Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. G. Schumacher
Dipl.-Math. T. Geiger

Sommersemester 2011

Übungen zur Analysis III

– Blatt 2 –

Abgabe: Montag, den 02.05.2011, 12:10 Uhr, HG SR 205

Aufgabe 2.1. (4 Punkte)
Sei X eine Menge und $\triangle$ die symmetrische Differenz, d.h. für $A, B \subset X$ gilt

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

a) Zeige, dass die Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ mit $\triangle$ als Addition und $\cap$ als Multiplikation ein kommutativer Ring mit Eins ist.

b) Ist $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ ein Unterring (nicht notwendig mit Eins), so heißt eine Abbildung $\mu : \mathcal{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ ein Inhalt, wenn $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(A) \geqslant 0$ für alle $A \in \mathcal{R}$ und $\mu(B \cup C) = \mu(B) + \mu(C)$ für alle disjunkten $B, C \in \mathcal{R}$ gilt.

   Zeige, dass die Menge $\mathcal{J}(\mathbb{R}^n) := \{C \subset \mathbb{R}^n \mid C \text{ ist Jordan-messbar}\}$ ein Unterring von $\mathcal{P}(X)$ ist und das Jordan-Maß $\mathcal{J}(\mathbb{R}^n) \to \overline{\mathbb{R}}$ ein Inhalt.

c) Ein Unterring $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt σ-Ring, falls für jede Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Mengen aus $\mathcal{R}$ die Vereinigung $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ zu $\mathcal{R}$ gehört.

   Ist $\mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ ein σ-Ring?

Aufgabe 2.2. (4 Punkte)
Sei $N \subset \mathbb{R}^n$ eine Menge vom Maß 0. Zeige, dass dann $N^c \subset \mathbb{R}^n$ dicht ist.

Aufgabe 2.3. (4 Punkte)
Berechne den Inhalt der Menge $B \subset [0, \infty) \times [0, \infty) \subset \mathbb{R}^2$, welche von den Kurven $y = 1$, $y = 4x$ und $y = \frac{1}{x}$ begrenzt wird.

Aufgabe 2.4. (4 Punkte)
Es sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader und $\mathcal{R}(Q)$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der Riemann-integrierbaren Funktionen auf Q.

a) Zeige, dass die Abbildung

$$\mathcal{R}(Q) \times \mathcal{R}(Q) \to \mathbb{R}, \quad (f, g) \mapsto \langle f \mid g \rangle := \int_Q f(x) g(x)\, dx$$

   wohldefiniert aber *kein* Skalarprodukt ist.

b) Sei $\mathcal{N} := \{f \in \mathcal{R}(Q) \mid \exists\, B \subset Q \text{ vom Maß } 0, \text{ mit } f(x) = 0 \text{ für alle } x \in Q \setminus B\}$. Zeige, dass $\mathcal{N} \subset \mathcal{R}(Q)$ ein Untervektorraum und die Abbildung

$$\mathcal{R}(Q)/\mathcal{N} \times \mathcal{R}(Q)/\mathcal{N} \to \mathbb{R}, \quad ([f], [g]) \mapsto \langle [f] \mid [g] \rangle := \int_Q f(x) g(x)\, dx$$

   wohldefiniert und ein Skalarprodukt ist.