Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. G. Schumacher
Dipl.-Math. T. Geiger

Sommersemester 2011

# Übungen zur Analysis III

– Blatt 8 –

Abgabe: Mittwoch, den 15.06.2011, 12:10 Uhr, HG SR 109

**Aufgabe 8.1. (4 Punkte)**
Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein sternförmiges Gebiet mit Zentrum $0 \in \mathbb{R}^n$. Jeder stetigen $k$-Form $\omega = \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n} f_{i_1,\ldots,i_k} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$ auf $U$ werde folgende $(k-1)$-Form zugeordnet:

$$P(\omega) = \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n} \sum_{\alpha=1}^{k} (-1)^{\alpha-1} \left( \int_0^1 t^{k-1} f_{i_1,\ldots,i_k}(tx)\, dt \right) x_{i_\alpha} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

Zeige, dass für eine stetig differenzierbare $k$-Form $\omega$ die Identität $\omega = P(d\omega) + dP(\omega)$ gilt und folgere den Satz von Poincaré: Ist $\omega$ geschlossen, so ist $\omega$ exakt.

**Aufgabe 8.2. (4 Punkte)**
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Für $k \in \mathbb{N}$ sei $\Omega^k(U,\mathbb{R}) = \{k\text{-Formen der Klasse } \mathcal{C}^\infty \text{ auf } U\}$ und für $k \in \mathbb{Z}$ mit $k < 0$ sei $\Omega^k(U,\mathbb{R}) = 0$. Betrachte die Sequenz:

$$0 \xrightarrow{d} \Omega^0(U,\mathbb{R}) \xrightarrow{d} \Omega^1(U,\mathbb{R}) \xrightarrow{d} \ldots \xrightarrow{d} \Omega^n(U,\mathbb{R}) \xrightarrow{d} 0$$

Für $q \in \mathbb{N}$ wird die $q$-te de Rham Kohomologie definiert durch:

$$H^q_{\mathrm{dR}}(U,\mathbb{R}) := \frac{\ker(d : \Omega^q(U,\mathbb{R}) \to \Omega^{q+1}(U,\mathbb{R}))}{\mathrm{im}(d : \Omega^{q-1}(U,\mathbb{R}) \to \Omega^q(U,\mathbb{R}))}$$

a) Gib eine äquivalente Formulierung des Satzes von Poincaré mit den $H^q_{\mathrm{dR}}(U,\mathbb{R})$ an.

b) Zeige, dass

$$H^1_{\mathrm{dR}}(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\},\mathbb{R}) = \mathrm{span}\left( \left[ \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} \right] \right).$$

*Hinweis:* Es darf die Existenz eines Isomorphismus $f : \pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, (1,0)) \to (\mathbb{Z}, +)$ mit $f([\gamma])$=1 verwendet werden, wobei $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$.

**Aufgabe 8.3. (4 Punkte)**
Es seien $U \subset \mathbb{R}^3$ offen, $a, b, c : U \to \mathbb{R}^3$ Abbildungen und $d\vec{s} = (dx_1, dx_2, dx_3)$, $d\vec{S} = (dx_2 \wedge dx_3, dx_3 \wedge dx_1, dx_1 \wedge dx_2)$, $dV = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$. Zeige:

a) $(a \cdot d\vec{s}\,) \wedge (b \cdot d\vec{s}\,) = (a \times b) \cdot d\vec{S}$

b) $(a \cdot d\vec{s}\,) \wedge (b \cdot d\vec{S}\,) = \langle a \,|\, b \rangle\, dV$

c) $(a \cdot d\vec{s}\,) \wedge (b \cdot d\vec{s}\,) \wedge (c \cdot d\vec{s}\,) = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} dV$

**Aufgabe 8.4. (4 Punkte)**
Sei $\|.\|$ eine Norm auf dem $\mathbb{R}^3$ und $U = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| < 1\}$. Weiter seien $a, b : U \to \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbare Abbildungen. Zeige:

a) Ist $\mathrm{rot}\, a = 0$, so gibt es eine differenzierbare Abbildung $f : U \to \mathbb{R}$ mit $\mathrm{grad}\, f = a$.

b) Ist $\mathrm{div}\, b = 0$, so gibt es eine differenzierbare Abbildung $c : U \to \mathbb{R}^3$ mit $\mathrm{rot}\, c = b$.