Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. G. Schumacher
Dipl.-Math. T. Geiger

Sommersemester 2012

Übungen zur Analysis I

– Blatt 4 –

Abgabe: Dienstag, den 15.05.2012, 12:00 – 12:10 Uhr, HG 4

Aufgabe 4.1. (12 Punkte)
Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl. Für $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ bezeichne $\operatorname{ord}_p a$ die größte natürliche Zahl m, so dass p^m in der Primfaktorzerlegung von a auftritt. Für eine rationale Zahl $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^*$ sei $\operatorname{ord}_p x = \operatorname{ord}_p a - \operatorname{ord}_p b$ definiert.

(i) Zeige, dass $\operatorname{ord}_p x$ für $x \in \mathbb{Q}^*$ wohldefiniert ist und dass für $x_1, x_2 \in \mathbb{Q}^*$ stets $\operatorname{ord}_p (x_1 x_2) = \operatorname{ord}_p x_1 + \operatorname{ord}_p x_2$ gilt.

(ii) Zeige, dass durch

$$|x|_p = \begin{cases} \frac{1}{p^{\operatorname{ord}_p x}} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

auf $\mathbb{Q}$ ein Absolutbetrag definiert wird, welcher *nichtarchimedisch* ist, d.h. für alle $x, y \in \mathbb{Q}$ ist $|x+y|_p \leqslant \max\{|x|_p, |y|_p\}$ und dass diese Ungleichung für den gewöhnlichen Absolutbetrag $|\cdot|$ auf $\mathbb{Q}$ falsch ist.

(iii) Betrachte für $a \in \mathbb{Q}$ und $\varepsilon > 0$ die offene ε-Umgebung $U_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{Q} \mid |x-a|_p < \varepsilon\}$. Zeige: Ist $b \in U_\varepsilon(a)$, so gilt bereits $U_\varepsilon(a) = U_\varepsilon(b)$.

Aufgabe 4.2. (12 Punkte)
Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge reeller Zahlen. Zeige:

(i) Ist $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung, dann ist auch die umgeordnete Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n := a_{\tau(n)}$ konvergent, mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$.

(ii) Sind für ein $M \in \mathbb{N}$ reelle Zahlen x_n mit $n \in \{1, \ldots, M\}$ gegeben, so konvergiert auch die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei

$$b_n = \begin{cases} x_n & \text{für } n \leqslant M \\ a_n & \text{für } n > M \end{cases}$$

gilt, mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$.

Aufgabe 4.3. (12 Punkte)
Untersuche jeweils die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sowie die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ auf Konvergenz und berechne gegebenenfalls die Grenzwerte.

(i) $a_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}}$, $a_0 := 0$

(ii) $a_n = \frac{n^2+3}{n^3+n+1}$

Aufgabe 4.4.*
Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen reeller Zahlen mit $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es gelte

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = x.$$

Zeige, dass $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x konvergiert.