Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. G. Schumacher
Dipl.-Math. T. Geiger

Sommersemester 2012

Übungen zur Analysis I

– Blatt 6 –

Abgabe: Dienstag, den 29.05.2012, 12:00 – 12:10 Uhr, HG 4

Aufgabe 6.1. (12 Punkte)
Es seien folgende, von $x \in \mathbb{R}$ abhängige Reihen gegeben:

$$\text{(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{(x^2+1)^n} \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n3^n}$$

Bestimme jeweils für beide Reihen

(i) die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, so dass die Reihe konvergiert.

(ii) die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, so dass die Reihe absolut konvergiert.

(iii) die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, so dass die Reihe divergiert.

Aufgabe 6.2. (12 Punkte)
Berechne die Grenzwerte der folgenden Reihen:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)(n+2)}$

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{3^n}$

(iii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{(n+1)!}$

(iv) $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{2^{n+k}}$

Hinweis: Führe in Aufgabenteil (i) eine Partialbruchzerlegung durch.

Aufgabe 6.3. (12 Punkte)
Die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ seien konvergent. Zeige, dass die folgenden Reihen absolut konvergieren:

$$\text{(i)} \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \qquad \text{(ii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$$

Aufgabe 6.4.*
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge nichtnegativer reeller Zahlen, so dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent ist und $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ gilt. Zeige: Ist $x > 0$ eine positive reelle Zahl, so existiert eine Folge $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\varepsilon_n \in \{0, 1\}$ so dass gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n = x$$