Philipps-Universität Marburg
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Hans Peter Schlickewei
Dipl.-Math. Thomas Geiger

Klausur zur Vorlesung Algebra II - Galoistheorie
im Sommersemester 2012
Donnerstag, den 05.07.2012, 08.00 – 10.00 Uhr

☐ Frau ☐ Herr

Name: ....

Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

☐ Diese Klausur ist mein letzter Prüfungsversuch im Modul Algebra.

- Füllen Sie bitte zuerst das Deckblatt aus und versehen Sie **alle** Blätter mit Ihrem Namen!
- Bearbeiten Sie die Aufgaben auf den ausgegebenen Blättern. Es befinden sich noch leere Blätter bei der Aufsicht, falls der Platz unter der Aufgabenstellung und auf der Rückseite des Aufgabenblattes nicht ausreichen sollten.
- Es sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Viel Erfolg!

A1	A2	A3	A4	$\sum$
4	4	3	4	15

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*

Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{7})$.

(i) Zeigen Sie: $K/\mathbb{Q}$ ist eine Galoiserweiterung.

(ii) Bestimmen Sie $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$.

(iii) Bestimmen Sie alle Zwischenkörper L mit $\mathbb{Q} \subset L \subset K$.

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*

Sei $\mathbb{F}_3$ der Körper mit 3 Elementen. Seien weiter $f(X) = X^3 + \overline{2}X + \overline{1} \in \mathbb{F}_3[X]$ und $g(X) = X^3 + X^2 + X + \overline{2} \in \mathbb{F}_3[X]$. Mit E_f bzw. E_g bezeichnen wir den Zerfällungskörper von f bzw. g über $\mathbb{F}_3$.

(i) Bestimmen Sie die Grade $[E_f : \mathbb{F}_3]$ und $[E_g : \mathbb{F}_3]$.

(ii) Bestimmen Sie die Galoisgruppen $\mathrm{Gal}(E_f/\mathbb{F}_3)$ und $\mathrm{Gal}(E_g/\mathbb{F}_3)$.

(iii) Gibt es eine Beziehung zwischen E_f und E_g?

Aufgabe 3. (*3 Punkte*)

(i) Geben Sie zu den beiden Normalreihen

$$\mathbb{Z} \triangleright 15\mathbb{Z} \triangleright 60\mathbb{Z} \triangleright \{0\}$$

und

$$\mathbb{Z} \triangleright 12\mathbb{Z} \triangleright \{0\}$$

äquivalente Verfeinerungen und die zugehörigen Faktoren an.

(ii) Seien p eine Primzahl, n eine natürliche Zahl und G eine Gruppe der Ordnung p^n. Zeigen Sie: Jede Kompositionsreihe von G enthält genau $n+1$ Untergruppen.

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*

Seien E/K eine endliche Galoiserweiterung und $\alpha \in E$ ein Element mit $\sigma(\alpha) \neq \alpha$ für alle $\sigma \in \mathrm{Gal}(E/K) \setminus \{\mathrm{id}_E\}$. Zeigen Sie: α ist ein primitives Element der Erweiterung E/K.

Schmierblatt

Schmierblatt

Schmierblatt