Sommersemester 2012

## 6. Übungsblatt zur Algebra II - Galoistheorie

Abgabe: Do, 24.05.2012, bis 17 Uhr, Lahnberge, Briefkasten Ebene D6

1. Sei $K$ ein endlicher Erweiterungskörper von $\mathbb{Q}$. Zeigen Sie: $K$ enthält nur endlich viele Einheitswurzeln.

2. Seien $p$ eine ungerade Primzahl und $\zeta_p$ eine primitive $p$-te Einheitswurzel über $\mathbb{Q}$. Zeigen Sie:

   (i) Die Erweiterung $\mathbb{Q}(\zeta_p)/\mathbb{Q}$ besitzt genau einen Zwischenkörper $Z$ mit $[Z : \mathbb{Q}] = 2$.

   (ii) Es gilt $Z \subset \mathbb{R}$ genau dann, wenn $p \equiv 1 \bmod 4$ erfüllt ist.
   *Anleitung:* Liegt $\xi$ auf dem Einheitskreis, so gilt für die komplexe Konjugation $\overline{\xi} = \xi^{-1}$.

3. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\Phi_n(X)$ das $n$-te Kreisteilungspolynom über $\mathbb{Q}$. Zeigen Sie:

   (i) Ist $p$ eine Primzahl und ist $r$ eine natürliche Zahl, so gilt

   $$\Phi_{p^r}(X) = \Phi_p(X^{p^{r-1}}).$$

   (ii) Hat $n \in \mathbb{N}$ die Primfaktorzerlegung $n = p_1^{r_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{r_s}$ mit Exponenten $r_\sigma \in \mathbb{N}$ $(\sigma = 1, \ldots, s)$, so gilt

   $$\Phi_n(X) = \Phi_{p_1 \cdot \ldots \cdot p_s}(X^{p_1^{r_1-1} \cdot \ldots \cdot p_s^{r_s-1}}).$$

   (iii) Für ungerades $n \geq 3$ gilt

   $$\Phi_{2n}(X) = \Phi_n(-X).$$

4. Für eine natürliche Zahl $n$ sei $\zeta_n$ eine primitive $n$-te Einheitswurzel über $\mathbb{Q}$. Sei $m$ eine weitere natürliche Zahl und gelte $(m, n) = 1$. Zeigen Sie:

   $$\mathrm{Gal}\,(\mathbb{Q}(\zeta_{mn})/\mathbb{Q}) \simeq \mathrm{Gal}\,(\mathbb{Q}(\zeta_m)/\mathbb{Q}) \times \mathrm{Gal}\,(\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q})$$