Sommersemester 2012

3. Übungsblatt zur Algebra II - Galoistheorie

Abgabe: Do, 03.05.2012, bis 17 Uhr, Lahnberge, Briefkasten Ebene D6

1. Sei K ein Körper der Charakteristik $p > 0$. Sei E eine Erweiterung von K. Ein Element $\alpha \in E$ heißt rein inseparabel über K genau dann, wenn es eine ganze Zahl $e \geq 0$ gibt, mit $\alpha^{p^e} \in K$. Zeigen Sie:
   - (i) Ist $\alpha \in E$ rein inseparabel über K und ist $e \geq 0$ die kleinste ganze Zahl mit $\alpha^{p^e} \in K$, so ist $X^{p^e} - \alpha^{p^e}$ das Minimalpolynom von α über K.
   - (ii) Ein Element $\alpha \in E$ ist genau dann separabel und rein inseparabel über K, wenn $\alpha \in K$ gilt.
2. Sei K ein Körper der Charakteristik $p > 0$. Sei E eine endliche Erweiterung von K. Zeigen Sie: Ist p kein Teiler von $[E : K]$, so ist E eine separable Erweiterung von K.
3. Sei E/K eine algebraische Körpererweiterung. Zeigen Sie:
   - (i) Ist K vollkommen, so ist auch E vollkommen.
   - (ii) Ist E vollkommen und separabel über K, so ist auch K vollkommen.
   - (iii) Die Behauptung in (ii) ist ohne die Voraussetzung, daß E/K separabel ist, im allgemeinen falsch.
4. Sei K ein Körper der Charakteristik $p > 0$. Zeigen Sie, daß für ein über K algebraisches Element α gilt: α ist separabel über K genau dann, wenn $K[\alpha] = K[\alpha^p]$ gilt.