Fachbereich Mathematik und Informatik der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. G. Schumacher
Dipl.-Math. T. Geiger

Sommersemester 2011

Übungen zur Analysis III

– Blatt 4 –

Abgabe: Montag, den 16.05.2011, 12:10 Uhr, HG SR 205

Aufgabe 4.1. (4 Punkte)
Beweise die folgende Formel der n-dimensionalen Polarkoordinaten

$$\int_{B_{r,R}(0)} f(y)\,dy = \int_r^R \int_{-\pi}^{\pi} \int_{[0,\pi]^{n-2}} f(x_1,\ldots,x_n)\, s^{n-1} \prod_{j=1}^{n-2} (\sin\theta_j)^j \,ds\,d\phi\,d(\theta_1,\ldots,\theta_{n-2}),$$

wobei

$$x_1 = s\cos\phi \prod_{j=1}^{n-2} \sin\theta_j,\ \ x_2 = s\sin\phi \prod_{j=1}^{n-2} \sin\theta_j \text{ und } x_k = s\cos\theta_{k-2} \prod_{j=k-1}^{n-2} \sin\theta_j \text{ für } k > 2$$

ist. Verwende hierzu die bijektiven Abbildungen

$$\begin{array}{llcl}
\psi_n: & \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^{n-2} \times (0,\pi) & \longrightarrow & \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^{n-2} \times \mathbb{R} \\
 & (r, x_2, \ldots, x_{n-1}, \theta) & \longmapsto & (r\sin\theta, x_2, \ldots, x_{n-1}, r\cos\theta) \\
Z_n: & \mathbb{R}_{>0} \times (-\pi,\pi) \times (0,\pi)^{n-3} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \setminus (-\infty,0] \times \mathbb{R}^{n-2} \\
 & (r, \phi, \theta_1, \ldots, \theta_{n-3}, x_n) & \longmapsto & (P_{n-1}(r,\phi,\theta_1,\ldots,\theta_{n-3}), x_n)
\end{array}$$

und P_n, wobei P_2 die Polarkoordinaten in der Ebene sind und $P_k = Z_k \circ \psi_k$ ist.

Aufgabe 4.2. (4 Punkte)
Seien $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $R, \alpha > 0$. Berechne

$$\lim_{r\to 0} \int_{B_{r,R}(0)} \frac{1}{(\|x\|_2)^\alpha}\,dx \ \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

in Abhängigkeit von n, R und α (das Integral ist im $\mathbb{R}^n$ zu lesen).

Aufgabe 4.3. (4 Punkte)
Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit.

a) Berechne

$$\lim_{a\to\infty} \int_{[-a,a]^n} e^{-\langle Ax\,|\,x\rangle}\,dx.$$

b) Berechne das Volumen des Ellipsoids $E = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle Ax|x\rangle \leqslant 1\}$.

Aufgabe 4.4. (4 Punkte)
Gib mit Hilfe des Integrals $\int_{B_r} e^{-(x_1^2+\ldots+x_n^2)}\,dx$ einen weiteren Beweis der Formel

$$\Omega_n(R) = \frac{R^n \pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$$

für das Volumen $\Omega_n(R)$ der n-dimensionalen Kugel B_R und zeige, dass

$$\lim_{n\to\infty} \Omega_n(R) = 0.$$