Analysis I, SoSe 2012 – Lösung Blatt 1

1.1. (i) Behauptung:

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ gilt: } \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} \cdot n \cdot (n+1)(2n+1)$$

Beweis durch vollständige Induktion:

- Induktionsanfang $n = 0$:

$$\sum_{k=1}^{0} k^2 = 0 \quad \text{und} \quad \frac{1}{6} \cdot 0 \cdot 1 \cdot 1 = 0 \qquad \text{ok.}$$

- Induktionsschritt $n \to n+1$:

Es gelte $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)$. Dann:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} k^2 \right) + (n+1)^2$$

$$\overset{\text{I.V.}}{=} \frac{1}{6} \cdot n \cdot (n+1)(2n+1) + (n+1)^2$$

$$= \frac{1}{6}(n+1)\Big(n \cdot (2n+1) + 6(n+1) \Big)$$

$$= \frac{1}{6}(n+1)\left(2n^2 + 7n + 6\right)$$

$$= \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)$$

$$= \frac{1}{6}(n+1)\big((n+1)+1\big)\big(2(n+1)+1\big) \qquad \text{ok.}$$

(ii) Beweis durch vollständige Induktion.

- Induktionsanfang $n = 0$:

$$\sum_{K=1}^{2\cdot 0} (-1)^{K+1} \cdot \frac{1}{K} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Summe leer}}}{=} 0 \quad \text{und} \quad \sum_{K=1}^{0} \frac{1}{n+K} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Summe leer}}}{=} 0 \qquad \text{ok.}$$

- Induktionsschritt $n \to n+1$:

Es gelte $\displaystyle\sum_{K=1}^{2n} (-1)^{K+1} \cdot \frac{1}{K} = \sum_{K=1}^{n} \frac{1}{n+K}$. Dann:

$$\sum_{K=1}^{2(n+1)} (-1)^{K+1} \cdot \frac{1}{K} = \sum_{K=1}^{2n+2} (-1)^{K+1} \cdot \frac{1}{K}$$

$$= \sum_{K=1}^{2n} (-1)^{K+1} \cdot \frac{1}{K} + (-1)^{(2n+1)+1} \cdot \frac{1}{2n+1} + (-1)^{(2n+2)+1} \cdot \frac{1}{2n+2}$$

Wegen $(2n+1)+1 = 2n+2 = 2(n+1)$ gerade, ist

$$(-1)^{(2n+1)+1} = 1$$

und wegen $(2n+2)+1 = \overbrace{2(n+1)}^{\text{gerade}} + 1$ ungerade, ist

$$(-1)^{(2n+2)+1} = -1 .$$

Benutzen wir im 1. Summanden die Induktionsvoraussetzung, so erhalten wir:

$$\sum_{K=1}^{2(n+1)} (-1)^{K+1} \cdot \frac{1}{K} = \sum_{K=1}^{n} \frac{1}{n+K} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}$$

$$= \sum_{K=0}^{n-1} \frac{1}{n+(K+1)} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2(n+1)}$$

$$= \sum_{K=0}^{n-1} \frac{1}{(n+1)+K} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2(n+1)}$$

$$= \sum_{K=1}^{n-1} \frac{1}{(n+1)+K} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2n+1}$$

$$= \sum_{K=1}^{n-1} \frac{1}{(n+1)+K} + \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2n+1}$$

$$= \sum_{K=1}^{n-1} \frac{1}{(n+1)+K} + \frac{1}{(n+1)+(n+1)} + \frac{1}{(n+1)+n}$$

$$= \sum_{K=1}^{n+1} \frac{1}{(n+1)+K}$$

ok.

Damit ist die Gleichung nachgewiesen.

$\blacksquare$

1.2. (i) Wir berechnen direkt:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!\,(n-(k+1))!}$$

$n-(k+1) = n-k-1$

$$= \frac{n!\,(k+1)}{(k+1)!\,(n-k)!} + \frac{n!\,(n-k)}{(k+1)!\,(n-k)!}$$

$$= \frac{n!\,(k+1) + n!\,(n-k)}{(k+1)!\,(n-k)!}$$

$$= \frac{n!\,(k+1+n-k)}{(k+1)!\,(n+1-k-1)!}$$

$$= \frac{n!\,(n+1)}{(k+1)!\,((n+1)-(k+1))!}$$

$$= \frac{(n+1)!}{(k+1)!\,((n+1)-(k+1))!}$$

$$= \binom{n+1}{k+1}.$$

Erläuterung: Die Formel besagt, dass sich ein Element stets als Summe beider, im Dreieck oberhalb gelegenen Elemente ergibt, z.B.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \end{array}$$

(ii) Wir führen eine Induktion nach $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsbehauptung für $n \in \mathbb{N}$ ist

$$B(n): \quad \forall\, k \in \{0, \dots, n\} \text{ gilt: } \sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

- Induktionsanfang: $n = 0$

  $\Rightarrow$ $k = 0$ ist einzige Möglichkeit und:

$$\sum_{j=0}^{0} \binom{j}{k} = \binom{0}{0} = \frac{0!}{0!(0-0)!} = 1$$

$$\binom{0+1}{0+1} = \frac{1!}{1! \cdot 0!} = 1 \qquad \text{ok.}$$

- Induktionsschritt: $n \to n+1$.

