

Algebra II, SoSe 2012 - Lösung Blatt 10

10.1. (i) • Behauptung: Ist $(\pi_{1,000}, \pi_\ell) \in \mathcal{X}_n$ ein ℓ -Zyklus,

dann:

$$(\pi_{1,000}, \pi_\ell) = (\pi_{1,2}) \cdot (\pi_{2,3}) \cdot \dots \cdot (\pi_{\ell-1,\ell}) \quad (*)$$

(Produkt von Transpositionen).

Dazu: Induktionsanfang: $\ell=2$. Hier ist nichts zu zeigen.

Induktionsschritt: " $(\ell-1) \rightarrow \ell$ ".

Es ist

$$(\pi_{1,000}, \pi_\ell) : \begin{cases} \pi_i \mapsto \pi_{i+1} & 1 \leq i < \ell \\ \pi_\ell \mapsto \pi_1 \\ x \mapsto x & \text{sonst} \end{cases}$$

Definieren

$$\tau : \begin{cases} \pi_i \mapsto \pi_{i+1} & 1 \leq i < \ell-1 \\ \pi_{\ell-1} \mapsto \pi_1 \\ x \mapsto x & \text{sonst} \end{cases}$$

d.h. $\tau = (\pi_{1,000}, \pi_{\ell-1})$ und $v = (\pi_{\ell-1}, \pi_\ell)$

$$\Rightarrow \tau \circ v : \begin{cases} \pi_i \xrightarrow{v} \pi_i \xrightarrow{\tau} \pi_{i+1} & 1 \leq i < \ell-1 \\ \pi_{\ell-1} \xrightarrow{v} \pi_\ell \xrightarrow{\tau} \pi_1 \\ \pi_\ell \xrightarrow{v} \pi_{\ell-1} \xrightarrow{\tau} \pi_1 \\ x \mapsto x & \text{sonst} \end{cases}$$

d.h. $\tau \circ v = (\pi_{1,000}, \pi_\ell)$.

$$\stackrel{\text{I.V.}}{\Rightarrow} (\pi_{1,000}, \pi_\ell) = (\pi_{1,2}) \cdot \dots \cdot (\pi_{\ell-2,\ell-1}) \cdot (\pi_{\ell-1}, \pi_\ell)$$

ok.

- Mit (*) Können wir jeden l -Zyklus als Produkt von Transpositionen schreiben.

$$\Rightarrow \text{sign}(n_1, \dots, n_l) = \underbrace{\text{sign}(n_1, n_2)}_{=-1} \cdot \dots \cdot \underbrace{\text{sign}(n_{l-1}, n_l)}_{=-1}$$

$\swarrow$ $l-1$ Faktoren

$$= (-1)^{l-1}.$$

- (ii) • Nach Vorlesung besitzt σ eine (bis auf die Reihenfolge) eindeutige Zerlegung

$$\sigma = \zeta_1 \cdot \dots \cdot \zeta_r$$

in disjunkte Zyklen ζ_i . Wir schreiben

$$\zeta_i = (n_{i,1}, \dots, n_{i,\ell_i}) \quad \text{mit } \ell_i > 1.$$

Dann gilt für $v \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \bigcup_{i=1}^r \{v_{i,1}, \dots, v_{i,\ell_i}\} =: M$.

$$\sigma(v) = v.$$

- Bei der natürlichen Operation zerfällt die Menge $\{1, 2, \dots, n\}$ also in folgende Bahnen:

$$B(v) = \{v\} \quad \text{für } v \in M.$$

$$B(v) = \{v_{i,1}, \dots, v_{i,\ell_i}\} \quad \text{für } v \in \{v_{i,1}, \dots, v_{i,\ell_i}\}.$$

und $1 \leq i \leq r$, zugehörig zu den Zyklen ζ_i .

