere explizit eine Funktionenfolge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ mit $f_k \uparrow f$ und zeige

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = \pi.$$

Aufgabe 12.2. (0 Punkte)
Es sei $f \in \mathcal{L}^1([0,1])$. Zeige, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ die Funktion $f_k : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^k f(x)$ Lebesgue-integrierbar ist, dass der Grenzwert

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^1 f_k(x)\, dx$$

existiert und gib diesen an.

Aufgabe 12.3. (0 Punkte)
Seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $M_1 \subset M_2 \subset \ldots \subset \mathbb{R}^n$ und $\bigcup_{k=1}^\infty M_k = \mathbb{R}^n$ gegeben. Zeige: Falls $f \cdot \chi_{M_k} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ ist und die Folge $(\int |f \cdot \chi_{M_k}|)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert, so ist $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ und es gilt:

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} (f \cdot \chi_{M_k})(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx$$

Hinweis: Benutze den Satz von Beppo Levi und betrachte zunächst $f \geqslant 0$.

Aufgabe 12.4. (0 Punkte)
Die Riemannsche Zeta-Funktion wird für $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 1$ gegeben durch

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}.$$

a) Zeige, dass das Integral

$$I := \int_{[0,1]^2} \frac{1}{1-xy}\, dxdy$$

existiert, und dass $\zeta(2) = I$ gilt.

b) Gib mit dem Integral aus Teil a) einen Beweis für die Gleichung

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Hinweis: Konstruiere aus $u = \frac{y+x}{2}$ und $v = \frac{y-x}{2}$ eine geeignete Koordinatentransformation.