Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. G. Schumacher
Dipl.-Math. T. Geiger

Sommersemester 2011

Übungen zur Analysis III

– Blatt 7 –

Abgabe: Montag, den 06.06.2011, 12:10 Uhr, HG SR 205

Aufgabe 7.1. (4 Punkte)
Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein sternförmiges Gebiet und ω eine stetige 1-Form auf G. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

i) Für alle geschlossenen Wege γ in G ist $\int_\gamma \omega = 0$.

ii) Für alle Dreiecke $\triangle \subset G$ ist $\int_{\partial\triangle} \omega = 0$.

Aufgabe 7.2. (4 Punkte)
Es sei

$$\begin{aligned}\omega_1 &= (x^2 - yz)\,dx + (y^2 - xz)\,dy - xy\,dz \\ \omega_2 &= \omega_1 + 2xy\,dz.\end{aligned}$$

Bestimme eine Stammfunktion für ω_1 auf dem $\mathbb{R}^3$. Ist ω_2 geschlossen? Berechne ferner die Integrale von ω_1 und ω_2 entlang der Schraubenlinie $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), ct)$, $t \in [0, 2\pi]$ für $c > 0$.

Aufgabe 7.3. (4 Punkte)
Sei $\omega = f\,dx + g\,dy$ eine stetig differenzierbare, geschlossene 1-Form auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Zeige: Ist ω beschränkt um 0 (d.h. f und g sind um 0 beschränkt), so ist $\int_{\partial E} \omega = 0$, wobei E die Einheitskreisscheibe bezeichne.

Aufgabe 7.4. (4 Punkte)
Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $p \in U$. Mit M sei die Menge aller (stetigen) Wege $\gamma : [0,1] \to U$ mit $\gamma(0) = \gamma(1) = p$ bezeichnet. Zwei Wege $\gamma_1, \gamma_2 \in M$ seien äquivalent ($\gamma_1 \sim \gamma_2$), wenn sie homotop zueinander sind und $\pi_1(U,p) := M/\sim$. Zeige:

a) $\pi_1(U,p)$ ist bezüglich der Verknüpfung $[\gamma_1] * [\gamma_2] := [\gamma_1 \cdot \gamma_2]$ eine Gruppe, wobei

$$\gamma_1 \cdot \gamma_2(t) := \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{falls } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2t-1) & \text{falls } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

b) Ist U wegzusammenhängend und $p_0, p_1 \in U$, so ist $\pi_1(U,p_0) \cong \pi_1(U,p_1)$.

c) Sind $G_1 \subset \mathbb{R}^n$ und $G_2 \subset \mathbb{R}^m$ zwei Gebiete, $p \in G_1$ und $f : G_1 \to G_2$ stetig, so ist $f_* : \pi_1(G_1,p) \to \pi_1(G_2, f(p))$, $f_*([\gamma]) := [f \circ \gamma]$ ein Gruppenhomomorphismus.

d) Ist $f : G_1 \to G_2$ ein Homöomorphismus, so ist f_* ein Isomorphismus.