- Wir ergänzen nun unsere Darstellung:

- Für die Anzahl der Bahnen erhalten wir also

$$m = r + |M|.$$

und andererseits gilt nach Konstruktion:

$$n = l_1 + \dots + l_r + |M|.$$

Mit (i) folgt nun:

$$\begin{aligned} \text{sign } \sigma &= \text{sign } \xi_1 \cdot \dots \cdot \text{sign } \xi_r = (-1)^{l_1-1} \cdot \dots \cdot (-1)^{l_r-1} \\ &= (-1)^{l_1 + \dots + l_r - r} \\ &= (-1)^{l_1 + \dots + l_r + |M| - (r + |M|)} \\ &= (-1)^{n-m}. \end{aligned}$$



10.2. (i) • Zunächst ist der Typ wohldefiniert, da die Darstellung

$$\sigma = \xi_1 \cdots \xi_r$$

von σ als Produkt disjunkter Zyklen nach Vorlesung bis auf die Reihenfolge eindeutig ist, und wir die Längen im Typ aufsteigend anordnen.

• Da die Zyklen disjunkt sind, gilt

$$(\xi_1 \cdots \xi_r)^m = \text{id} \Leftrightarrow \xi_1^m = \text{id}, \dots, \xi_r^m = \text{id}$$

Wegen $\text{ord } \xi_i = l_i$ muss also die Ordnung ein gemeinsames Vielfaches der $l_1, \dots, l_r$ sein. Da offenbar

$$\xi_i^{\text{KgV}(l_1, \dots, l_r)} = \text{id}$$

gilt, folgt, wenn σ den Typ $(l_1, \dots, l_r)$ besitzt:

$$\text{ord } \sigma = \text{KgV}(l_1, \dots, l_r).$$

(ii) • In $\mathcal{S}_4 = \{1, 2, 3, 4\}$ gibt es zunächst nur Zyklen einer Länge ≤ 4 .

↗ $\sigma \in \mathcal{S}_4$ mit $\text{ord } \sigma = 6$.

$\xRightarrow{(i)}$ In der Darstellung von σ als Produkt disjunkter

Zyklen gibt es ~~einigen~~ einen Zyklus der Länge 3 und einen der Länge 2.

Wegen $3+2=5 > 4$ können diese aber nicht disjunkt sein. $\nexists$

$\Rightarrow$ In $\mathcal{S}_4$ gibt es kein Element der Ordnung 6.

• In $\mathcal{S}_5$ haben alle Zyklen eine Länge ≤ 5 .

$\nearrow \sigma \in \mathcal{S}_5$ mit $\text{ord } \sigma = 10$. Analog zu eben gibt es dann in der Darstellung als Produkt disjunkter Zyklen einen Zyklus τ der Länge 5.

Dieser schöpft aber $\{1, 2, \dots, 5\}$ bereits aus, so dass

$$\tau = \sigma$$

gellen müsste, und damit wäre $\text{ord } \sigma = 5$ $\nexists$

$\Rightarrow$ In $\mathcal{S}_5$ gibt es kein Element der Ordnung 10.

(iii) • Sei $\sigma \in \mathcal{S}_n$ mit der Zerlegung

$$\sigma = \zeta_1 \cdot \dots \cdot \zeta_r$$

in disjunkte Zyklen und

$$\zeta_i = (a_{i1}^{(i)}, \dots, a_{i\ell_i}^{(i)}) \quad 1 \leq i \leq r.$$

Sei weiter $\tau \in \mathcal{S}_n$ beliebig. Wir zeigen: σ und $\tau\sigma\tau^{-1}$ haben denselben Typ.

Der Typ von σ ist zunächst die aufsteigende Anordnung der $l_1, \dots, l_r$.

Nach Konstruktion sind die Mengen

$$\{a_{l_1}^{(1)}, \dots, a_{l_1}^{(1)}\}, \dots, \{a_{l_r}^{(r)}, \dots, a_{l_r}^{(r)}\}$$

als Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$ disjunkt. Da τ bijektiv ist, sind auch die Mengen

$$\{b_{l_1}^{(i)}, \dots, b_{l_i}^{(i)}\} := \{\tau(a_{l_1}^{(i)}), \dots, \tau(a_{l_i}^{(i)})\} \quad 1 \leq i \leq r$$

(d.h. $b_j^{(i)} = \tau(a_j^{(i)})$) als Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$ disjunkt.

