Sommersemester 2012

7. Übungsblatt zur Algebra II - Galoistheorie

Abgabe: Do, 31.05.2012, bis 17 Uhr, Lahnberge, Briefkasten Ebene D6

1. Sei E/K eine endliche Galoiserweiterung mit $G = \mathrm{Gal}(E/K)$. Für eine Untergruppe U von G und für $\alpha \in E$ definieren wir
$$\mathrm{Sp}_{\mathrm{U}}(\alpha) := \sum_{\sigma \in U} \sigma(\alpha).$$
Zeigen Sie:
   (i) Es gibt ein $\alpha \in E$ mit $\mathrm{Sp}_U(\alpha) \neq 0$.
   (ii) Sei $\alpha \in E$ wie in (i) und sei $\beta \in E^U$. Dann gilt für $\gamma := \frac{\alpha}{\mathrm{Sp}_U(\alpha)}\beta$
$$\mathrm{Sp}_U(\gamma) = \beta.$$
   (iii) Ist M ein Erzeugendensystem von E als Vektorraum über K, so ist $\mathrm{Sp}_U(M) := \{\mathrm{Sp}_U(m) \mid m \in M\}$ ein Erzeugendensystem von E^U über K.

2. Seien G eine Gruppe, K ein Körper und G' die Menge der Charaktere von G in K. Für $\sigma_1, \sigma_2 \in G'$ definieren wir $\sigma_1 \cdot \sigma_2$ durch
$$(\sigma_1 \cdot \sigma_2)(g) = \sigma_1(g) \cdot \sigma_2(g) \quad \forall g \in G.$$
Zeigen Sie:
   (i) $(G', \cdot)$ ist eine Gruppe (die Gruppe der Charaktere von G in K).
   (ii) Ist G endlich und abelsch, und ist $K = \mathbb{C}$, so gilt $G' \simeq G$.

   Anleitung: Untersuchen Sie zunächst zyklische Gruppen G und wenden Sie dann den Hauptsatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen an.

Bitte wenden!

3. Sei E/K eine endliche Galoiserweiterung mit der Galoisgruppe G. Sei G' die Gruppe der Charaktere $\chi : G \to K^*$. Zeigen Sie:

   (i) Zu jedem $\chi \in G'$ gibt es ein Element $a \in E$, so daß für
   $$\alpha := \sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma) \cdot \sigma(a)$$
   gilt: $\alpha \neq 0$. Mit einem solchen α gilt
   $$\chi(\sigma) = \frac{\alpha}{\sigma(\alpha)} \quad \forall \sigma \in G. \qquad (*)$$
   Durch die Bedingung (*) ist α bis auf einen Faktor $\beta \in K^*$ eindeutig bestimmt.

   (ii) Ist α ein Element in E^*, so daß $\frac{\alpha}{\sigma(\alpha)} \in K$ für alle $\sigma \in G$ gilt, so wird durch
   $$\sigma \longmapsto \frac{\alpha}{\sigma(\alpha)}$$
   ein Charakter χ von G in K definiert.

   (iii) Es gibt einen injektiven Homomorphismus φ von G' in ${}^{E^*}\!/_{K^*}$.

4. Sei p eine Primzahl. Seien $n, d \in \mathbb{N}$ und $q = p^n$. Sei $K = \mathbb{F}_q$ und E eine Erweiterung von K mit $[E : K] = d$. Zeigen Sie:

   (i) Mit $m = \frac{q^d - 1}{q - 1}$ gilt
   $$N_{E/K}(\alpha) = \alpha^m$$
   für alle $\alpha \in E$.

   (ii) Der Homomorphismus
   $$N_{E/K} : E^* \longrightarrow K^*$$
   ist surjektiv.