Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. G. Schumacher
Dipl.-Math. T. Geiger

Sommersemester 2011

Übungen zur Analysis III

– Blatt 3 –

Abgabe: Montag, den 09.05.2011, 12:10 Uhr, HG SR 205

Aufgabe 3.1. (4 Punkte)
Das Cantorsche Diskontinuum C wird folgendermaßen konstruiert: Für $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sei

$$C_k := \bigcup \left\{ [0, \frac{1}{3^k}] + \sum_{j=1}^{k} \frac{a_j}{3^j} \;\middle|\; a_j \in \{0,2\} \right\}.$$

Dann wird C definiert durch

$$C := \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k.$$

Zeige, dass C kompakt, überabzählbar und vom Maß 0 ist.

Hinweis: Untersuche für die Überabzählbarkeit die Menge $\{\sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{3^j} \mid a_j \in \{0,2\}\}$.

Aufgabe 3.2. (4 Punkte)
Auf dem Raum $\mathcal{C}([-1,1])$ der stetigen Funktionen $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ werden durch

$$\|f\|_{\mathcal{C}^0} := \sup\{|f(x)| \mid x \in [-1,1]\} \quad \text{und} \quad \|f\|_{L_2} := \left(\int_{-1}^{1} (f(x))^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

zwei Normen definiert (ist *nicht* nachzurechnen). Zeige:

a) Es gibt ein $K > 0$, so dass für alle $f \in \mathcal{C}([-1,1])$ gilt: $\|f\|_{L_2} \leqslant K \|f\|_{\mathcal{C}^0}$

b) Es gibt kein $k > 0$, so dass für alle $f \in \mathcal{C}([-1,1])$ gilt: $\|f\|_{\mathcal{C}^0} \leqslant k \|f\|_{L_2}$

Hinweis: Untersuche für $\varepsilon > 0$ die Funktion $f_\varepsilon(x) := \left(\max\left\{0, \frac{1}{\varepsilon}\left(1 - \frac{|x|}{\varepsilon}\right)\right\}\right)^{\frac{1}{2}}$

Aufgabe 3.3. (4 Punkte)
Der Raum $\mathcal{C}([0,2])$ sei mit der Norm (ist *nicht* nachzurechnen)

$$\|f\|_{L_2} := \left(\int_{0}^{2} (f(x))^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

versehen. Zeige, dass $(\mathcal{C}([0,2]), \|\cdot\|_{L_2})$ kein Banachraum, d.h. nicht vollständig ist.

Hinweis: Betrachte für $k \in \mathbb{N}$ die Funktionen f_k mit $f_k(x) = x^k$ für $x \in [0,1]$ und $f_k(x) = 1$ für $x \in (1,2]$ und konstruiere einen geeigneten Vektorraum V mit $\mathcal{C}([0,2]) \subset V \subset \mathcal{R}([0,2])$.

Aufgabe 3.4. (4 Punkte)
Berechne die folgenden Integrale:

a) $\int\limits_A x^2 \, d(x,y)$ für $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leqslant 1\}$,

b) $\int\limits_B xyz \, d(x,y,z)$ für $B := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant z \leqslant 1\}$.