Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. G. Schumacher
Dipl.-Math. T. Geiger

Sommersemester 2012

Klausur zur Analysis I

Samstag, den 07.07.2012, 09:15–12:00 Uhr,
Hörsäle 4 und 215, Hörsaalgebäude Biegenstraße

Name: .....

Vorname: .....

Matrikelnummer: .....

Studiengang: .....

Diese Prüfung ist mein letzter Prüfungsversuch in diesem Modul: ☐ ja ☐ nein

- Füllen Sie bitte zuerst das Deckblatt aus und versehen Sie **alle** Blätter mit Ihrem Namen.
- Bearbeiten Sie die Aufgaben auf den ausgegebenen Blättern. Es befinden sich noch leere Blätter bei der Aufsicht, falls der Platz unter dem Aufgabentext, auf der Rückseite des Aufgabenblattes und auf den Zusatzblättern nicht ausreichen sollte.
- Es sind keine Hilfsmittel zulässig.

Es werden maximal 56 Punkte erwartet, d.h. 56 Punkte entsprechen 100%.

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
max. Punkte	8	8	8	8	8	8	8	8	64
erreichte Punkte									

Name: .....

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Kreuzen Sie die richtige Antwort an. Es werden keine Begründungen verlangt.

Jede richtig beantwortete Teilaufgabe bringt einen Punkt, jede falsch beantwortete Teilaufgabe ergibt einen Punkt Abzug. Nicht beantwortete Teile werden nicht gewertet. Wird in der Summe eine negative Punktzahl erreicht, so wird diese auf 0 Punkte aufgerundet.

1. Es gibt einen Körper K, der nicht angeordnet werden kann.

   wahr ☐ *falsch* ☐

2. Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen, welche gegen eine positive Zahl $a > 0$ konvergiert, so sind für eine natürliche Zahl $N \in \mathbb{N}$ alle Folgenglieder a_n mit $n > N$ positiv.

   wahr ☐ *falsch* ☐

3. Jede Cauchyfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rationaler Zahlen konvergiert gegen eine rationale Zahl.

   wahr ☐ *falsch* ☐

4. Ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe reeller Zahlen, so konvergiert auch jede Umordnung der Reihe gegen denselben Grenzwert.

   wahr ☐ *falsch* ☐

5. Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge reeller Zahlen, welche gegen 0 konvergiert, dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ absolut.

   wahr ☐ *falsch* ☐

6. Sind $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, so ist jede stetige Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig.

   wahr ☐ *falsch* ☐

7. Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f(a) = f(b)$ für zwei verschiedene reelle Zahlen a und b, dann besitzt die Ableitung f' eine Nullstelle.

   wahr ☐ *falsch* ☐

8. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und die Ableitung f' besitze eine Nullstelle. Dann besitzt f mindestens ein lokales Extremum.

   wahr ☐ *falsch* ☐

Name: .....

Aufgabe 2 (4+4=8 Punkte)

Begründen Sie, ob die Folgen konvergieren oder divergieren und berechnen Sie bei Konvergenz den Grenzwert.

(i)

$$a_n = n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right).$$

(ii) Für $k \in \mathbb{N}$:

$$b_n = (-1)^n\left(n-\frac{1}{n^k}\right)$$

Name: .....

Aufgabe 3 (2+3+3=8 Punkte)

Es seien reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a \leqslant b$ gegeben. Die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seien rekursiv definiert durch

$$a_1 := a, \qquad b_1 := b, \qquad a_{n+1} := \sqrt{a_n b_n}, \qquad b_{n+1} := \frac{1}{2}(a_n + b_n).$$

(i) Zeigen Sie, dass $0 < a_n \leqslant b$ sowie $0 < b_n \leqslant b$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(ii) Zeigen Sie, dass für positive reelle Zahlen x, y stets $\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}$ gilt, und folgern Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wächst und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fällt.

(iii) Zeigen Sie, dass beide Folgen gegen denselben Grenzwert konvergieren.

Name: .....

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^n}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $0 \leqslant x < 1$ konvergiert und für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geqslant 1$ divergiert.

Name: .....

Aufgabe 5 (8 Punkte)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ sowie eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ gegeben, welche nicht konstant ist. Zeigen Sie, dass es reelle Zahlen $c, d \in \mathbb{R}$ gibt, so dass gilt:

$$f([a, b]) = [c, d]$$

Name: .....

Aufgabe 6 (8 Punkte)

Sei $M \subset \mathbb{R}$ eine nichtleere Teilmenge und

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \inf \{|x - y| \mid y \in M\}.$$

Zeigen Sie, dass f gleichmäßig stetig ist.

Hinweis: Die erforderliche Implikation kann mit $\delta = \varepsilon$ nachgerechnet werden.

Name: .....

Aufgabe 7 (8 Punkte)

Es sei $f : [0,1] \to [0,1]$ stetig und auf $(0,1)$ differenzierbar mit $f'(x) \neq 1$ für alle $x \in (0,1)$. Beweisen Sie, dass f genau einen Fixpunkt besitzt, d.h. dass es genau ein $\eta \in [0,1]$ gibt, so dass

$$f(\eta) = \eta$$

gilt.

Hinweis: Benutzen Sie die Hilfsfunktion $g(x) = f(x) - x$.

Name: .....

Aufgabe 8 (8 Punkte)

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ sowie eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ welche auf (a, b) differenzierbar ist und $f(a) = f(b) = 0$ erfüllt, gegeben. Zeigen Sie: Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ existiert ein $\eta \in (a, b)$, so dass

$$f'(\eta) = \lambda f(\eta)$$

gilt.

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $g(x) = \exp(-\lambda x) f(x)$.

Name: .....

Zusatzblatt 1

Name: .....

Zusatzblatt 2

Name: .....

Zusatzblatt 3

Name: .....

Zusatzblatt 4