Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. G. Schumacher
Dipl.-Math. T. Geiger

Sommersemester 2011

Übungen zur Analysis III

– Blatt 5 –

Abgabe: Montag, den 23.05.2011, 12:10 Uhr, HG SR 205

Aufgabe 5.1. (4 Punkte)
Sei $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch:

$$f(x,y) := \begin{cases} x^{-2} & \text{für } 0 < y < x \\ -y^{-2} & \text{für } 0 < x < y \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Zeige, dass $f|_{[p,1]^2} \in \mathcal{R}([p,1]^2)$ für alle $0 < p < 1$ ist, mit

$$\lim_{p \to 0} \int_{[p,1]^2} f(x,y)\, d(x,y) = 0.$$

b) Zeige, dass $y \mapsto f(x,y) \in \mathcal{R}([0,1])$ für alle $x \in [0,1]$ und $x \mapsto f(x,y) \in \mathcal{R}([0,1])$ für alle $y \in [0,1]$ gilt, mit

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\, dx \right) dy \neq \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\, dy \right) dx.$$

Aufgabe 5.2. (4 Punkte)

a) Sei $\rho : [a,b] \to [0,\infty)$ stetig und

$$R_\rho^n := \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times [a,b] \mid \|(x_1,\dots,x_{n-1})\|_2^2 \leqslant \rho(x_n)^2\}.$$

Zeige, dass R_ρ^n Jordan-messbar ist, mit

$$\mathrm{Vol}(R_\rho^n) = \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2}+1)} \int_a^b (\rho(t))^{n-1}\, dt.$$

b) Berechne für $h > 0$ das Volumen des Kegels

$$K_h := \left\{ (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; 0 \leqslant x_n \leqslant h,\ \|(x_1,\dots,x_{n-1})\|_2^2 \leqslant x_n^2 \right\}.$$

Aufgabe 5.3. (4 Punkte)
Berechne den Inhalt der Flächen, die von folgenden Kurven begrenzt werden.

a) $(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)$ für $a \in \mathbb{R}$.

b) $(x^2+y^2)^2 = 2ax^3$ für $a > 0$.

Aufgabe 5.4. (4 Punkte)
Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Jordan-messbare Menge mit $\mathrm{Vol}(A) > 0$. Sei $s_j(A) := \mathrm{Vol}(A)^{-1} \int_A x_j dx$ für $j = 1,...,n$. Dann heißt $s_A := (s_1(A),...,s_n(A))$ der Schwerpunkt von A.

a) Zeige: s kommutiert mit affinen Isomorphismen, d.h. ist $\varphi = a + T$ mit $a \in \mathbb{R}^n$ und $T \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ so gilt $s_{\varphi(A)} = \varphi(s_A)$.

b) Für $\alpha \geqslant 1$ sei $H_\alpha := \{(r\sin\theta, -r\cos\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant r \leqslant \alpha + \cos\theta, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$.
Berechne den Schwerpunkt s_{H_α}. Skizziere außerdem H_α und die Lage von s_{H_α}.