Sommersemester 2012

9. Übungsblatt zur Algebra II - Galoistheorie

Abgabe: Do, 14.06.2012, bis 17 Uhr, Lahnberge, Briefkasten Ebene D6

1. Seien p und q Primzahlen. Zeigen Sie: Jede Gruppe G der Ordnung p^2q ist auflösbar.

2. (i) Geben Sie zu den beiden Normalreihen

$$\mathbb{Z} \rhd 15\mathbb{Z} \rhd 60\mathbb{Z} \rhd \{0\} \quad \text{und} \quad \mathbb{Z} \rhd 12\mathbb{Z} \rhd \{0\}$$

äquivalente Verfeinerungen und die zugehörigen Faktoren an.

(ii) Geben Sie für die Gruppe $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$ alle möglichen Kompositionsreihen mit den zugehörigen Faktoren an.

(iii) Sei p eine Primzahl. Geben Sie für die Gruppe $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ eine Kompositionsreihe an.

3. Seien p eine Primzahl, n eine natürliche Zahl und G eine Gruppe der Ordnung p^n. Zeigen Sie:

(i) Jede Kompositionsreihe von G enthält genau $n+1$ Untergruppen.

(ii) Ist H eine Untergruppe von G, dann gibt es eine Kompositionsreihe von G, in der H einer der Terme ist.

4. Seien n eine natürliche Zahl und D_n die Diedergruppe n-ten Grades, d.h. D_n ist die von $\sigma = (1, 2, \ldots, n)$ und

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n \\ 1 & n & n-1 & & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

erzeugte Untergruppe von $\mathfrak{S}_n$ und es ist $\operatorname{ord}\sigma = n$, $\operatorname{ord}\tau = 2$ sowie $\sigma\tau\sigma = \tau$. Zeigen Sie:

(i) Jede Untergruppe der von σ erzeugten zyklischen Gruppe ist ein Normalteiler von D_n.

(ii) $[D_n, D_n] = \langle \sigma^2 \rangle$