Sommersemester 2012

8. Übungsblatt zur Algebra II - Galoistheorie

Abgabe: Fr, 08.06.2012, bis 12 Uhr, Lahnberge, Briefkasten Ebene D6

1. Seien a, b, c teilerfremde natürliche Zahlen. Zeigen Sie: Das Tripel (a, b, c) mit geradem a erfüllt die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ genau dann, wenn es natürliche Zahlen n, m gibt, so daß

   $$(a, b, c) = (2nm, n^2 - m^2, n^2 + m^2)$$

   gilt.

2. Sei K ein Körper der Charakteristik 0, welcher die n-ten Einheitswurzeln enthalte. Sei $f(X) = X^n - c \in K[X]$ ein irreduzibles Polynom, und seien E der Zerfällungskörper von f über K, sowie α eine Nullstelle von f in E. Zeigen Sie: Gilt $n = n_1 n_2$ mit $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, so ist $K(\alpha^{n_1})$ der einzige Zwischenkörper Z von E/K mit $[Z : K] = n_2$.

3. Sei K ein Körper der Charakteristik 0, welcher die n-ten Einheitswurzeln enthalte. Seien $c_1, \ldots, c_r \in K$ und sei

   $$f(X) = (X^n - c_1) \cdot \ldots \cdot (X^n - c_r).$$

   Sei G die Galoisgruppe von f. Zeigen Sie:

   (i) G ist abelsch.

   (ii) Für alle $\sigma \in G$ ist $\operatorname{ord} \sigma$ ein Teiler von n.

Bitte wenden!

4. Seien $a \in \mathbb{Q}$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Seien $\alpha \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von $X^n - a$ und $\xi_n \in \mathbb{C}$ eine primitive n-te Einheitswurzel. Dann ist $E = \mathbb{Q}(\alpha, \xi_n)$ ein Zerfällungskörper von $X^n - a$ über $\mathbb{Q}$. Zeigen Sie:

   (i) Ist M die multiplikative Gruppe der Matrizen

   $$\begin{pmatrix} \overline{r} & \overline{s} \\ \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \overline{0}, \overline{1}, \overline{s} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\,,\ \overline{r} \in \left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\right)^*$$

   und haben wir für ein Element $\sigma \in \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ die Beziehungen

   $$\sigma(\xi_n) = \xi_n^r \quad \text{und} \quad \sigma(\alpha) = \xi_n^s \alpha,$$

   so wird durch $\psi : \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}) \to M$ mit

   $$\psi(\sigma) = \begin{pmatrix} \overline{r} & \overline{s} \\ \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix}$$

   ein injektiver Gruppenhomomorphismus definiert.

   (ii) $E/\mathbb{Q}$ ist im allgemeinen nicht zyklisch.