Sommersemester 2012

2. Übungsblatt zur Algebra II - Galoistheorie

Abgabe: Do, 26.04.2012, bis 17 Uhr, Lahnberge, Briefkasten Ebene D6

1. Welche der folgenden Polynome in $\mathbb{Q}[X]$ haben mehrfache Nullstellen?
   (i) $X^5 + 6X^3 + 3X + 4$
   (ii) $X^4 - 5X^3 + 6X^2 + 4X - 8$
   (iii) $X^5 + 5X + 5$

2. Sei K ein Körper der Charakteristik $p > 0$. Seien $L = K(X, Y)$ der Körper der rationalen Funktionen in den unabhängigen Variablen X und Y über K und $E = K(X^p, Y^p)$. Zeigen Sie:
   (i) $[L : E] = p^2$
   (ii) Für alle Elemente $\alpha \in L$ gilt $\alpha^p \in E$.
   (iii) Die Erweiterung L/E besitzt kein primitives Element.

3. Seien K ein Körper und $f(X) \in K[X]$ ein normiertes, irreduzibles Polynom. f habe in einem Erweiterungskörper von K die Nullstellen α und $\alpha + 1$. Zeigen Sie:
   (i) K hat positive Charakteristik.

   Gilt zusätzlich $\chi(K) = p$ und $\alpha^p - \alpha \in K$, so folgt:
   (ii) $f(X) = X^p - X - (\alpha^p - \alpha)$
   (iii) Die Erweiterung $K(\alpha)/K$ ist normal und separabel.

4. Bestimmen Sie zu der Erweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt[3]{3})/\mathbb{Q}$ einen minimalen Erweiterungskörper $E \supset \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt[3]{3})$, so daß $E/\mathbb{Q}$ normal ist. Geben Sie ein primitives Element für die Erweiterung $E/\mathbb{Q}$ an.