Sommersemester 2012

12. Übungsblatt zur Algebra II - Galoistheorie

1. Bestimmen Sie die Galoisgruppen folgender Polynome.

   (i) $X^3 + 2X + 2 \in \mathbb{Q}[X]$

   (ii) $X^3 + 3X^2 + 6X + 6 \in \mathbb{Q}[X]$

2. Bestimmen Sie die Galoisgruppen und die Zerfällungskörper über $\mathbb{Q}$ für die folgenden Polynome.

   (i) $X^4 - 4 \in \mathbb{Q}[X]$

   (ii) $X^4 - 6X^2 + 5 \in \mathbb{Q}[X]$

3. Sei $K = \mathbb{Q}(i + \sqrt{2})$.

   (i) Zeigen Sie: $K/\mathbb{Q}$ ist eine Galoiserweiterung.

   (ii) Bestimmen Sie $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$.

4. Seien K ein Körper und $f(X) \in K[X]$ ein separables, irreduzibles Polynom vom Grad n mit den Nullstellen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ in der algebraischen Hülle $\overline{K}$. Sei $E = K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ der Zerfällungskörper von f über K. Seien weiter $X_1, \ldots, X_n$ über $\overline{K}$ unabhängige Variablen.

   Mit $\widetilde{K}$ bezeichnen wir den Körper $K(X_1, \ldots, X_n)$ der rationalen Funktionen in $X_1, \ldots, X_n$ über K, und weiter sei $\widetilde{E} = E(X_1, \ldots, X_n)$. Zeigen Sie:

   (i) $\widetilde{E}/\widetilde{K}$ ist eine Galoiserweiterung.

   (ii) Es gilt $\mathrm{Gal}(\widetilde{E}/\widetilde{K}) \simeq \mathrm{Gal}(E/K)$.

   (iii) Für das Element $h(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i$ in $\widetilde{E}$ gilt:
   $\sigma = id_{\widetilde{E}}$ ist das einzige Element in $\mathrm{Gal}(\widetilde{E}/\widetilde{K})$, welches $\sigma(h) = h$ erfüllt.

   (iv) Es gilt $\widetilde{E} = \widetilde{K}(h)$.

Bitte wenden!

5. Seien $\mathbb{F}_2$ der Körper mit 2 Elementen und $f(X) = X^4 + X^3 + \overline{1} \in \mathbb{F}_2[X]$. Zeigen Sie:

   (i) $f(X)$ ist irreduzibel über $\mathbb{F}_2$.

   (ii) Ist α eine Nullstelle von $f(X)$ in der algebraischen Hülle $\overline{\mathbb{F}_2}$, so ist α eine primitive 15-te Einheitswurzel.

   (iii) Bestimmen Sie den Zefällungskörper und die Galoisgruppe von f über $\mathbb{F}_2$.

6. Seien p und q voneinander verschiedene Primzahlen. Zeigen Sie: Jede Gruppe G der Ordnung pq ist auflösbar.