Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. G. Schumacher
Dipl.-Math. T. Geiger

Sommersemester 2011

Übungen zur Analysis III

– Blatt 6 –

Abgabe: Montag, den 30.05.2011, 12:10 Uhr, HG SR 205

Aufgabe 6.1. (4 Punkte)
Sei $0 < r < R < \infty$ und $T \subset \mathbb{R}^3$ der Volltorus, der durch Rotation der Kreisscheibe $K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0, (x - R)^2 + z^2 \leqslant r^2\}$ um die z-Achse entsteht. Berechne das Volumen von T.

Aufgabe 6.2. (4 Punkte)
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $p \in U$. Eine Abbildung $w \in \mathcal{C}^1((-\varepsilon, \varepsilon), U)$ für $\varepsilon > 0$ beliebig mit $w(0) = p$ heißt Weg durch p. Es sei W_p die Menge aller solchen Wege durch p. Für $w, v \in W_p$ sei $w \sim v$, falls $w'(0) = v'(0)$.

a) Sei $\widetilde{T}_pU := W_p/\sim$. Zeige, dass $J_p : \mathbb{R}^n \to \widetilde{T}_pU$, $v \mapsto [t \mapsto p + tv]$ bijektiv ist.

b) Es sei $\widetilde{T}_pU$ vermöge J_p mit einer Vektorraumstruktur versehen. Zeige, dass

$$\iota_U : \widetilde{T}_pU \to T_pU,\ [w] \mapsto \left(f \mapsto \frac{d}{dt} f \circ w \Big|_0 \right)$$

ein wohldefinierter Isomorphismus von Vektorräumen ist.

c) Sei nun $f : U \to V$ für $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ offen, eine stetig differenzierbare Abbildung und $p \in U$. Sei $\widetilde{T}_p(f) : \widetilde{T}_pU \to \widetilde{T}_{f(p)}V$, $[w] \mapsto [f \circ w]$. Zeige: $\widetilde{T}_p(f)$ ist wohldefiniert, linear und das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} T_pU & \xrightarrow{T_p(f)} & T_{f(p)}V \\ {\scriptstyle \iota_U}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \iota_V} \\ \widetilde{T}_pU & \xrightarrow[\widetilde{T}_p(f)]{} & \widetilde{T}_{f(p)}V \end{array}$$

kommutiert.

Aufgabe 6.3. (4 Punkte)

a) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ und $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ eine Integralkurve des Vektorfeldes grad f. Zeige: Für alle $a, b \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ mit $a \leqslant b$ gilt die Ungleichung $f(\varphi(a)) \leqslant f(\varphi(b))$.

b) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \mapsto c + x_1^2 + x_2^2$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Berechne für alle $p \in \mathbb{R}^n$ die maximale Integralkurve des Vektorfeldes grad f durch den Punkt p, d.h. die Integralkurve mit größtmöglichem Definitionsintervall.

Aufgabe 6.4. (4 Punkte)
Es seien $r, c > 0$ und $\varphi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (r\cos(t), r\sin(t), ct)$. Außerdem sei die Differentialform $\omega = (x^2 - y^2)dx + 3zdy + 4xydz$ auf dem $\mathbb{R}^3$ gegeben. Berechne das Integral

$$\int_\varphi \omega.$$