Sommersemester 2012

10. Übungsblatt zur Algebra II - Galoistheorie

Abgabe: Do, 21.06.2012, bis 17 Uhr, Lahnberge, Briefkasten Ebene D6

1. (i) Sei $\xi \in \mathfrak{S}_n$ ein l-Zyklus. Zeigen Sie:

$$\operatorname{sign} \xi = (-1)^{l-1}$$

(ii) Für eine Permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ sei $\langle \sigma \rangle$ die von σ erzeugte zyklische Gruppe. $\langle \sigma \rangle$ habe bei der natürlichen Operation auf $\{1, 2, \ldots, n\}$ m Bahnen. Zeigen Sie:

$$\operatorname{sign} \sigma = (-1)^{n-m}$$

2. Für ein Element $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ sei $\sigma = \xi_1 \cdot \ldots \cdot \xi_r$ die Darstellung als Produkt disjunkter Zyklen der Längen $l_1, \ldots, l_r$ mit $1 < l_1 \leq l_2 \leq \ldots \leq l_r$. Dann heißt das Tupel $(l_1, \ldots, l_r)$ der Typ von σ.

   (i) Bestimmen Sie mit Hilfe des Typs die Ordnung von σ.

   (ii) Gibt es in $\mathfrak{S}_4$ ein Element der Ordnung 6, in $\mathfrak{S}_5$ ein Element der Ordnung 10? Begründen Sie ihr Ergebnis.

   (iii) Zeigen Sie, daß zwei Permutationen in $\mathfrak{S}_n$ genau dann konjugiert sind, wenn sie denselben Typ haben.

3. Zeigen Sie:

   (i) Für $n \geq 2$ wird $\mathfrak{S}_n$ von $(1, 2)$ und $(1, 2, \ldots, n-1, n)$ erzeugt.

   (ii) Sei p eine Primzahl. Dann gilt für jedes i mit $1 < i \leq p$: $\mathfrak{S}_p$ wird von $(1, i)$ und $(1, 2, \ldots, p-1, p)$ erzeugt.

   (iii) In (ii) ist die Voraussetzung, daß p eine Primzahl ist, wesentlich.

4. Sei $n \geq 3$ und N ein Normalteiler der alternierenden Gruppe $\mathfrak{A}_n$, welcher einen 3-Zyklus enthalte. Zeigen Sie: $N = \mathfrak{A}_n$