Für $1 \leq i \leq r$ gilt aber offenbar

$$\tau \cdot \zeta_i \cdot \tau^{-1} = (\tau(a_{l_1}^{(i)}), \dots, \tau(a_{l_i}^{(i)})) = (b_{l_1}^{(i)}, \dots, b_{l_i}^{(i)}).$$

Damit:

$$\tau\sigma\tau^{-1} = \tau \zeta_1 \dots \zeta_r \tau^{-1} = \tau \zeta_1 \tau^{-1} \tau \zeta_2 \tau^{-1} \dots \tau \zeta_r \tau^{-1}$$

$$= (b_{l_1}^{(1)}, \dots, b_{l_1}^{(1)}) \cdot \dots \cdot (b_{l_r}^{(r)}, \dots, b_{l_r}^{(r)})$$

← Darstellung von $\tau\sigma\tau^{-1}$ als Produkt disjunkter Zyklen.

$\Rightarrow \tau\sigma\tau^{-1}$ und σ haben denselben Typ.

• Umgekehrt seien $\sigma = \zeta_1 \cdots \zeta_r$ wie oben und

$$\pi = \eta_1 \cdots \eta_r \quad \text{mit}$$

$$\eta_i = (c_1^{(i)}, \dots, c_{\ell_i}^{(i)})$$

gegeben (hier haben wir implizit benutzt: σ und π haben denselben Typ).

Wir müssen zeigen, dass σ und π zueinander konjugiert sind.

Dazu sei

$$A := \{1, 2, \dots, n\} \setminus \bigcup_{i=1}^r \{a_1^{(i)}, \dots, a_{\ell_i}^{(i)}\}$$

$$C := \{1, 2, \dots, n\} \setminus \bigcup_{i=1}^r \{c_1^{(i)}, \dots, c_{\ell_i}^{(i)}\}$$

Nach Konstruktion ("Typ ist gleich") ist $\#A = \#C$.

Wir wählen eine Permutation $\tau \in \mathfrak{S}_n$ mit folgenden Eigenschaften:

• τ induziert eine Bijektion zwischen A und C , speziell:

• $\forall (i, j) \text{ mit } 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq \ell_i \text{ gelte}$

$$\tau(a_j^{(i)}) = c_j^{(i)}$$

Mit dieser Wahl von τ ist $\tau \sigma \tau^{-1} = \tau \zeta_1 \cdots \zeta_r \tau^{-1} = \tau \zeta_1 \tau^{-1} \cdots \tau \zeta_r \tau^{-1}$
 $= \eta_1 \cdots \eta_r = \pi$.

$\Rightarrow \sigma$ und π sind in $\mathfrak{S}_n$ konjugiert. ■

10.3. (i) Nach Vorlesung wird $\mathcal{S}_n$ von

$$(1,2), (2,3), \dots, (n-1,n) \quad (*)$$

erzeugt. Sei $\pi = (1,2,\dots,n-1,n)$. Wir zeigen, dass wir mit $(1,2)$ und π alle Elemente aus $(*)$ erzeugen können. Damit folgt dann, dass $\mathcal{S}_n$ von $(1,2)$ und π erzeugt wird.

Sei also v mit $1 \leq v \leq n-2$ gegeben. Es ist

$$\pi^v(1) = v+1 \quad \text{sowie} \quad \pi^v(2) = v+2.$$

$$\Rightarrow \pi^v \cdot (1,2) \cdot \pi^{-v} = (\pi^v(1), \pi^v(2)) = (v+1, v+2) \quad \text{ok.}$$

(ii) Wir schreiben wieder $\pi = (1,2,\dots,p-1,p)$.

$$\Rightarrow \text{ord } \pi = p \quad \text{Primzahl.} \quad (!)$$

$$\Rightarrow \text{ord } \pi^j = p \quad \forall 1 \leq j \leq p-1$$

$$\Rightarrow \pi^j \text{ ist } p\text{-Zyklus } \forall 1 \leq j \leq p-1.$$

Insbesondere ist also $\pi^{i-1} = (1,i,\dots)$ ein p -Zyklus.

