Sommersemester 2012

11. Übungsblatt zur Algebra II - Galoistheorie

Abgabe: Do, 28.06.2012, bis 17 Uhr, Lahnberge, Briefkasten Ebene D6

1. (i) Seien p eine Primzahl und $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ ein irreduzibles Polynom vom Grad p. f habe in $\mathbb{C}$ genau zwei nicht reelle Nullstellen. Zeigen Sie: Die Galoisgruppe des Zerfällungskörpers von f über $\mathbb{Q}$ ist isomorph zu $\mathfrak{S}_p$.

   (ii) Sei $f(X) = X^5 - 6X + 3 \in \mathbb{Q}[X]$, und sei E der Zerfällungskörper von f über $\mathbb{Q}$. Bestimmen Sie die Galoisgruppe von E über $\mathbb{Q}$.

   Hinweis: Blatt 10, Aufgabe 3 (ii).

2. Sei $p \geq 5$ eine Primzahl. Seien
$$f_p(X) = X^3(X-2)(X-4) \cdot \ldots \cdot (X - 2(p-3)) - 2 \in \mathbb{Q}[X]$$
und E der Zerfällungskörper von f_p über $\mathbb{Q}$. Zeigen Sie:
$$\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}) \simeq \mathfrak{S}_p$$

3. Eine Körpererweiterung E/K heißt Radikalerweiterung genau dann, wenn es eine Kette von Körpern
$$K = K_0 \subset K_1 \subset \ldots \subset K_r = E$$
gibt, in welcher für $\rho = 1, \ldots, r$ gilt: K_ρ entsteht aus $K_{\rho-1}$ durch Adjunktion einer n_ρ-ten Wurzel, d.h. es gibt eine natürliche Zahl n_ρ und ein $a_\rho \in K_{\rho-1}$, so daß $K_\rho = K_{\rho-1}(b_\rho)$ gilt, wobei b_ρ Nullstelle des Polynoms $X^{n_\rho} - a_\rho$ ist.

   Sei E der Zerfällungskörper von $X^{15} - 1$ über $\mathbb{Q}$. Zeigen Sie: Jeder Zwischenkörper K mit $\mathbb{Q} \subset K \subset E$ ist eine Radikalerweiterung von $\mathbb{Q}$.

4. Sei E der Zerfällungskörper von $X^7 - 1$ über $\mathbb{Q}$. Geben Sie einen Zwischenkörper K mit $\mathbb{Q} \subset K \subset E$ an, welcher keine Radikalerweiterung von $\mathbb{Q}$ ist.