  Gelte $B(n)$ und sei $k \in \{0, \dots, n+1\}$.

  Wir behandeln den Fall $k = n+1$ vorab:

$$\sum_{j=n+1}^{n+1} \binom{j}{k} = \binom{n+1}{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)! \cdot 0!} = 1$$

$$\binom{(n+1)+1}{(n+1)+1} \overset{\text{analog}}{=} 1 \qquad \text{ok.}$$

Wir dürfen also $k \in \{0, \dots, n\}$ voraussetzen.

In dieser Situation berechnen wir:

$$\sum_{j=k}^{n+1} \binom{j}{k} = \sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} + \binom{n+1}{k}$$

$$\overset{\text{B(n) anwendbar, wegen } k \in \{0, \dots, n\}}{=} \binom{n+1}{k+1} + \binom{n+1}{k}$$

$$\overset{\text{Teil (i)}}{=} \binom{(n+1)+1}{k+1} \qquad \text{ok.}$$

Damit ist die Gültigkeit von $B(n+1)$ gezeigt und die Behauptung ergibt sich mit vollständiger Induktion. $\blacksquare$

1.3. (i)

(a) $$(a+i)^3(b-2i) = (a^3+3a^2i+3ai^2+i^3)(b-2i)$$

$$= (a^3+3a^2i-3a-i)(b-2i)$$

$$= a^3b+3a^2bi-3ab-ib-2a^3i+6a^2+6ai-2$$

$$= (a^3b-3ab+6a^2-2)+i(3a^2b-b-2a^3+6a)$$

(b) $$\frac{a+i}{b-i} = \frac{(a+i)(b+i)}{(b-i)(b+i)} = \frac{ab+ai+bi+i^2}{b^2-i^2}$$

$$= \frac{(ab-1)+i(a+b)}{b^2+1} = \left(\frac{ab-1}{b^2+1}\right)+i\left(\frac{a+b}{b^2+1}\right)$$

(ii) (a) $$\frac{(z-i)^2}{z} = (z^2-2zi+i^2)\cdot\frac{1}{z} = z-2i-\frac{1}{z}$$

$$= (a+ib)-2i-\frac{1}{a+ib} = a+i(b-2)-\frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)}$$

$$= a+i(b-2)-\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{ib}{a^2+b^2}$$

$$= \left(\frac{a^3+ab^2-a}{a^2+b^2}\right)+i\left(\frac{(b-2)(a^2+b^2)+b}{a^2+b^2}\right)$$

$$= \left(\frac{a^3+ab^2-a}{a^2+b^2}\right)+i\left(\frac{b^3+a^2b-2b^2-2a^2+b}{a^2+b^2}\right)$$

(b) $\frac{z+1}{z} + \frac{i}{\bar{z}} = \frac{(z+1)\bar{z} + iz}{z\bar{z}} = \frac{z\bar{z} + \bar{z} + iz}{z\bar{z}}$

$z\bar{z} = a^2+b^2$

$$= \frac{a^2+b^2+a-ib+i(a+ib)}{a^2+b^2}$$

$$= \frac{a^2+b^2+a-ib+ia-b}{a^2+b^2}$$

$$= \left(\frac{a^2+b^2+a-b}{a^2+b^2}\right) + i\left(\frac{a-b}{a^2+b^2}\right)$$

$\blacksquare$

1.4. (i) In der Linearen Algebra I wurde gezeigt:

$$\mathbb{R}[x] \text{ ist ein Ring.}$$

Allerdings ist $\mathbb{R}[x]$ Kein Körper, da nicht jedes Polynom $f \neq 0$ ein multiplikatives Inverses besitzt. Betrachte z.B.

$f(x) = x$.

Angenommen $g(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i \in \mathbb{R}[x] \setminus \{0\}$ mit $\alpha_n \neq 0$ wäre multiplikatives Inverses, d.h.

$$f(x) \cdot g(x) = 1.$$

Aber: $$f(x) \cdot g(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^{i+1} = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_{i-1} x^i \neq 1 \quad ↯$$

i fängt bei 1 an!

Also ist $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ nicht invertierbar.

(ii) „Mangel" von $\mathbb{R}[x]$: Nicht jedes Element multiplikativ invertierbar. Analog: z.B. $2 \in \mathbb{Z}$ nicht invertierbar.

In $\mathbb{Q}$ wird dieses Problem durch bilden von „Brüchen" $\frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{Z}$ behoben. Wollen diese Idee auf $\mathbb{R}[x]$ übertragen und betrachten Paare von Polynomen,

$$Q := \mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[x] \setminus \{0\} = \{ (f, g) \mid f, g \in \mathbb{R}[x], g \neq 0 \}$$

die wir als Brüche interpretieren wollen.

Aber: Brüche $\frac{p}{q}$ bestimmen p und q nicht eindeutig, z.B.

