Sommersemester 2012

4. Übungsblatt zur Algebra II - Galoistheorie

Abgabe: Do, 10.05.2012, bis 17 Uhr, Lahnberge, Briefkasten Ebene D6

1. Sei $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ ein irreduzibles Polynom. Die Galoisgruppe von f sei abelsch. Sei E der Zerfällungskörper von f über $\mathbb{Q}$. Zeigen Sie: Jede Wurzel α von f ist primitives Element der Erweiterung $E/\mathbb{Q}$.

2. Sei $E = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$.

   (i) Zeigen Sie, daß $E/\mathbb{Q}$ eine Galoiserweiterung ist und bestimmen Sie die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$.

   (ii) Bestimmen Sie sämtliche Zwischenkörper L mit $\mathbb{Q} \subset L \subset E$ und die zugehörigen Galoisgruppen $\mathrm{Gal}(E/L)$.

3. Für $a \in \mathbb{Z}$ sei $f_a(X) := X^3 + aX^2 + (a-3)X - 1 \in \mathbb{Q}[X]$. Zeigen Sie:

   (i) f_a besitzt keine rationalen Nullstellen.

   (ii) Ist α eine Nullstelle von f_a, so ist auch $-\frac{1}{1+\alpha}$ eine Nullstelle von f_a.

   (iii) Durch $x \mapsto -\frac{1}{1+x}$ wird eine fixpunktfreie Bijektion φ von $\mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$ in sich definiert, und es gilt $\varphi^3 = id$.

   (iv) Ist E der Zerfällungskörper von $f_a(X)$ über $\mathbb{Q}$, so gilt
$$\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}) \simeq \left(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +\right).$$

4. Sei $\mathbb{F}_3$ der Körper mit 3 Elementen.

   (i) Zeigen Sie: $f(X) = X^3 - X + 1 \in \mathbb{F}_3[X]$ ist irreduzibel.

   (ii) Sei $L = \mathbb{F}_3[X]/(f(X))$. Geben Sie eine Zerlegung von f über L in irreduzible Faktoren an.

   (iii) Bestimmen Sie ein erzeugendes Element der multiplikativen Gruppe L^*.