Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. G. Schumacher
Dipl.-Math. T. Geiger

Sommersemester 2011

Übungen zur Analysis III

– Blatt 9 –

Abgabe: Montag, den 20.06.2011, 12:10 Uhr, HG SR 205

Aufgabe 9.1. (4 Punkte)
Es sei $\mathbb{R}$ mit der natürlichen Topologie ausgestattet und $Z := \mathbb{R} \cup \{0'\}$ für ein Objekt $0'$ mit $0' \notin \mathbb{R}$. Weiter sei

$$\mathcal{B} := \{U \subset \mathbb{R} \mid U \text{ offen in } \mathbb{R}\} \cup \{]-\varepsilon, 0[\cup \{0'\} \cup]0, \varepsilon[\mid \varepsilon > 0\} \subset \mathcal{P}(Z).$$

Zeige:

a) $\mathcal{B}$ ist Basis einer Topologie auf Z.

b) Die von $\mathcal{B}$ erzeugte Topologie besitzt eine abzählbare Basis.

c) Jeder Punkt $p \in Z$ besitzt eine offene Umgebung bezüglich dieser Topologie, welche homöomorph zu $\mathbb{R}$ ist.

d) Z mit dieser Topologie ist kein Hausdorff-Raum.

Aufgabe 9.2. (4 Punkte)
Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und Γ eine Gruppe. Wir bezeichnen mit $\mathrm{Aut}(M)$ die Gruppe aller Diffeomorphismen $f : M \to M$. Eine Wirkung von Γ auf M ist ein Gruppenhomomorphismus $\alpha : \Gamma \to \mathrm{Aut}(M)$. Für $g \in \Gamma$ und $p \in M$ schreiben wir $gp = \alpha(g)(p)$.

i) Eine Wirkung α heißt *frei*, falls für alle $p \in M$ eine Umgebung $p \in U$ existiert, so dass $gU \cap U = \emptyset$ für alle $g \in \Gamma \setminus \{e\}$ gilt.

ii) Eine Wirkung α heißt *eigentlich diskontinuierlich*, falls es für alle $p, q \in M$ mit $\Gamma p \neq \Gamma q$ Umgebungen $p \in U$, $q \in V$ gibt, so dass $gU \cap g'V = \emptyset$ für alle $g, g' \in \Gamma$.

Sei nun α eine freie, eigentlich diskontinuierliche Wirkung auf M. Wir statten den Raum $M/\Gamma := M/\sim$, wobei $p \sim q$ gelte, falls $gp = q$ für ein $g \in \Gamma$ ist, mit der Quotiententopologie aus. Zeige:

a) M/Γ trägt auf kanonische Weise die Struktur einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit mit $\dim(M/\Gamma) = \dim(M)$, so dass die Restklassenabbildung $\pi : M \to M/\Gamma$ differenzierbar ist.

b) Eine Abbildung $f : M/\Gamma \to N$ ist genau dann differenzierbar, wenn $f \circ \pi : M \to N$ differenzierbar ist.

Aufgabe 9.3. (4 Punkte)
Seien M, N differenzierbare Mannigfaltigkeiten mit $\dim(M) = m > \dim(N) = n$ und $f : M \to N$ eine differenzierbare Abbildung. Weiter sei $q \in N$ ein regulärer Wert von f, d.h. für alle $p \in f^{-1}(\{q\})$ ist $T_p f$ surjektiv. Zeige: Ist $L := f^{-1}(\{q\}) \neq \emptyset$, so ist L eine $(m-n)$-dimensionale differenzierbare Untermannigfaltigkeit von M.

Dabei heißt eine Menge $L \subset M$ k-dimensionale Untermannigfaltigkeit von M, falls es für alle $p \in L$ eine Karte (U, φ) von M um p gibt mit $\varphi : U \to U' \subset \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k}$, so dass $\varphi(L \cap U) = U' \cap \mathbb{R}^k \times \{0\}$ ist.

Hinweis: Verwende ein aus der Analysis II bekanntes äquivalentes Kriterium für Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^m$, welches diese mit lokalen Nullstellengebilden von Funktionen charakterisiert.

Aufgabe 9.4. (4 Punkte)

a) Zeige, dass $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $\det : \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ eine Submersion ist, d.h. det ist eine differenzierbare Abbildung, so dass für alle $A \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ die Abbildung $T_A \det$ surjektiv ist.

b) Zeige, dass die spezielle lineare Gruppe $\mathrm{Sl}_n(\mathbb{R})$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ ist.

c) Es sei $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der symmetrischen Matrizen, d.h.

$$\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A^t = A\}.$$

Zeige, dass die Abbildung $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$, $A \mapsto A^t A$ eine Submersion ist.

d) Zeige, dass die orthogonale Gruppe $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ ist.