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{in } \mathbb{Q}$$

Müssen also gewisse Elemente in Q identifizieren. Deshalb definieren wir eine Äquivalenzrelation auf Q, motiviert durch die Beobachtung

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc \qquad \text{in } \mathbb{Q}.$$

Also

$$(f,g) \sim (p,q) \quad :\Leftrightarrow f \cdot q = g \cdot p$$

Rechnen liefert: $\sim$ ist Äquivalenzrelation auf Q. Schreiben

$$\mathbb{R}(x) := Q/_{\sim} \quad \text{und} \quad \frac{f}{g} := [(f,g)].$$

In $\mathbb{Q}$ gilt:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}, \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Wir definieren daher $+$ und $\cdot$ in $\mathbb{R}(x)$ durch

$$\frac{f}{g} + \frac{h}{k} := \frac{fk + hg}{gk}, \quad \frac{f}{g} \cdot \frac{h}{k} := \frac{fh}{gk}$$

Wohldefiniertheit:

$\frac{f}{g} = \frac{\bar{f}}{\bar{g}}$, $\frac{h}{k} = \frac{\bar{h}}{\bar{k}}$, d.h. $f\bar{g} = \bar{f}g$ und $h\bar{k} = \bar{h}k$. Damit:

$$(fk + h \cdot g) \cdot \bar{g}\bar{k} = fk\bar{g}\bar{k} + hg\bar{g}\bar{k} = \bar{f}gk\bar{k} + \bar{h}kg\bar{g}$$

$= (\overline{f}\,\overline{k} + \overline{h}\,\overline{g})\, gk \quad \Rightarrow$ + wohldefiniert.

Analog: $\cdot$ wohldefiniert. Körperaxiome:

- $\frac{f}{g} + \frac{0}{1} = \frac{f\cdot 1 + 0\cdot g}{g \cdot 1} = \frac{f}{g} \Rightarrow \frac{0}{1} \in \mathbb{R}(x)$ neutral bzgl. $+$

- $\frac{f}{g} + \frac{h}{k} = \frac{fk + hg}{gk} = \frac{hg + fk}{kg} = \frac{h}{k} + \frac{f}{g} \Rightarrow$ + Kommutativ

- $\frac{f}{g} + \frac{-f}{g} = \frac{fg - fg}{gg} = \frac{0}{g} = \frac{0}{1} \Rightarrow \exists$ Inverse bzgl. $+$

- $\left(\frac{f}{g} + \frac{h}{k}\right) + \frac{p}{q} = \frac{fk + hg}{gk} + \frac{p}{q} = \frac{(fk+hg)q + pgk}{(gk)q}$

  $= \frac{fkq + hgq + pgk}{gkq} = \frac{fkq + (hq + pk)g}{g(kq)} = \frac{f}{g} + \left(\frac{h}{k} + \frac{p}{q}\right)$

  $\Rightarrow$ + assoziativ.

- $\frac{f}{g} \cdot \frac{1}{1} = \frac{f\cdot 1}{g\cdot 1} = \frac{f}{g} \Rightarrow \frac{1}{1} \in \mathbb{R}(x)$ neutral bzgl. $\cdot$

- $\frac{f}{g} \cdot \frac{h}{k} = \frac{fh}{gk} = \frac{hf}{kg} = \frac{h}{k} \cdot \frac{f}{g} \Rightarrow \cdot$ Kommutativ

- $\left(\frac{f}{g} \cdot \frac{h}{k}\right) \cdot \frac{p}{q} = \frac{(f\cdot h)\cdot p}{(g\cdot k)\cdot q} = \frac{f\cdot(h\cdot p)}{g\cdot(k\cdot q)} = \frac{f}{g} \cdot \left(\frac{h}{k} \cdot \frac{p}{q}\right) \Rightarrow \cdot$ assoziativ

- $$\left.\begin{aligned} &\frac{f}{g} \cdot \left(\frac{h}{k} + \frac{u}{v}\right) = \frac{f}{g} \cdot \frac{hv + uk}{kv} = \frac{fhv + fuk}{gkv} \\ &\qquad = \\ &\frac{f}{g}\cdot\frac{h}{k} + \frac{f}{g}\cdot\frac{u}{v} = \frac{fhgv + fugk}{gkgv} = \frac{fhv + fuk}{gkv} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$ Distributivgesetz gilt.

Noch zu prüfen: Multiplikative Inverse.

Sei $\frac{f}{g} \neq \frac{0}{1}$ d.h. $f \cdot 1 \neq 0 \cdot g$ also $f \neq 0$.

$$\overset{f \neq 0}{\Rightarrow} \quad \frac{g}{f} \in \mathbb{R}(x)$$

und:

$$\frac{f}{g} \cdot \frac{g}{f} = \frac{fg}{gf} \underset{\substack{\uparrow \\ fg \cdot 1 = 1 \cdot gf}}{=} \frac{1}{1} \Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)^{-1} = \frac{g}{f}$$

und insbesondere besitzt $\frac{f}{g}$ multiplikatives Inverses.

$\blacksquare$