Sommersemester 2012

5. Übungsblatt zur Algebra II - Galoistheorie

Abgabe: Fr, 18.05.2012, bis 12 Uhr, Lahnberge, Briefkasten Ebene D6

1. Seien p eine Primzahl und $\mathbb{F}_{p^n}$ der Körper mit p^n Elementen. Zeigen Sie:
   (i) Ist $\alpha \in \mathbb{F}_{p^n}^*$ ein Element, welches die multiplikative Gruppe $\mathbb{F}_{p^n}^*$ erzeugt, so erzeugt auch jedes zu α über $\mathbb{F}_p$ konjugierte Element $\mathbb{F}_{p^n}^*$.
   (ii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und für alle Primzahlen p gilt
   $$\varphi(p^n - 1) \equiv 0 \bmod n.$$
2. Für eine Primzahl p seien $f(X) = X^p - X - 1 \in \mathbb{Q}[X]$ und $f_p(X)$ das kanonische Bild von f in $\mathbb{F}_p[X]$. Zeigen Sie:
   (i) $f_p(X)$ ist irreduzibel über $\mathbb{F}_p$.
   Anleitung: Sei α eine Nullstelle von f_p. Wie sehen die weiteren Nullstellen von f_p aus?
   (ii) $f(X)$ ist irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$.
3. Sei K ein endlicher Körper und gelte $K \neq \mathbb{F}_2$. Zeigen Sie:
   (i) $\sum_{x \in K} x = 0$
   (ii) $\prod_{x \in K^*} x = -1$
   (iii) Für alle Primzahlen p gilt
   $$(p-1)! \equiv -1 \bmod p.$$
4. Seien p eine Primzahl und n eine natürliche Zahl. Zeigen Sie:
   (i) Ein irreduzibles Polynom $f(X) \in \mathbb{F}_p[X]$ teilt $X^{p^n} - X$ genau dann, wenn $\operatorname{Grad} f \mid n$ gilt.
   (ii) Für eine natürliche Zahl d sei $\operatorname{Irr}(d)$ die Menge der normierten, irreduziblen Polynome vom Grad d in $\mathbb{F}_p[X]$. Dann gilt
   $$X^{p^n} - X = \prod_{d \mid n} \prod_{f \in \operatorname{Irr}(d)} f(X).$$