Wir schreiben

$$\pi^{i-1} = (a_1, a_2, \dots, a_p) \quad a_1 = 1, \quad a_2 = i.$$

$$\text{Dann: } \{a_1, a_2, \dots, a_p\} = \{1, 2, \dots, p\}.$$

$\Rightarrow$ Das Erzeugnis von $(1, i)$ und π enthält
 (a_1, a_2) sowie $(a_1, a_2, \dots, a_p)$

Damit sind wir aber bis auf eine Bijektion („Umbenennung“)
der $1, 2, \dots, p$ in der Situation aus (i).

$\stackrel{(i)}{\Rightarrow}$ Das Erzeugnis enthält
 $(a_1, a_2), (a_2, a_3), \dots, (a_{p-1}, a_p)$

$\stackrel{„VL“}{\Rightarrow}$ Das Erzeugnis besteht aus allen Permutationen
der Menge $\{a_1, a_2, \dots, a_p\}$

Da diese Menge bis auf eine Bijektion (d.h. Permutation)
der Menge $\{1, 2, \dots, p\}$ entspricht, erzeugen $(1, i)$ und π
ganz $\mathcal{H}_p$.

(iii) In $\mathcal{H}_4$ betrachten wir

$$\tau = (1, 3) \quad \text{und} \quad \sigma = (1, 2, 3, 4)$$

Wegen $(1, 2, 3, 4)^2 = (1, 3)(2, 4)$ sehen wir, dass das
Argument aus (ii) nicht funktioniert (denn: σ^{i-1} ist
hier kein 4-Zyklus).

Tatsächlich sehen wir: Wegen $(1, 3) \cdot (1, 2, 3, 4)^2 = (2, 4)$
erzeugen τ und σ gerade die Diedergruppe D_4 .

(vgl. ÜA. 9.4). Es ist

$$\#D_4 = 8 < 24 = 4! = \#S_4 \quad (\text{Algebra I})$$

d.h. τ und σ erzeugen eine echte Untergruppe von S_4 . 

10.4. • In der Vorlesung wurde gezeigt:

Ist $n \geq 3$ und $a, b \in \{1, 2, \dots, n\}$ mit $a \neq b$, so wird A_n von den 3-Zyklen der Form

$$(a, b, d) \text{ mit } d \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{a, b\}$$

erzeugt.

• Gelte nun für den Normalteiler $N \triangleleft A_n$: $(a, b, c) \in N$.

Mit obiger Aussage genügt es, zu zeigen:

Ist $d \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{a, b, c\}$, so folgt: $(a, b, d) \in N$.

• Sei also $d \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{a, b, c\}$.

Setze $\tau := (a, b) \cdot (c, d)$.

$$\Rightarrow \tau \cdot \tau = \text{id}, \text{ d.h. } \tau = \tau^{-1}.$$

Wegen $\text{sign } \tau = (-1) \cdot (-1) = 1$ ist $\tau \in A_n$.

Da $N \triangleleft A_n$, ist also $\tau \cdot (a, b, c) \cdot \tau^{-1} \in N$.

Aber:

$$\tau \cdot (a, b, c) \cdot \tau^{-1} = \tau \cdot (a, b, c) \cdot \tau : \begin{cases} a \mapsto d \\ b \mapsto a \\ c \mapsto c \\ d \mapsto b \\ x \mapsto x \text{ sonst.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \tau \cdot (a, b, c) \cdot \tau^{-1} = (b, a, d) = (a, d, b) \in N$$

$$\Rightarrow \text{Auch } (a, d, b)^2 \text{ liegt in } N.$$

Es ist

$$(a, d, b) \cdot (a, d, b): \begin{cases} a \mapsto b \\ b \mapsto d \\ d \mapsto a \\ x \mapsto x \text{ sonst} \end{cases}$$

$$\Rightarrow N \ni (a, d, b)^2 = (a, b, d)$$

